


FONDO PIZZOFALCONE



ELEMENTA MATHESEOS UNIVERSÆ.



TOMUS V.

QUI

COMMENTATIONEM DE PRÆCIPUIS SCRIPTIS MATHEMATICIS

COMMENTATIONEM DE STUDIO MATHEMATICO RECTE INSTITUENDO

ET

INDICES IN TOMOS QUINQUE MATHESEOS UNIVERSÆ CONTINET.



AUTORE

CHRISTIANO WOLFIO,

POTENTISSIMI SUECORUM REGIS, HASSIÆ LANDGRAVII, CONSILIARIO REGIMINIS, MATHEMATUM AC PHILOSOPHIÆ PROFESSORE PRIMARIO, IN ACADEMIA MARBURGENSI, PROFESSORE PETROPOLITANO HONORARIO, ACADEMIÆ REGIÆ SCIENTIARUM PARISINÆ SOCIETATUMQUE REGIARUM BRITANNICÆ ATQUE BORUSSICÆ MEMBRO.

CUM PRIVILEGIO SACRÆ CÆSAREÆ MAJESTATIS ET POLONIARUM REGIS ATQUE SAXONIÆ ELECTORIS.

HALÆ MAGDEBURGICÆ, A. MDCCXLI.

PROSTAT IN OFFICINA RENGERIANA.



PRÆFATIO.

PRodit tandem Tomus quintus novæ editionis Elementorum nostrorum Matheseos universæ, qui dudum lucem adspecisset, nisi alii labores aliaque impedimenta indeclinabilia moram injecissent. Equidem nihil restabat quam recensio Autorum, qui Mathesin vel suis inventis, vel scriptis illustrarunt, quam adjeceramus tam Germanicæ Elementorum Matheseos, quam primæ Latinæ editioni vna cum Indice in quatuor Elementorum horum Tomos: ne tamen nimis sterilis judicaretur Tomus quintus, addere lubuit

Commentationem de ſtudio mathematico recte inſtituendo. Primo igitur loco ſiſtitur brevis Commentatio de præcipuis Scriptis mathematicis. Omnia recenſere nec potuimus, nec recenſeri conſultum fuit. Recenſuimus ea, quæ ipſimet poſſidemus, & pauca quædam, quæ aliunde nobis nota ſunt. Hanc autorum notitiam abunde ſufficere credimus ei, qui vel ſe totum Matheſi dare, vel eius aliquam partem ſibi quaſi propriam reddere decreverit. Et quoniam ſingulis adhuc annis ſcripta mathematica prodeunt, unusquisque, cui volupe fuerit, hanc recenſionem facile continuabit. Qui vero Matheſi tantummodo operam navare voluerit, ut non modo divinæ huius ſcientiæ compos fiat, verum etiam intellectus eum perfectionis gradum conciliet, ut eodem in omni cognitione reliqua rite ac prompte utatur; ei abunde ſatisfacient ſola Elementa noſtra, ut nullo alio librorum apparatu indigeat. Quodſi autem quis in aliqua ejus parte ulterius progredi voluerit, ex commentatione noſtra facile videbit, quem vel quosnam ſibi eligere debeat duces, ut voti ſui compos reddatur. Ceterum cum nemo Autorum ſibi propoſuerit, ut eam omni perſpicuitate explicaret, quam tyro merito deſideraverit, ac demonſtrationes daret

con-

consummatas, quas in Logica appellamus; suademus serio ne quis ad lectionem aliorum Autorum accedat, antequam nostra sibi familiaria reddiderit. Verendum enim, ne confundatur, & perplexitate desertor studii utilissimi efficiatur. Si quis solius intellectus perficiendi gratia ad Mathesin animum appellit, is vel in Elementis Arithmeticæ, Geometriæ Elementaris & Trigonometriæ planæ subsistere, vel ex ceteris addere potest, quæ maxime sunt ad ipsius palatum, modo sibi caveat, ne negligat eas disciplinas, ex quibus demonstrandi principia petuntur, nisi hæc tanquam certa sumere voluerit, etsi eorum evidentiam non perceperit. Et quænam hic observanda sint, ex Commentatione de studio mathematico recte instituendo haud difficulter addiscet. Secundo loco hic comparet Commentatio de studio mathematico recte instituendo. Non omnes, qui eidem sese dedunt, eodem fine ad ipsum accedunt. Quamobrem nostrum fuit, non idem singulis dare consilium, sed potius pro diversitate finis diversa. Equidem elementa nostra eo modo concinnavimus, ut singulis satisfaciant, quocunque tandem animo ad Mathesin accedant; cum tamen omnibus non conveniant omnia, indicandum omnino erat,

quænam omittenda ſint, quænam prætermitti minime debeant, & quomodo in iis percipiendis ſit verſandum, prouti unusquisque hunc vel alium finem ſibi propoſuerit, quamvis iis, qui ſciendi cupidine flagrant & in philoſophia aliisque ſcientiis cum laude verſari voluerint, commendanda ſit lectio integrorum noſtrorum Elementorum. Ea ſane hoc modo conſcripſimus, ut haud multo temporis ſpatio integram Matheſin addiſcere liceat, ac deinde qualibet ejus parte ulterius progredi detur, quantum libuerit. Cognitu nimirum utiliſſima & quæ ad ulteriora viam ſternunt, cum primis principiis ita connexa ſunt, vt ideas maxime adæquatas ex his Elementis haurire & ex aliis operibus petenda cum iisdem connectere liceat: id quod etiam in operibus noſtris philoſophicis eadem methodo conſcriptis intendimus. Neque enim alia datur via, qua ad certam & ſolidam rerum cognitionem perveniatur. Etſi autem Matheſis multas afferat utilitates ad felicitatem generis humani promovendam, ut adeo digna ſit, quæ excolatur; non tamen hinc recte infertur, eam omnibus omnino eſſe addiſcendam, qui ſtudiis literariis operam navant. Sufficit enim eſſe aliquos, qui eidem vel uni alterive parti ſe conſecrant, ut hu-

ma-

manum genus utilitates istas consequatur. Enim vero quatenus studium mathematicum perficit intellectum, ea eius utilitas est, ut nemo ad scientias alias tractandas admitti debeat nisi in Mathesi versatus. Hæc ipsa utilitas omni ævo agnita, ex quo scientiæ honos fuit. Semper enim unanimi consensu assertum, ac hodienum asseritur, studio Matheseos perfici intellectum. Non tamen defuere, qui utilitatem istam in dubium vocarunt, cum viderent viros in Mathesi præstantes nihil agere, ubi extra eandem demonstrationes dare audent. Immo hinc enata est opinio, quasi solius Matheseos sit ea, quæ affirmantur, vel negantur, demonstrare; in Philosophia vero & facultatibus, quæ vocantur superioribus ad demonstrationes perveniri non posse. Ex hoc labyrintho patet egrediendi via, si paulo intimius inspicias, cur Mathesis acuat intellectum. Memini jam alias plus simplici vice me monuisse, methodo tribuendum esse, ut Matheseos studio perficiatur intellectus. Ut vero methodum distincte cognoscas eamque in potestatem tuam redigas, non qualibet tractatio sufficit, sed legitimo quodam modo tractanda est Mathesis. Quinam igitur sit modus, a quo tam præclara utilitas unice speranda, in Commentatione nostra ex instituto

do.

docemus. Neque enim hactenus satis hoc animadversum ab aliis: unde accidit, ut Mathematici summi, qui divinis prorsus inventis scientiam nobilissimam ditarunt, genuinam demonstrationis formam non perspexerint, quemadmodum in ipsa Commentatione clarissime ostendi. Quicquid igitur alii sentiant de Tomo hoc quinto Elementorum Matheseos, quorum unicuique liberum suum relinquimus iudicium, ego hoc nomine eundem maximi facio, quod genuinum facultatum mentis nostræ usum hinc addiscere liceat, quo ad solidam rerum cognitionem pervenitur. Non nego eundem usum regulis comprehendi in Logica, & a nobis in opere præsertim Latino majore, quod de Logica conscripsimus, demonstrari. Monui tamen jam alias, studio Matheseos rite instituto eum acquirendum esse. Quomodo igitur id ipsum rite instituatur, ut in omni cognitionis genere facultatum humanarum rectum facere addiscas usum, in Commentatione nostra tanta perspicuitate docuimus, ut, quid amplius desiderari possit, non videamus. Quamobrem si quis consilio nostro uti voluerit, is in se ipso experietur, quod non modo regulas logicas, quas in opere nostro exposuimus, nunc penitus intelligat, & nihil in iis supersit obscuri-

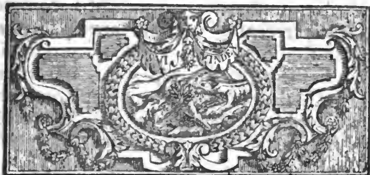
ri-

ri; verum etiam quod iisdem prompte ac sine ulla aberratione satisfacere possit, modo attentionem suam in se desiderari minime patiatur. Dari aliquam artem inveniendi, quæ hactenus absque regulis exercetur, Mathematici exemplo suo abunde confirmant, qui nostro præsertim ævo novis indies inventis Mathesin augent. Nemo diffitebitur, qui vel ad ea animum advertit, quæ speciminis loco in Arithmetica (*) tradidimus, ab exemplis abstrahi posse regulas. Quoniam igitur summa intellectus perfectio est cum facere facultatum nostrarum usum, qui ad veritatem latentem investigandam requiritur, id quoque egimus in Commentatione nostra ut ostenderemus, quomodo versandum sit in Mathesi, ut usum istum consequamur. Hactenus ars inveniendi regulis comprehensa non est, quæ enim sub hoc titulo prostant, augustum istud nomen non merentur. Demus autem mox affore tempus, quo Ars inveniendi omnibus suis numeris absoluta exactisque regulis comprehensa in publicum prostet; minime tamen hinc sequitur, ea, quæ in Commentatione nostra in usum huius artis acquirendæ præcipiuntur, nullius fore utilita-

(*) §. 125.

tis: valent enim de hac arte eadem quo modo de Logica annotavimus. Quid quod etiam consilium nostrum de studio Matheseos in usum artis inveniendi acquirendæ instituendo ei prodesse possit, qui eam regulis comprehendere voluerit. Ultimo demum loco sequuntur Indices, de quibus ut multa dicam opus non est. Unicum tantummodo moneri consultum duxi. Initio constitueram indices omnes rerum & verborum in Elementis nostris contentorum in unum compingere. Enimvero cum consultissimum videretur in iis citari paragraphos, literis autem alphabeti singulæ partes non commode distingui possent; potius visum est singulos singulorum Tomorum Indices sigillatim conficere. Quoniam enim in separato Tomo leguntur, absque ulla opera, quæ in uno non inveniuntur, in alio quæruntur. Ac ita tandem Elementa nostra Matheseos universæ ad umbilicum perduximus, nil magis in votis habentes, quam ut iisdem in addiscenda Matheſi utentes eum consequantur usum, quem Commentatio nostra promittit. Dabam Marburgi Cattorum d. 17. Septembr. A. O. R. 1740.

DE PRÆCIPUIS SCRIPTIS MATHEMATICIS BREVIS COMMENTATIO.



PRÆFATIO.



Non nobis propositum est condere Historiam Matheseos universæ, ut ortus ejus pateat atque progressus ad nostra usque tempora. Opus enim hoc arduum est ac difficile, quod infinitam propemodum requirit lectionem & Bibliothecam libris omnibus tam antiquis, quam recentioribus instructissimam. Nostrum jam non est in hunc campum descendere. Quod ordinaria negotia nobis relinquunt otium, in Philosophia reformanda totum consumendum, etiamsi alia non obstarent, de quibus in præsenti dicere nil attinet. Neque etiam nobis animus est recensendi Autores omnes, qui vel de Mathesi integra, vel de una aut altera ejus parte, vel etiam de parti-

particularibus quibusdam argumentis commentati sunt: Sufficit recensuisse scripta præcipua, quorum lectione in studio Matheseos feliciter progredi licet. Etsi enim hodie reperiantur plurimi, qui in historia literaria industriam suam exercent: nullibi tamen magis quam in Mathematicorum scriptis recensendis eandem deficere animadvertes, cum plerumque Mathematum rudes sint, qui ad hoc studiorum genus animum appellunt. Utile tamen est, immo necessarium nosse libros, a quorum lectione recedas doctior, ne in legendis iis, qui ad scopum minime faciunt, tempus fallas & magno conatu parum aut nihil discas. Me igitur non inutilem operam præstitisse confido iis, qui ad Mathesin addiscendam sese convertunt. Patebit hoc ex sequente commentatione de studio mathematico, in qua indicaturus sum, quinam pro diverso discentium scopo legendi sint autores. Ceterum non dubito, hanc recensionem Autorum etiam prodesse posse iis, qui ad Historiam Matheseos condendam sese accingent observaturi eas leges, quas præscripsimus in opere nostro Logico. Vix tamen eandem ab uno homine expectes. Rationes perspicies ex iis, quæ de Historia scientiarum in Logica tradidimus. Optandum foret, ne pars euditionis longe utilissima diutius negligeretur, & bene de humano genere merebitur, qui vel unius Matheseos partis historiam exasciatam dederit, exemplo suo excitaturus alios ad socias operas conferendas.

De

DE
PRÆCIPUIS SCRIPTIS MATHEMATICIS
BREVIS COMMENTATIO.

CAPUT I.

DE

CURSIBUS, OPERIBUS ATQUE LEXICIS MATHEMATICIS.

§. 1.

PRimus Cursum Mathematicum Latino & Gallico idiomate edidit *Petrus Herigonius* Parisiis 1644. in 8. (10. Alph. 2. plag.). Constat Tomis sex. Primo continentur 1. Elementa *Euclidis* XV, 2. Data *Euclidis*, 3. *Apollonii Pergæi* de determinata sectione Geometria a *Willebrordo Snellio* restituta, 5. ejusdem *Apollonii* inclinationum Geometria a *Marino Ghetaldo* restituta, 6. ejusdem *Apollonii* Tactionum Geometria a *Francisco Vieta* restituta, 7. Doctrina Sectionum angulorum. Tomus secundus complectitur 1. Arithmeticam practicam, & 2. Algebram tum vulgarem, tum speciosam una cum ratione componendi ac demonstrandi per regressum sive repetitionem vestigiorum Analyseos. Tomus tertius exhibet 1. constructionem Canonum sinuum atque Tangentium & Logarithmorum, 2. ipsos hos Canones, 3. Trigonometriam planam, 4. Geometriam practicam, 5. Architecturam militarem, 6. Tractatum de militia Græcorum. Romanorum & hodierna, 7. Mechanicam. Tomus quartus continet 1. doctrinam de sphæra mundi, 2. Geographiam tam veterem, quam novam, 3. Histiodromiam seu Artem navigandi. In Tomo quinto extant, 1. Optica *Euclidis* aucta & novis demonstrationibus illustrata, 2. Catoptrica *Euclidis*, 3. Dioptrica, 4. Perspectiva, 5. *Theodosii* Sphæricorum libri tres, quibus additur quartus de triangulis sphæricis & trigonometria sphærica, 6. Theoricæ planetarum, 7. Gnomonica, 8. Musica *Euclidis.*

clidis. Denique Tomus sextus supplementis destinatur 1. in Algebram, 2. in Perspectivam, 3. in Theoriam Planetarum: quibus additur introductio in Chronologiam. Apparet adeo, præter inventa recentiora, quæ Autor suo tempore tradere nondum potuit, desiderari adhuc 1. theoremata Archimedea, 2. Doctrinam Conicorum, 3. Staticam, 5. Hydraulicam, 6. Architecturam civilem, 7. Pyrotechniam. Quæ vero de singulis disciplinis monenda sunt, ea inferius suo loco annotabimus. Nunc in genere observamus, Autorem ubique accurata uti demonstrandi methodo eaque nova per notas reales & universales, ita ut demonstrationes ipsius ab eo, qui notarum vim animo comprehendit, citra usum cujuscunque idiomatis intelligi possint. Sed cum signa sint Autori peculiaria & diversa ab iis, quibus hodie in casibus similibus utimur; nonnihil difficultatis facessunt sub initium lectionis, aliis præsertim signis jam adsueto. Ubi tamen signa familiaria evaserint, multum facilitatis habet hæc demonstrandi methodus: quia integra demonstratio uno obtutu haud difficulter comprehenditur & una singulæ ejus partes distincte exhibentur. Cæterum *Herigonius* theoriam magis, quam praxin cordi habet, & ab ejus tempore pleræque disciplinæ mathematicæ multum mutationis subierunt, ad altius fastigium evectæ, ita ut nostro ævo non satisfaciat iis, qui ad Mathesin universam addiscendam animum appellunt.

§. 2. A. 1662. *Casparus Sschottus*, e Societate Jesu, Cursum Mathematicum edidit Herbipoli in fol. recusum Francofurti ad Mœnum An. 1674. & denuo Bambergæ A. 1677. in fol. (7. Alph. 19. plag. una cum 2. Alph. 4. plag. figurarum æri incisarum). Constat opus libris 28. quorum primus isagogen continet ad Mathesin, in qua problemata facillima Geometriæ practicæ explicantur: secundus Arithmeticam, tertius libros VI. priores Elementorum *Euclidis*, quartus & quintus Trigonometriam, sextus Geometriam practicam secundum pantometron *Kircheri*, septimus elementa Astronomiæ, octavus theoricas planetarum, nonus problemata Astronomiæ practi-

practicæ, decimus Aſtrologiam judiciariam, undecimus Chronographiam, duodecimus Geographiam, decimus tertius Hydrographiam, decimus quartus Horographiam, decimus quintus Mechanicam, decimus ſextus Staticam, decimus ſeptimus Hydroſtaticam, decimus octavus Hydrotechniam, decimus nonus Opticam, vigeſimus Catoptricam; vigeſimus primus Dioptricam, vigeſimus ſecundus & tertius Architecturam militarem, vigeſimus quintus Muſicam, vigeſimus ſextus Algebram, vigeſimus ſeptimus Logarithmorum doctrinam, vigeſimus octavus Synopſin Matheſeos tradit. Deſiderantur, adeo Pyrotechnia, Architectura civilis & Ars navigandi; pleræque diſciplinæ nimis breviter pertractantur nec demonſtrativa methodus ubique adhibetur: deſunt etiam recentiora inventa, nec ſublimiora attingit Autor, ipſius præſertim ævo parum trita. Non ergo ſatisfacit noſtro tempore iis, qui ad ſolidam Mathematum notitiam adſpirant.

§. 3. An. 1681. Londini in 4. idiomate Anglico prodiit *Jonæ Moore* Novum ſyſtema Mathe-

maticum (*A new Systeme of the Mathematicks*). Conſtat Tomis duobus, quorum primo continentur 1. Arithmetica tum decadica, tum decimalis, tum ſpecioſa, 2. ſex libri priores Elementorum *Euclidis* una cum undecimo & duodecimo atque Geometria practica, 3. Trigonometria plana & Sphærica, 4. Coſmographia, 5. Ars navigandi, 6. doctrina Sphærica ſecundum hypotheſin terræ motæ: in altero autem extant tabulæ aſtronomicæ, ſinuum verſorum & logarithmorum, atque Geographia ſeu deſcriptio præcipuarum Regionum. Eorum potiſſimum conatibus inſervit hoc opus, qui Artem navigandi ſolidioribus fundamentis ſuperſtructam addiſcere geſtiunt. Commendatur quoque doctrina Sphærica talia continens, quæ alibi fruſtra quæſiveris.

§. 4. *Claudius Franciſcus Milliet Dechales*, Camberienſis, e Societate Jeſu, A. 1674. edere cœpit Curſum ſeu Mundum mathematicum tribus Tomis: ſed cum novam editionem multo auctiorem meditatus ante diem obiiſſet, *Amatus Varcinus* ex eadem Societate A. 1690. editio-

nem

nem ex MSC. Autoris auctam & emendatam dedit Lugduni Gallorum in fol. (32. Alph). Editio posthuma in 4. Tomos digesta, quorum primo continentur 1. Tractatus de progressu Matheseos & de illustribus Mathematicis, 2. *Euclidis* Elementa XIV. 3. *Theodosii* Sphærica, 4. Tractatus de sectionibus Conicis, 5. Arithmetica practica, 6. Trigonometria, 7. Algebra, 8. Hypothesium Cartesianarum refutatio: secundo 1. Geometria practica, 2. Mechanica, 3. Statica, 4. Geographia, 5. Tractatus de Magnete, 6. Architectura civilis, 7. Ars tignaria, 8. Tractatus de lapidum sectione: tertio 1. Architectura militaris, 2. Hydrostatica. 3. Tractatus de fontibus & fluviis, 4. Hydraulica, 5. Ars navigandi, 6. Optica, 7. Perspectiva, 8. Catoptrica, 9. Dioptrica: quarto denique 1. Musica, 2. Pyrotechnia, 3. Astrolabium, 4. Gnomonica, 5. Astronomia, 6. Astrologia, 7. Tractatus de Meteoris, 8. Calendarium. Autor in Mathesi pura antiqua & vulgaria bene explicat; recentiora vero inventa & sublimiora non attingit. De disciplinis ad Mathesin mixtam spectantibus dicemus suo loco, id unice nunc annotasse contenti sumus, quod ad discursus physicos sæpius digrediatur. In demonstrando rigori veterum perspicuitatem jungit. Cursuum Mathematicorum, qui hactenus lucem publicam adspexerunt, absolutissimus est.

§. 5. A. 1690. *Wilhelmus Leyborn*, Anglus, patrio idiomate publicavit Cursum Mathematicum sub titulo: *Mathematical Sciences in Nine Books*, Londini in fol. (11. Alph. Tab. æn. 43). Liber primus explicat Arithmeticam, vulgarem pariter ac decimalem cum logarithmica; secundus Geometriam elementarem (cui appendicis instar subjungitur brevis ad Algebram speciosam introductio); tertius doctrinam de primo mobili; quartus Cosmographiam, Geographiam & Chronologicam doctrinam de epochis; quintus Trigonometriam planam & sphæricam; sextus usum instrumentorum geometricorum in Geodæsia, planimetria & Architectura tam civili, quam militari; septimus Artem navigandi; octavus Gnomonicam; nonus librum

rum secundum Institutionum Astronomicarum *Nicolai Mercatoris* de theoria planetarum. Plurimas disciplinas Mathematicas in hoc cursu desiderari statim apparebit, si quidem eam cum cursu præcedente conferre libuerit.

§. 6. *Abrahamus de Graaf*, Batavus, idiomate patrio Amstelodami A. 1694. in 4. (1. Alph. 21. plag. Tab. æn. 94.) sub titulo *de geheele Mathesis of Wiskonst* publici juris fecit Cursum Mathematicum, in quo reperiuntur 1. tractatus brevis de Proportione, 2. Arithmetica practica, 3. Geometria elementaris, 4. Trigonometria plana & sphærica, 5. Astronomia, 6. Ars agrimensoria cum stereometria doliorum, 7. Ars navigandi, 8. Architectura militaris, 9. Gnomonica, 10. Perspectiva, 11. Dioptrica cum Catoptrica, 12. Mechanica, 13. Algebra. In plerisque nimis brevis, Algebra excepta.

§. 7. A. 1697. *Ozanam*, Gallus, vir variis scriptis Mathematicis suo loco commendandis celebris, in publicum emisit Cursum Mathematicum quatuor Tomis comprehensum sub tit. *Cours de Mathematique* Parisiis in 8vo, recusum Amstelodami (quamvis Parisiorum nomen præ se ferat) A. 1699. (4. Alph. 14. plag. Tabb. æn. 155.) Tomus primus complectitur Elementa *Euclidis* sex priora una cum undecimo & duodecimo atque Arithmetica litterali; secundus Trigonometriam planam & Sphæricam cum Tabulis Sinuum, Tangentium atque Logarithmorum; tertius Geometriam practicam; quartus Mechanicam atque Perspectivam; quintus Geographiam & Gnomonicam. Desunt adeo disciplinæ quam plurimæ. Cæterum in demonstrando rigorem veterum pulchre observat Cl. Autor.

§. 8. Jac. *Taylor* in Thesaurario Mathematicæ, quod An. 1707. W. *Alingham* Londini in 8. recudi fecit (1. Alph. 12. plag. Tabb. æn. 18. sermone Anglico sub Titulo *Treasury of the Mathematicks* explicantur præcipua problemata Arithmeticæ, Geometriæ practicæ, Trigonometriæ utriusque, Astronomiæ Sphæricæ, Geographiæ, Navigationis, Geodesiæ, Stereometriæ, Gnomonicæ, Architecturæ mili-

militaris & Pyrothechniæ, suppositis terminorum definitionibus & demonstrationibus sepositis. Adduntur Tabulæ Logarithmorum & Tabulæ Sinuum atque Tangentium.

§. 9. Cum sub finem A. 1706. munus docendi publice Mathesin in Academia Halensi in me translatum esset; statim animadverti, me eidem ex voto satisfacere non posse, quamdiu desit liber, multiplici studiosorum ad celeberrimam hanc Musarum sedem undiquaque confluentium scopo conveniens. Prælectiones mathematicæ in Academiis Germaniæ tum instituebantur in Mathesin Compendiariam *Joannis Christophori Sturmii*, Philosophiæ Naturalis & Matheseos in Academia Altorfina Professoris, paucis Tabulis comprehensam. Sed cum in iis nonnisi prima Matheseos rudimenta continerentur, ac inprimis desideraretur methodus, qua intellectus juvenum ad reliqua studia rectius absolvenda formatur; meo, quem in docenda & discenda Mathesi mihi præfixeram, scopo eædem parum conveniebant. Equidem idem A. 1699. duobus Tomis Norimbergæ in 8. ediderat *Mathesin Juvenilem*, quorum prior Arithmeticam practicam, Geometriam practicam cum palmariis Geometriæ elementaris theorematis, Trigometriam planam, Architecturam militarem atque civilem, & Staticam seu Artem mechanicam; posterior Opticam, Catoptricam & Dioptricam, Astronomiam, Chronologiam, & Gnomonicam continet: in ea tamen nonnisi uberiori discurscursu illustrantur, quæ in Tabulis concisius proponuntur. Utitur Autor methodo erotematica, nec demonstrationibus locum concedit, ut ipse in præfatione moneat, non quærendam in hoc libro esse Mathesin suis numeris absolutam ac demonstrationibus exactissimis ubique firmatam, sed facilem, planam ac demonstrationibus discentium captui accommodatis illustratam verius, quam corroboratam. (Tom. I. 2. Alph. 12. plag. Tabb. æn. 52. Tom. II. 2. Alph. 9 plag. Tabb. æn. 57.)

§. 10. Filius ejus *Leonhardus Christophorus Sturmius*, Francofurti ad Oderam Matheseos Professor, Compendium Matheseos conscripsit in usum Prælectio-

num ſuarum idiomate patrio, methodo erotematica ad imitationem Matheſeos juvenilis parentis ſui, in quinque partes diviſam, quarum prima Matheſin univerſalem, Arithmeticam, Geometriam elementarem, Phoronomiam, Algebram; ſecunda Arithmeticam practicam, Geometriam practicam, Architecturam militarem & civilem, Pyrotechniam, Mechanicam; tertia Aſtronomiam, Geographiam & Chronologiam; quarta Gnomonicam, Opticam, Perſpectivam & Acuſticam, quinta Tabulas quasdam mathematicas continet. Prodiit ſecunda vice Francofurti ad Oderam 1710. in 8. ſub Titulo: Kurtzer Begriff der geſammten Matheſis. Autor totum ſe dederat ſtudio Architecturæ civilis ac militaris & Geometriæ practicæ, ut adeo in theoria elementari ceſpitet. In ceteris veſtigia parentis in Matheſi juvenili legit, quantum ipſi dabatur.

§. 11. Ut igitur ad verum Matheſeos ſtudium juventutem academicam manuducerem, Univerſæ Matheſeos Elementa idiomate patrio conſcripſi, & quatuor Tomis Halæ 1710. in 8. ſub Titulo: Anfangs-Gründe der Mathematiſchen Wiſſenſchafften, evulgavi (5. Alph. 10. plag. Tabb. æn. 111.) Tomus primus continet Commentationem de Methodo mathematica, Arithmeticam, Geometriam, Trigonometriam & Architecturam civilem; ſecundus Pyrotechniam, Architecturam militarem, Mechanicam, Hydroſtaticam, Aërometriam & Hydraulicam; tertius Opticam, Catoptricam, Dioptricam, Perſpectivam, Trigonometriam Sphæricam, Aſtronomiam, Chronologiam, Geographiam & Gnomonicam: quartus denique Algebram communem, Analyſin infiniteſimalem Illuſtris *Leibnitii* & appendicem de præcipuis ſcriptis mathematicis. Theoretica parcius expoſui, ut tempori ac loco ſervirem, quantum ad praxes, quas uberius tradidi, demonſtrandas ſufficere deprehendi, reliquis in parte quarta per Analyſin erutis. Ubivis tamen methodi rationem habui, ut verioris Logicæ praxis animis diſcentium inſinuaretur & ad ſolidam doctrinam capiendam diſcentes apti efficerentur. Non

inutilem fuisse huncce laborem, tum propria experientia me quotidie adhuc edocet, tum alii publice confessi sunt. Videantur Acta Eruditorum A. 1711. pag. 279. A. 1713. p. 222. 428. & A. 1714. p. 250. Quinta vice recusa sunt hæc Elementa An. 1738. in 8. (6. Alph. Tabb. æn. 121.) Prodeunt nunc Amstelodami in linguam Batavorum translata & Lausannæ in Latinum versa eduntur.

§. 12. Quoniam hæc Elementa nonnullis prolixiora videbantur, quam ut tyronibus promiscue proponerentur, & inprimis Algebra in parte quarta prolixius explicata eorum captui non convenire, nec ad omnium palatum esse judicaretur; desiderio aliorum satisfacturus eadem in Compendium redegi & A. 1713. Halæ in 8. edidi (2. Alph. Tabb. æn. 45). Continetur in hoc compendio Commentatio de Methodo mathematica, Arithmetica, Geometria, Trigonometria plana, Mechanica, Hydrostatica, Aërometria, Hydraulica, Optica, Catoptrica, Dioptrica, Perspectiva, Astronomia, Geographia, Chronologia, Pyrotechnia, Architectura militaris & civilis, Algebra speciosa ad exempla arithmetica applicata. Editio sexta prodiit Halæ A. 1737.

§. 13. Quid me impulerit, ut Elementa Matheseos Latina a Germanicis diversa ederem, in præfatione Tomi primi exposui. An finem mihi propositum fuerim consecutus, aliorum esto judicium. Editio altera, quæ ab Anno 1730. prodiit & cui nunc Tomo quinto colophonem imponimus, recusa est Genevæ in 4. ab anno 1732. forma majore. Enimvero editionem nitidissimam & ab omnibus mendis expurgatam Veronæ parat *Josephus Sererius*, Medicinæ ac Philosophiæ Doctor, in omni Mathesi ac Philosophia versatissimus. Ad commodiorem usum figuræ ipsi textui inseruntur. Eandem operam iisdem impendit, quam orbi erudito in recudendis operibus nostris philosophicis Latinis abunde comprobavit. Ut Gallorum commodis inserviat *Joannes Theobaldus Bion*, Elementa hæc nostra quoad substantiam in linguam Gallicam transfundit satis ingenue ac feliciter, quemadmodum ex speci-

ſpeciminibus ad me transmiſſis intellexi.

§. 14. Ab eo tempore, ex quo Elementa Matheſeos tam patrio, quam Latino ſermone conſcripta edidi, plura in Germania paſſim prodiere Compendia Matheſeos, Noſtris ſatis nota & in bibliopoliis noſtris ubivis obvia. Sed de ſingulis dicere nimis foret prolixum & a præſenti inſtituto alienum.

§. 15. *Conradus Daſipodius*, Mathematum Profeſſor Argentoratenſis, Argentorati an. 1573. edidit Dictionarium Mathematicum Græce atque Latine conſcriptum in 8. (plag. 12.) Continentur in eo definitiones ac diviſiones Arithmeticæ, Logiſticæ, Geometriæ, Geodeſiæ, Aſtronomiæ & Harmonicæ. Non ordinem alphabeti ſequitur Autor, ſed diſciplinarum. In iis etiam diſciplinis, quas attingit, opera ejus eſt admodum imperfecta.

§. 16. *Hieronymi Vitalis*, Capuani, Clerici Regularis Theatini, Lexicon Mathematicum Pariſiis 1668. in 8. prodiit (1. Alph. 18. plag.) In eo tamen nonniſi voces Geometriæ elementaris, Aſtronomiæ & Aſtrologiæ explicantur. Idem A. 1690. Romæ in 4. recuſum & ex omnibus fere diſciplinis Mathematicis inſigniter auctum, multis inutilibus paſſim reſciſſis. (6. Alph. 3. plag.)

§. 17. *Ozanam* ſupra laudatus Lexicon Mathematicum ſecundum ordinem diſciplinarum diſpoſuit, editum Pariſiis An. 1691. in 4. (4. Alph.) Explicat Cl. Autor terminos Arithmeticæ, Algebræ, Geometriæ ſpeculativæ & practicæ, Coſmographiæ, Aſtronomiæ, Navigationis, Geographiæ tum aſtronomicæ, tum naturalis, tum hiſtoricæ, Opticæ, Perſpectivæ, Gnomonicæ, Catoptricæ, Dioptricæ, Artis pictoriæ, Mechanicæ, Staticæ, Hydroſtaticæ, Architecturæ civilis & militaris, atque Muſicæ.

§. 18. *J. Harris* in Lexico Technico magno, cujus Tomus primus Londini 1704. alter ibidem 1710. in fol. prodiit, præter alios terminos Artium & Scientiarum non modo Methematicos terminos, verum etiam res ipſas explicat. Titulus operis eſt: *An univerſal engliſh Dictionary of Arts and Sciences*, ex-

explaining not only the Terms of Arts, but them selves.

§. 19. *E. Chambres* Londini A. 1728. duobus Voluminibus in fol. forma majore edidit Lexicon Universale artium & scientiarum sub Titulo: *Cyclopædia, or an Universal Dictionary of Arts and sciences* ordine alphabetico conscriptum (Alph. 22. plag. 8. Tabb. æn. 28.) In eo etiam explicantur, quæ ad Mathesin spectant, ita ut Lexici Mathematici nomen simul tueatur. Mathematica pleraque ex Elementis hisce nostris petuntur, quæ etiam passim citat.

§. 20. A. 1716. lucem publicam adspexit Lipsiæ in 8. forma majore Lexicon Mathematicum, (2. Alph. 5. plag. cum multis figuris textui insertis), quod nonnullorum precibus fatigatus idiomate vernaculo secundum ordinem alphabeticum ita digessi, ut non modo singulos terminos in disciplinis Mathematicis passim obvios explicuerim, verum etiam Autores citaverim, qui vel primi res iisdem notatas invenerunt, vel optima ratione exposuerunt, ac præterea præcipua dogmata recensuerim, singulorumque usum indicaverim, ut scilicet usui sit illis, qui vel historicam Matheseos cognitionem affectant, vel in lectione Autorum ob voces non intellectas hærent, vel denique ducem in cognoscendo aliquo argumento desiderant. In Italicum idioma idem transtulit *Josephus Sererius* supra laudatus (§. 13.)

§. 21. Cum bibliopola novam hujus Lexici editionem dare vellet, a me desideravit, ut idem ad mentem ipsius reformarem aut alteri hunc laborem committerem, sed paterer, ut nomen meum eidem præfigeretur. Quoniam non possideo calamum venalem, insulso petito deferre nec volui, nec potui. Bibliopola itaque, cum Lexicon istud diu desideraretur, tandem aliud edidit A. 1734. (2. Alph. Tabb. æn. 26), de quo judicium meum lubens suspendo. Sed quia vulgo pro meo Lexico venditur ac emitur; monendus est Lector, me istud pro meo non agnoscere, nec mea facere, quæ in eodem immutata. Præfationem quoque, quæ eidem præfigitur, diversam esse ab ea, quæ a me profecta fuerat, ipsa collatio utriusque prodit. Ne tamen abusui nominis mei locus daretur; Autor

Autor ejus nomen suum præfigere debuisset.

§. 22. In gratiam eorum, qui castra sequuntur, Lexicon militare, pyrotechnicum & navale conscripsit *Joannes Ludolphus* Fäsch/ quod Dresdæ A. 1735. in 8. forma majore (2. Alph. 8. plag. Tabb. æn. 21.) prodiit sub Titulo: Kriegs= *Ingenieur-Artillerie-* und See= *Lexicon.* Explicantur in iis termini, qui in Architectura & re militari, Pyrotechnia & Architectura navali ac navigatione occurrunt, figurisque æri incisis, ubi opus est, illustrantur.

§. 23. *Simon Stevinus* varia opera Mathematica conscripsit, quæ sub titulo: Les Oeuvres Mathematiques de *Simon Stevin* de Bruges Lugduni Batavorum in fol. publicavit A. 1634. *Albertus Girardus* (1. Alph. 19. plag.) Continentur in iisdem 1. Arithmetica tam rationalium, quam irrationalium cum regulis Algebræ; 2. Sex libri *Diophanti Alexandrini*, quorum quatuor priores opera *Stevini*, duo posteriores a *Girardo* traducti, 3. Usurarum computus, Logistica decimalis & incommensurabilium doctrina, ubi simul Elementum *Euclidis* decimum illustratur; 4. Trigonometria plana & sphærica, 5. Geographia, 6. Astronomia, 7. Geometria practica, 8. Statica, 9. Optica, 10. Castrametatio, 11. Ratio muniendi per cataractas, 12, Architectura militaris. Autor & in theoria, & in praxi cum laude versatus.

§. 24. *Christophori Clavii*, Bambergensis, e Societate Jesu, Opera Mathematica in quinque Tomos distributa, & ab Autore ipso correcta plurimisque locis aucta prodiere Moguntiæ An. 1612. in fol. (40. Alph. 9. plag.) Tomus primus complectitur XVI. Elementa *Euclidis* & Libros tres Sphæricorum *Theodosii* cum Commentariis *Clavii* in utrumque Autorem, Sinuum Tangentium & Secantium rationem & Canones; Tractationem triangulorum, tum rectilineorum, tum Sphæricorum: Tomus secundus Geometriam practicam, Arithmeticam & Algebram, una cum refutatione Cyclometriæ *Josephi Scaligeri*: Tomus tertius *Joannis de Sacro Bosco* libellum de Sphæra cum prolixo Commentario *Clavii* in eundem atque libros tres de Astro-

Astrolabio: Tomus quartus Gnomonicam, Fabricam & usum instrumenti ad horologiorum descriptionem peropportuni; Horologiorum novam descriptionem, Compendium brevissimum describendorum horologiorum horizontalium ac declinantium, cum notis in idem: Tomus denique quintus Romani Calendarii a *Gregorio* XIII. P. M. restituti explicationem, Novi Calendarii Romani Apologiam adversus Michaëlem Mæstlinum & Appendicem ad Novi Calendarii Romani Apologiam, in qua *Josephus Scaliger*, *Georgius Germanus* & *Franciscus Vieta*, qui Calendarium aliter instaurandum esse contenderunt, seorsim singuli confutantur. *Clavius* instar veterum, *Euclidis, Archimedis* & *Apollonii*, demonstrator rigidus.

§. 25. *Francisci Vietæ*, Galli, Opera Mathematica in unum volumen congesta Lugduni Batavorum in fol. A. 1646. edidit *Franciscus a Schooten*, Leydensis, in Academia patria Mathematum Professor (6. Alph.) Continentur in iisdem 1. Isagoge in Artem analyticam, 2. ad Logisticen Speciosam Notæ priores, 3. Zeteticorum libri quinque, 4. de æquationum recognitione & emendatione Tractatus duo, 5. de numerosa potestatum ad exegesin resolutione, 6. Effectionum Geometricarum Canonica recensio, 7. Supplementum Geometriæ, 8. Pseudo-Mesolabum & alia quædam adjuncta capitula, 9. Theoremata ad sectiones angulares, 10. Responsum ad problema, quod omnibus Mathematicis totius orbis construendum proposuit *Adrianus Romanus*, 11. Apollonius Gallus, 12. Variorum de rebus Mathematicis Responsorum Liber VIII. 13. Munimen adversus nova Cyclometrica, 14. Ratio Calendarii vere Gregoriani, 15. Calendarium Gregorianum perpetuum, 16. Adversus Christophorum Clavium Expostulatio.

§. 26. *Philippi Lansbergii* Opera omnia prodiere, Middelburgi in Selandia A. 1663. in fol. (10. Alph.) Continentur in iisdem 1. Triangulorum Geometriæ libri quatuor, 2. Cyclometriæ novæ libri duo, 3. Uranometriæ libri tres, 4. in quadrantem tum Astronomicum, tum Geometricum, nec non in

Astro-

Astrolabium Introductio, 5. Horologiographia plana, 6. Commentationes in motum Terræ diurnum & annuum, & in verum adspectabilis cœli typum, 7. Tabulæ motuum cœlestium perpetuæ, cum novis motuum cœlestium Theoricis & Astronomicarum Observationum thesauro, 8. Chronologiæ Sacræ libri tres, in quibus annorum mundi series ab orbe condito ad eversa per Romanos Hierosolyma nova methodo ostenditur.

§. 27. In Opusculis Mathematicis *Guilielmi Oughtred*, quondam Collegii Regalis in Cantabrigiensi Academia Socii, Oxonii 1677. in 8. editis, habentur 1. Institutiones Mechanicæ, 2. De variis corporum generibus gravitate & magnitudine comparatis Tractatus ex Marini Ghetaldi Archimede promoto excerptus, 3. Tractatus alius de Avtomatis 4. quæstionum *Diophanti Alexandrini* Libri tres 5. de triangulis planis rectangulis, 6. de divisione superficierum Tractatus, 7. Musicæ Elementa, 8. Architectura militaris, 9. Tractatus de sectionibus angularibus (15. plag.)

§. 28. *Andreæ Tacquet*, Antverpiensis, e Societate Jesu, Opera Mathematica Antverpiæ A. 1669. in fol. publicavit *Simon Laurentius Veteranus* ex Comitibus *Montis Calvi*, e Societate Jesu (9. Alph. 15. plag. Tab. æn. 88.) Extant in iisdem 1. Astronomiæ libri octo cum Appendice, 2. Geometriæ practicæ libri tres, 3. Opticæ libri tres, 4. Catoptricæ libri tres, 5. Architecturæ militaris liber unus, 6. Cylindricorum & Annularium libri quinque, 7. Dissertatio Physico-Mathematica de Circulorum volutionibus.

§. 29. A. 1692. prodiit Parisiis in 12. Synopsis Tractatuum Mathematicorum, qui necessarii esse possunt Nobilibus terra marive operam militiæ daturis, auctore P. *Hosto*, e Societate Jesu, Mathematum Professore Tulonensi. Titulus operis: *Recueil des Traités de Mathematique, qui peuvent être necessaires à un Gentilhomme, pour servir par mer, ou par terre.* (Plag. 26 Tab. æn. 67.) Constat hæc synopsis tribus Tomis, quorum primus Elementa *Euclidis*, Arithmeticam & Trigonometriam; secundus Geometriam practicam, Sphæricam, Me-

Mechanicam, Artem muniendi & Pyrotechniam; tertius denique Artem navigandi complectitur.

§. 30. A. 1693. munificentia *Ludovici* Magni, Galliarum Regis, Parisiis in fol. reg. lucem adspexerunt Veterum Mathematicorum Opera, Græce & Latine pleraque tum primum edita. (4. Alph. Fig. æn. 174.) Continentur in istorum numero *Athenæus* de machinis; *Apollodori* Poliorcetica; *Philonis* liber quartus de telorum constructione, & quintus de rationibus tolerandæ instituendæque obsidionis; *Biton* de constructione machinarum bellicarum & catapultarum; *Heronis* Belopoeeca, spiritalia & Avtomata *Julii Africani* Cesti; Anonymi liber de toleranda obsidione. Adduntur *Bernardini Baldi* scholia in *Heronis* Belopoeecam & nonnulla alia.

§. 31. Ex eadem typographia Regia A. 1693. in fol. prodiere Varia Opera Mathematica & Physica, Autoribus Academicis Regiis scientiarum. Titulus operis: *Divers ouvrages de Mathematique & de Physique par Messieurs de l' Academie Royale des sciences* (*Plag.* 108.) Reperies in hoc Volumnie 1. *Frenicli* Tractatum de Exclusionibus, 2. ejusdem compendium Combinationum, 3. ejusdem Tractatus de quadratis magicis; 4. *Robervalli* observationes super compositionem motuum, quam ad tangentes curvarum ducendas applicat; 5. Delineatio libri Mechanici de motu composito; 6. de recognitione æquationum liber; 7. Tractatus de indivisibilibus; 8. Liber de Trochoide; 9. epistola ad *Mersennum* de *Torricellii* quibusdam propositionibus; 10. *Torricellii* litteræ ad *Robervallium* missæ occasione præcedentis epistolæ; 11. *Robervallii* epistola, qua sua sibi inventa contra *Torricellium* aliosque Italos vindicat; 12. *Hugenii* opusculum de causa gravitatis; 13. Æquilibrii in libra demonstratio; 14. Potentiarum fila funesque trahentium vires; 15. Nova vis movens ope pulveris pyrii & aëris; 16. Constructio ingeniosa loci ad hyperbolam per asymptotos; 17. Regula *Fermatii* de maximis & minimis demonstrata & ad mirabilem brevitatem perducta; 18. Problema Opticum sive 39.

Prop.

Prop. lib. 5. *Alhazeni*, aut 22. lib. 6. *Vitellionis* constructum. 19. *Picardi* praxis magnorum sciatericorum per calculum absolvenda; 20. Schediasma de mensuris; 21. Mensuræ ab originalibus desumptæ; 22. de mensura liquidorum & aridorum; 23. de proportione aquarum effluentium; 24. experimenta circa aquas effluentes, 25. Fragmenta dioptrica de vitrorum potissimum focis determinandis; 26. DN. *Auzout* Tractatus de micrometro; 27. *Mariotti* Regulæ de aquæ jactibus. 28. *Ræmeri* Regulæ de crassitie & viribus tuborum in aquæductibus secundum diversas fontium altitudines diversasque tuborum diametros; 29. ejusdem experimenta circa altitudines & amplitudines projectionis corporum gravium.

§. 32. *Francisci Maurolyci*, Abbatis Messanensis, opuscula Mathematica, Venetiis 1575. in 4. edita (1. Alph. 18½ plag.) complectuntur 1. de sphæra librum unum, in quo termini in hac doctrina obvii explicantur: 2. Computum ecclesiasticum: 3. Tractatum instrumentorum Astronomicorum, nempe de Quadrato Geometrico, Quadrante, Astrolabio, Armillis, Sphæra Solida: 4. De lineis horariis Tractatum Gnomonicum: 5. Propositiones libri decimi tertii Elementorum *Euclidis*: 6. Musicæ traditiones, continentes epitomen Musicæ *Boëtianæ* & paucas de Musica regulas: 7. de lineis horariis libros tres, Gnomonicæ uberiora fundamenta exponentes: 8. Arithmeticorum libros duos.

§. 33. Opuscula Mathematica *Thomæ Cevæ*, e Societate Jesu, Mediolani 1699. in 8. typis descripta (plag. 4.), constant ex nonnullis demonstrationibus de ratione æquilibrii, de sectione Geometrico-harmonica & arithmetica; de sectione anguli rectilinei in quotvis partes tum organice, tum per quasdam lineas curvas, Cycloides scilicet anomalas; de parabola consideranda instar ellipsis maximæ atque instar hyperbolæ habentis transversam diametrum infinitam; de lineis phantasticis & flexilineis. Adduntur quædam excerpta ex *Vincentii Viviani* Exercitatione mathematica, cui titulus *Formatione di tutti cieli*, & ex idea universali Matheseos Cl. *Ozanami*.

§. 34. *Johannis Wallisii*, SS. Theol. Doct. & Geometriæ Professoris Saviliani in Academia Oxoniensi celeberrimi, Opera Mathematica tribus voluminibus prostant. Volumen primum editum Oxonii A. 1665. in fol. (11. Alph. 17. plag.) continet 1. Orationem inauguralem A. 1649. d. ultimo Octobris habitam, cum publicam Professionem auspicaretur: 2. Mathesin universalem seu Arithmeticum opus integrum, tam philologice, quam mathematice traditum: 3. Tractatum elenchticum adversus Marci Meibomii de Proportionibus Dialogum: 4. Tractatum de Sectionibus Conicis nova methodo expositis: 5. Arithmeticam infinitorum: 6. Tractatus duos de Cycloide & Cissoide ac corporibus inde genitis, & de curvarum tum linearum εὐθυνώσει, tum superficierum πλατυσμῷ: 7. observationem eclipsis solaris A. 1654. d. 2. Aug. Oxonii visæ: 8. Mechanicam, sive de motu Tractatum Geometricum. Volumen secundum, quod ibidem An. 1693. in fol. prodiit. (10. Alph. 17. plag.) complectitur, 1. Tractatum Historicum & practicum de Algebra, 2. de combinationibus, alternationibus & partibus aliquotis, 3. de Sectionibus angularibus, 4. de angulo contactus & semicirculi, 5. defensionem ejusdem Tractatus; 6. disceptationem Geometricam de postulato quinto & quinta definitione lib. 6. *Euclidis*, 7. Cono-Cuneum, seu Corpus partim Conum, partim Cuneum repræsentans Geometrice consideratum, 8. de gravitate & gravitatione disquisitionem Geometricam, 9. de æstu maris hypothesin novam, 10. Commercium epistolicum de quæstionibus quibusdam Mathematicis, 11. *Joh. Caswelli* Trigonometriam planam & Sphæricam. In tertium denique volumen, quod 1699. in fol. lucem adspexit (14. Alph.), congesta sunt 1. *Claudii Ptolemæi*, *Porphyrii* & *Manuelis Briennii* Harmonica; 2. *Archimedis* Arenarius & dimensio circuli cum *Eutocii* Ascalonitæ in hanc Commentario; 3. *Aristarchi Samii* liber de magnitudinibus & distantiis Solis & Lunæ; 4. Fragmentum libri secundi Collectionis Mathematicæ *Pappi Alexandrini* desideratum; 5. Collectio epistolarum quarundam *Collinii*, *Leib-*

Leibnitii, *Newtoni*, *Walliisi*, *Flamstedii* rem mathematicam spectantium; 6. opera quædam miscellanea, nimirum Tractatus de loquela, Grammatica linguæ Anglicanæ, Institutio Logica ad communes usus accommodata, Mens sobria serio commendata, in concione latine habita, Epistolæ ad Titum expositio aliaque nonnulla Theologica, quæ hujus non sunt loci.

§. 35. *Christianus Hugenius*, Mathematicus summus, multa præclara conscripsit opera, de quibus suo loco dicemus. Post obitum ejus junctim prodierunt quatuor voluminibus in 4. sub Titulo Operum variorum, & reliquorum. Opera varia lucem adspexerunt Lugduni Batavorum A. 1724. duobus voluminibus; reliqua Amstelodami A. 1728. duobus itidem voluminibus. Volumen primum variorum continet 1. Horologium, 2. Horologium Oscillatorium, sive de motu pendulorum ad horologia aptato Demonstrationes Geometricas, 3. brevem Institutionem de usu horologiorum ad inveniendas longitudines, 4. de Hugeniana centri oscillationis determinatione Controversiam, 5. Machinas quasdam & varia circa Mechanicam. (Alph. 1. plag. 17. Tabb. æn. 33.); secudum vero 1. Theoremata de Quadratura Hyperboles, Ellipsis & Circuli ex dato portionum gravitatis centro, quibus subjuncta est Ἐξέτασις Cyclometriæ Cl. Viri *Gregorii a S. Vincentio* editæ A. 1647. 2. Epistolam ad Cl. V. *Franciscum Xaverium Ainscom* S. J. qua diluuntur ea, quibus Ἐξέτασις Cyclometriæ *Gregorii a S. Vincentio* impugnata fuit, 3. De Circuli magnitudine Inventa & problematum quorundam illustrium constructiones, 4. de Circuli & Hyperbolæ Quadratura Controversiam, 5. Geometrica varia 6. de Saturni Luna Observationem novam, 7. Systema Saturnium, 8. *Eustachii de Divinis Septempedani* brevem annotationem in systema Saturnium *Christiani Hugenii*, 8. brevem assertionem systematis Saturnii sui, 9. de Saturni Annulo observationes, 10. Cosmotheoron, sive de Terris cœlestibus earumque ornatu conjecturas, 11. Ratiocinia in Ludo aleæ, 12. Novum Cyclum harmonicum, 13. Varia de Optica,

tica, 14. Experimenta physica (Alph. 2. plag. 14. Tabb. æn. 23.) In Reliquorum volumine primo extant 1. Tractatus de Lumine & Dissertatio de causa gravitatis, 2. Geometrica demonstratio Theorematum Hugenianorum circa Logisticam, *Guidonis Grandi*, 3. ejusdem *Grandi* epistola Geometrica ad V.C. *Thomam Cevam* e Societate Jesu (Alph. 1. plag. 18. Tabb. æn. 15.) In altero autem comprehenduntur opera posthuma, nimirum 1. Dioptrica, 2. Commentarii de poliendis vitris, 3. Dissertatio de Coronis & Parheliis, 4. Tractatus de motu corporum ex percussione 5. Tractatus de vi centrifuga, 6. Descriptio Automati Planetarii.(Alph. 2. plag. 6. Tab. æn. 43.) De præclaris hisce operibus specialia monebimus suoloco.

§. 36. Inprimis hic commemoranda sunt Acta Societatum Scientiarum, quæ nostro ævo ad promovendam Mathesin præsertim atque Physicam fuere institutæ. Pertinent huc Acta Philosophica Societatis Regiæ Anglicanæ, quæ a Secretariis eduntur sub Titulo: *Philosophical Transactions Giving some account of the præsent undertakings, studies and labours of the ingenious in many considerable parts of the World* & quorum usque ad annum 1734. prostant volumina 38. De his singulis dicere ab instituto nostro alienum est. Sufficit itaque monuisse, quod in iis, contineantur plurima ad mathesin spectantia lectu dignissima iis, quibus curæ cordique est Scientiam Mathematicam ultra limites præsentes promovere. Anno 1705. *Johannes Lowthorp* Volumina 21, quæ usque ad Annum 1700. prodierunt, in epitomen redegit & in iis contenta per capita generalia disposuit. Lucem adspexit hoc opus sub Titulo: *The Philosophical Transactions and Collections to the end of the year 1700. abrid'g'd and dispos'd under general heads* tribus voluminibus Londini in 4. Volumine primo continentur Mathematica ad Geometriam, Arithmeticam, Algebram, Logarithmotechniam, Trigonometriam, Artem libellandi, Opticam, Astronomiam, Mechanicam, Acusticam, Hydrostatricam, Hydraulicam, Artem navigandi, Architecturam civilem & navalem, Perspectivam, Sculpturam, Artem

Artem pictoriam & Musicam spectantia. Constat. Alph. 4. plag. 4. Tabb. æn. 7. Specialius ad singulas Matheseos partes pertinentia recensentur in Actis Eruditorum, supplementorum Tom. IV. sect. 7. p. 290. & seqq. Epitomen hanc Actorum Philosophicorum ab A. 1700. usque ad A. 1720. continuavit *Benjaminus Motte* & ab A. 1720. usque ad A. 1732. *Reidius* & *Johannes Gray.* Continuationis primæ Volumen I. quod Londini 1721. in 4. prodiit (Alph. 3. plag. 18 Tabb. æn. 18.) Mathematica, Anatomica, Medica; secundæ vero Voluminis I. pars prima, quæ Londini 1733. in 4. lucem adspexit, (Alph. 2. plag. 7. Tab. æn. 12.) Mathematica sola continet. Illa specialius recensentur in Actis Eruditorum A. 1723. p. 89. & seqq. hæc vero in Novis Actis Eruditorum An. 1735. p. 125. Cum lingua Anglica sit minus trita & libri in Anglia impressi in aliis terris difficulter haberi possint; optandum foret, ut in Linguam Latinam, aut minimum Gallicam verterentur. Equidem cum prima volumina in linguam Latinam translata superiori seculo Lipsiæ ederentur, nullos fere invenerunt emtores, ut versio continuata non fuerit: non tamen dubitandum est, fore ut nostro ævo, ubi Mathesis & Physica plures numerat cultores, majore applausu excipiantur.

§. 37. Ab Anno 1699. quo Academia Regia scientiarum Parisiis florens, instaurato singulorum annorum Historiam Gallico idiomate conscripsit ejusdem Secretarius *Fontenellius*, quibus accedunt Commentarii Mathematici & Physici. Titulus cujuslibet Voluminis est: *Histoire de l' Academie Royale des sciences avec les Memoires de Mathématique & de Physique.* Imprimitur Parisiis in 4. forma majore & recuditur in Batavia charactere minore, ut leviori pretio comparari possint hæc opera. In singulis voluminibus continentur, quæ ad Physicam generalem, ad Anatomiam, Chimiam, Botanicam, Geometriam, Astronomiam, Geographiam, Chronologiam & Mechanicam spectant, siquidem ad singulas hasce classes referendum schediasmata a Membris fuerint exhibita, & sub finem Historiæ subjiciuntur Elogia Membrorum, quæ isto anno, cujus

cujus historia exhibetur, diem supremum obierunt. Opus præclarum & omnibus Matheseos ac Physicæ cultoribus nunquam satis commendandum continuatur in hodiernum usque diem. Prolixum nimis foret de tot voluminibus sigillatim dicere & in iis contenta recensere. Adeat Diaria Eruditorum, in quibus eadem recensentur, qui hoc desiderat. Enimvero ne deessent ea, quæ ante instaurationem acta fuere, recentius edere libuit Collectionem Commentariorum Academiæ Regiæ scientiarum ab An. 1666. quo fundata fuit, usque ad An. 1699. eadem forma, qua nunc pro singulis annis Historia cum suis commentariis edi solet, Tomis undecim. Tomo primo continetur Historia a prima origine An. 1666. usque ad An. 1686. secundo Historia ab An. 1686. usque ad A. 1699. tertio Commentarii in usum Historiæ naturalis Animalium autore *Perraltio*; Quarto Dissertatio de principiis mixtorum naturalium *du Clos*, observationes ejusdem de aquis mineralibus plurium Provinciarum Galliæ, Commentarii *Dodarti* in usum Historiæ plantarum, ejusdem descriptiones novarum quarundam plantarum, *de Beze* e S. J. Descriptiones quarundam arborum & plantarum exoticarum; quinto diversa opera *Freniclii de Bessy*, scilicet Methodus inveniendi solutionem problematum per Exclusiones, Compendium Combinationum, Tractatus de Triangulis rectangulis in Numeris, Tractatus de Quadratis magicis, Tabula generalis Quadratorum magicorum & *Blondelli* Resolutio quatuor problematum principum Architecturæ; Sexto diversa opera *Robervallii*, scilicet observationes de compositione motuum, & de modo inveniendi tangentes curvarum, Idea libri Mechanicæ de motibus compositis, Tractatus de recognitione æquationum, de geometrica planarum & cubicarum æquationum resolutione, de Indivisibilibus, de Trachoide ejusque spatio, epistola *Ægidii Personeri* de *Roberval* ad Cl. P. *Mersennum*, epistola *Evangelistæ Torricellii* ad *Robervallium*, & Epistola *Robervallii* ad *Torricellium*; præterea diversa opera *Picardi*, nimirum Praxis horologiorum solarium majorum per cal-

calculum, differtatio de Menfuris, una cum *Auzouti* comparatione menfurarum, de menfura liquidorum & aridorum, Experimenta circa aquas effluentes, fragmenta dioptrica, Tractatus de libellatione, *Roemeri* de craffitie & viribus tuborum in aquæductibus, fecundum diverfas fontium altitudines diverfasque tuborum diametros & ejusdem Experimenta circa altitudines & amplitudines projectionis corporum gravium, inftituta cum argento vivo; feptimo Tractatus & obfervationes aftronomicæ atq; phyficæ factæ in pluribus itineribus a Membris Academiæ & pluribus, quibus commercium literarium cum Academia fuit: octavo diverfa opera *Caffini*, fcilicet de Origine & progreffu Aftronomiæ & de ejus ufu in Geographia & Navigatione, Elementa Aftronomiæ recttificata ex obfervationibus *Richerii* factis in Infula Cayennæ; Luminis cœleftis, quod in Zodiaco apparet, detectio; Regulæ Aftronomiæ Indorum computandi motus Solis & Lunæ, Reflexiones de Chronologia Sinarum, de Infula *Taprobane*, Hypothefes & Tabulæ Satellitum Jovis ex obfervationibus recentioribus reformatæ; Tabularum Satellitum Jovis ufus præcipui; nono diverfa opera *de la Hire*, fcilicet Tractatus de Mechanica, Tractatus de Epicycloidibus & earum ufu in Mechanica, Explicatio præcipuorum effectuum glaciei & frigoris, Differtatio de differentia fonorum chordæ & Tubæ Marinæ, Tractatus de differentibus accidentibus vifus, Tractatus de Praxi Picturæ; decimo commentarii Mathematici & Phyfici Academiæ fcientiarum Annorum 1692. 1693. &c. & Commentarii Mathematici & Phyfici Membrorum Academiæ fcientiarum ex diverfis Diariis Eruditorum extracti; Undecimo denique Analyfis generalis feu Methodi novæ refolvendi problemata omnis generis & omnis gradus in infinitum, autore *de Lagny*. Volumen feptimum in duas partes dividitur, quarum utraque juftum volumen conftituit & multa continet, quæ figillatim recenfere nimis prolixum foret.

§. 38. Anno 1710. Berolini in 4. prodierunt Mifcellanea

Berolinensia ad incrementum scientiarum ex scriptis Societati Regiæ exhibitis edita (Alph. 2. plag. 6. Tabb. æn. 31.) Dividitur in tres partes, quarum prima literaria, secunda physica & medica, tertia Mathematica & Mechanica continet. Tertia mole sua longe superat duas priores. Hæc Miscellanea deinceps continuata fuere ac in posterum continuabuntur. Continuatio prima lucem adspexit Berolini An. 1723. in 4. (Alph. 1. plag. 2. Tabb. æn. 8.), secunda ibidem A. 1727. in 4. (Alph. 1. plag. 21. Tabb. æn. 10.), tertia sub Titulo Tomi quarti ibidem A. 1734. in 4. (Alph. 2. plag. Tabb. æn. 11.)

§. 39. Academia Scientiarum Petropolitana quinque ab Anno 1728. usque ad A. 1738. Petropoli edidit Volumnia in 4. charta augusta sub Titulo: *Commentarii Academiæ Scientiarum Imperialis Petropolitanæ* pro annis 1726. 1727. 1728. 1729. 1730. & 1631. Sunt vero horum Commentariorum tres classes, nimirum Mathematica, Physica & Historica. Quæ in classe mathematica continentur, hujus sunt loci & Mathesin inprimis sublimiorem multum promovent, quemadmodum suo loco clarius edisseremus. Cum enim hoc opus continuandum sit in posterum, ut de singulis in classe mathematica cujusvis voluminis contenta sigillatim dicamus præsentis instituti ratio non fert.

§. 40. Denique hic quoque commemorandi sunt *de Bononiensi scientiarum & Artium Instituto atque Academia Commentarii*, qui Bononiæ A. 1731. in 4. charta itidem augusta lucem publicam adspexerunt (Alph. 3. plag. 13. Tab. æn. 9.). Præfationis loco præmittitur Historia Bononiensis scientiarum Instituti: in Commentariis vero præter ea, quæ ad Historiam naturæ spectant, atque Chymica, anatomica, medica, physica, continentur etiam mechanica, analytica, geographica, astronomica & meteorologica. Subjunguntur iisdem opuscula varia quorundam Academicorum, inter quæ ad Mathesin spectant *Dominici Guilielmini* epistola hydrostatica, *Eustachii Manfredii* de meridianæ lineæ, quæ in D. *Petronii* exstat, dimensione

&

& de novissimis circa fixarum siderum errores observationibus, *Gabrielis Manfredii* de formulis quibusdam integrandis, *Jacobi Riccati* virium elasticarum leges, *Joannis Rizetti* de corporum collisionibus & inde orta motuum communicatione, & *Francisci Mariæ Zanotti* de motu composito & de reflexionibus globi in plano rectangulo.

§. 41. Ad præsentem scriptorum classem etiam referimus *Casparis Schotti*, supra laudati, Organon Mathematicum & Magiam Universalem Naturæ & Artis. Organon Mathematicum editum est Herbipoli A. 1688. in 4. (5. Alph. Fig. æn. 1. Alph. 7. plag.). Ope tabularum quarundam Mathematicarum problemata Arithmetica, Geometrica, Architecturæ militaris, Chronologiæ, Gnomonicæ, Astronomiæ, Astrologiæ judiciariæ, Steganographiæ & Musicæ facilia redduntur tyronibus. Magia in quatuor partes divisa Bambergæ 1677. in 4. lucem adspexit (14. Alph. Tab. æn. 89.) In Tomo primo continentur Optica, Catoptrica & dioptrica; in secundo Acustica & Musica; in tertio Mechanica, Statica, Hydrostatica, Hydrotechnica, Aërotechnica, nec non Arithmetica, Geometrica: in quarto deniq; Cryptographica, Pyrotechnica, Magnetica, Sympathica, Medica, divinatoria, Physiognomica & Chiromantica.

§. 42. In eundem censum veniunt *Danielis Schwenteri* Mathematum & Linguarum orientalium in Academia Altorffina Professor, Deliciæ Physico-Mathematicæ, Norimbergæ 1636. in 4. primum editæ (3. Alph. 4. plag.) & postea a *Philippo Harsdorffero* duobus Tomis auctæ (10. Alph. 8. plag.) Continentur in iisdem ludicra varia, nonnulla etiam utilia, ex Arithmetica, Geometria, Stereometria, Musica, Optica, Catoptrica, Astronomia, Astrologia, Gnomonica & Thaumatopoëtica, Statica, Mechanica, Pyrobolia, Pneumatica, Hydraulica, Arte scriptoria, Architectura & Chymia.

§. 43. Majorem selectum in simili scripto fecit *Ozanam*, quod sub titulo *Recreations de Mathematique & de Physique* Parisiis 1696. in 8. reg. edidit (3. Alph. 7. pl. Tabb. æn. 44.) Recusæ sunt hæ Recreationes multo

to auctiores quatuor Tomis ibidem A. 1725. in 8. forma majore, (Alph. 5. plag. 6. Tabb. æn. 132). Tomus primus continet problemata Arithmeticæ, Geometricæ & Opticæ; secundus problemata Gnomonicæ, Cosmographiæ, Mechanicæ; tertius problemata Pyrotechniæ & Physicæ, & Tractatum de Horologiis elementaribus *Dominici Martinelli* ex Italico in Gallicum idioma translatum. In quarto denique Tomo agitur de Phosphoris naturalibus & artificalibus & lampadibus perpetuis, atque præstigiatorum artificia una cum aliis ludicris explicantur.

CAPUT II.

De

ARITHMETICA.

§. 1.

Arithmetica veterum ab Arithmetica hodierna prorsus erat diversa. Veteres enim in eadem nonnisi varias numerorum divisiones considerabant. Videre hoc est ex duobus Arithmetices libris, quos tertio Urbis conditæ seculo consignavit *Nicomachus*, editis Parisiis 1538. Eum sequitur presso pede sexto a Christo nato seculo *Anitius Manlius Severinus Boëthius* in Arithmetica sua.

§. 2. Compendium Arithmeticæ veterum composuit nono post Christum natum seculo *Psellus*, *a Guilielmo Xylandro* ex Græco idiomate in Latinum translatum, annotationibus auctum & Basileæ 1556. in 8. in lucem publicam emissum. Recentius simile Compendium conscripsit *Jodocus Willichius*, sub titulo: *Arithmeticæ libri tres* editum Argentorati 1540. in 8. (plag. 8.) Usum habet in Idea exemplari definitionum animis tyronum ingeneranda, ut præcepta Logicæ facilius comprehendant & ad divisionem rerum in sua genera & species intimius per-

perſpiciendam: de quo ſuo loco plura.

§. 3. Prolixius hoc Arithmeticæ genus illuſtrarunt duodecimo poſt Chriſtum natum ſeculo *Jordanus* in duodecim de Arithmetica libris & *Jacobus Faber Stapulenſis* in Commentario in eosdem A. 1480. edito.

§. 4. Arithmeticam theoreticam, quæ numerorum proprietates expendit, illuſtravit *Euclides* Elementorum libro VII. VIII. & IX. Sed de his elementis dicemus plura in ſequente capite.

§. 5. Exactam theoriam ad demonſtrandas operationes communes Arithmeticæ practicæ cum in numeris integris, tum fractis ſive vulgaribus, ſive ſexagenariis dedit *Barlaamus Monachus* in Logiſtica, quam Latine reddidit & ſcholiis illuſtratam Pariſiis An. 1600. in 4. edidit *Joannes Chamberus*, Collegii Etonenſis apud Anglos ſocius. (1. Alph. 3. plag.) Sed captum tyronum tranſcendit, quibus nimia accuratio inutilis, immo ridicula videtur.

§. 6. *Frater Lucas de Burgo S. Sepulchri*, Ordinis Minorum, Sacræ Theologiæ Magiſter, idiomate Italico An. 1523. edidit opus in fol. (6. Alph. 10. plag.) de Arithmetica & Geometria. Maxima operis pars Arithmeticæ impenditur & in ea non modo diviſiones numerorum ex *Nicomacho* & proprietates ex *Euclide* traduntur; verum etiam Algorithmus cum in integris, tum in fractis, una cum extractionibus radicum, regulis proportionum & progreſſionum, nec non regula falſi & Algebræ explicatur.

§. 7. *Michaël Stifelius*, Paſtor Eccleſiæ Holtzdorffianæ, An. 1544. in 4. edidit Arithmeticam integram (1. Alph. 13. plag.), in qua multa tradit de numerorum cum rationalium, tum irrationalium, immo etiam Coſſicorum praxi, quæ alibi fruſtra quæſiveris, ſed ſine demonſtrationibus.

§. 8. Arithmeticæ practicæ opus abſolutum anno 1556. dedit *Nicolaus Tartaglia*, Venetus, in duas partes diviſum, quarum prima arithmeticam practicam ad uſum vitæ humanæ applicatam, altera vero Algebræ fundamenta explicat.

§. 9. *Franciſcus Maurolycus* in ſuis Arithmeticæ libris ſupra lau-

laudatis (§. 32. C. 1.) doctrinam de numeris figuratis promovit & algorithmum cum extractionibus radicum atque aliis Arithmeticæ practicæ regulis rigorose demonstravit: Sed ejus demonstrationes non sunt ad cujusvis captum accommodatæ.

§. 10. *Georgius Henischius* in Arithmetica perfecta & demonstrata (Augustæ Vindelicorum 1609. in 4. 2. Alph. 6. plag.) omnem praxin de numero vulgari, Cossico & astronomico demonstrat, & id singulare habet, quod demonstrationes in syllogismos resolverit.

§. 11. *Andreas Tacquet* in Theoria & praxi Arithmetices sæpius recusa (e. gr. Amstelodami 1704. in 8. plag. 34. Tabb. 8.) elementa *Euclidis* Arithmethica facilius demonstrat & praxes arithmeticas suis quoque demonstrationibus munit. Unde non immerito commendatur hoc opus.

§. 12. Demonstrationes in Arithmetica practica etiam affert *Dechales* (§. 4. c. 1.) Sed negligunt *Clavius*, *Herigonius*, *Vincentius Leotaudus* e Societ. Jesu, qui Institutionum arithmeticarum libros quatuor composuit, *Schottus* & plerique alii (§. 5. & *seqq. cap. cit.*). *Wallisius* calculum litteralem cum numerorum algorithmo conjunxit, & illius ope regulas fractorum, proportionum & extractionum radicum demonstravit: ex quo compendium dedit *Eduardus Wells* sub titulo Elementorum Arithmeticæ, 1698. in 8. tyronibus Calculi utriusque commendandum.

§. 13. In Elementis Arithmeticæ non modo praxin, verum etiam theoriam demonstravi, præsertim theoriam de ratione Quantitatum. Ast in Elementis Germanicis dedi demonstrationes, ad captum tyronum magis compositas. Sunt vero eædem vere analyticæ, ex ipsa notione numeri deductæ: ex qua integram Arithmeticam practicam methodo analytica deduxi, ut ad meditandum formarentur ingenia studio Arithmeticæ.

§ 14. Omittimus Autores alios, qui solam praxin tradiderunt, quamvis ad usum communem commendari mereantur *Gemma Frisius* in Methodo facili Arithmeticæ practicæ (Vitebergæ 1544. in 8. plag. 11.), ex quo me puerum integram arith-

arithmeticam practicam, ipsam etiam extractionem radicum proprio Marte didicisse memini, & *Adrianus Metius* in Arithmetica duobus libris comprehensa (Hafniæ 1640. in 4.). Recentius regulam generalem Arithmeticæ resolvendi omnia problemata, quæ ratione nituntur, dedit *K. F. de Rees*, quæ ex idiomate Batavo in Germaniceam translata publici juris facta Gœttingæ An. 1739. in 8. (plag. 12.). Usui est illis, qui nulla theoria animum imbutum possident.

§. 15. *Samuel Morlandus* Londini An. 1673. in 12. (plag. 6½) idiomate Anglico emisit descriptionem duorum instrumentorum, quorum ope additio, subtractio & multiplicatio motu quorundam orbium absolvitur. Utrumque An. 1666. *Carolo* II. Regi exhibuit. Sed multo ingeniosiorem machinam Arithmeticam in juventute sua dudum invenit illustris *Leibnitius*, de qua in Miscellaneis Berolinensibus pag. 394. nonnulla leguntur. Aliam utut minus perfectam, ingeniosam tamen dedit Cl. *Joannes Polenus* in Miscellaneis Venetiis Anno 1709. in 4. (plag. 8. Tabb. 9.)

§. 16. Logisticam decimalem prolixe ac perspicue peculiari libro exposuit *Johannes Hartmannus Bayerus*, D. Medicinæ, An. 1619. Francof. ad Mœnum vernaculo idiomate in 4. edito (1. Alph. 6. plag.). Arithmeticam Logarithmicam vero optime explicuit in peculiari itidem volumine, de quo in inter scripta Trigonometrica plura dicemus, *Briggius*.

§. 17. De Arithmetica autem decimali inprimis commendari meretur libellus, quem sub Titulo: *A new and compleat Treatise of the Doctrine of fractions, vulgar and Decimal* Londini A. 1714. in 8. edidit *Samuel Cunn*, ubi omnia explicantur & exemplis illustrantur, quæ de usu fractionum decimalium tenenda sunt. Non inutilem operam sumeret, qui eundem in linguam Latinam, vel etiam Germanicam transferret. Nos theoriam harum fractionum, quantum ad praxin sufficit, exposuimus & demonstravimus Cap. 9. Elementorum Arithmeticæ. Hodie enim usus earum prorsus egregius est, ubi ex æquationibus alge-

algebraicis radices per approximationem eruendæ & series infinitæ ad communem usum aptandæ.

§. 18. Virgulas suas, quibus magnorum numerorum multiplicationem ac divisionem facilitavit, *Joannes Neperus*, Baro *Merchistonius*, *Scotus*, in Rhabdologia (Edinburgi 1617. in 12. plag. 6.) descripsit. *Johannes* vero *Georgius Herwart* ab *Hohenburg*, V. J. Doct. ex Assessore summi tribunalis imperatorii & Cancellario supremo Bavariæ Ducis ejusdem consiliarius intimus, Præses provinciæ Schvabæ & inclytorum utriusque Bavariæ Statuum Cancellarius, Monachii A. 1610. in fol. reg. evulgavit Tabulas Arithmeticas προσθαφαιρέσεως universales, quarum subsidio numerus quilibet ex multiplicatione producendus per solam additionem & quotiens quilibet e divisione eliciendus per solam subtractionem etiam ab eo, qui Arithmetices non admodum sit gnarus, exacte & celeriter invenitur. (11. Alph. 9. plag.). *Neperum* imitatus *Samuel Reyherus*, Mathem. *Prof.* Kilonionsis, Bacillos sexagenales Kilonii 1688. in 4. publicavit, quorum ope Logistica sexagenaria facile exercetur: *de qua egimus c.* 10. *Arithmeticæ*.

CAPUT III.

DE

GEOMETRIA.

§. 1.

GEometria est vel theoretia, vel practica: theoretica vel elementaris, vel sublimior.

§. 2. Geometriam elementarem conscripsit *Euclides*, cujus Elementa a variis in lucem edita fuere. Textum Græcum cum versione Latina A. 1703. Oxoniæ in fol. (7. Alph. 17. plag.) sub titulo εὐκλείδου τὰ σωζόμενα, h. e. *Euclidis*, quæ supersunt, omnia, edidit *David Gre-*

Gregorius, Astronomiæ Professor Savilianus. Anno 1530. in priora sex Elementa Commentarium edidit *Orontius Finæus*, in quo mentem *Euclidis* tantummodo explicat, qualem etiam A. 1557. dedit *Jacobus Peletarius*. In elementa omnia 15. commentati sunt circa idem tempus *Nicolaus Tartaglea*, aliqua etiam de suo addens, & A. 1578. *Franciscus Flussates Candalla*, nobilis Gallus, qui ad elementa decimum sextum, septimum & octavum de solidorum corporum comparatione & inscriptionibus variis adjecit. Elementa *Euclidis* pariter ac *Flussatis* cum commentario prolixo edidit *Clavius*. Sæpius recusa prodiere inter alia Franc. ad Moen. 1654. in 8. duobus Tomis (Tom. I. 2. Alph. 4. plag. & Tom. II. 1. Alph. 20. plag.) atque etiam inter Opera ejus extant (§. 24. c. 1.) Bene quoqne *Euclidem* integrum explicarunt *Dechales* (§. 4. c. 1.), *Herigonius* (§. 1. *cap. cit*), & inprimis concinna brevitate *Isaacus Barrowius*, Matheseos olim in Academia Cantabrigiensi Professor. Sed quoniam integer *Euclides* tyronibus parum utilis; ideo complures sex tantum priora Elementa ediderunt, & ad summum undecimum & duodecimum adjecerunt. Prolixum nimis foret singulas recensere editiones; sufficit eas nominasse, quæ præ aliis commendari merentur. In hunc ergo censum referimus Elementa *Euclidis* Gallica, quæ *Dechales* sigillatim edidit, & Elementa Geometriæ planæ & solidæ *Andreæ Tacquet*. Præstantissima illorum editio est Parisina An. 1709. in 12. reg. (12. plag. Tab. æn. 16.); horum vero Cantabrigensis An. 1703. in 8. (plag. 16. Tab. 7.), quorum illam debemus *Ozanamo*, hanc vero *Guilielmo Whistono*, tunc temporis Mathematum Professori Cantabrigiensi. Continetur autem in Elemento VII. VIII. & IX. theoria numerorum seu Arithmetica elementaris: unde *Andreas Tacquet* tria hæc Elementa Arithmeticæ suæ inseruit (§. 11. c. 2.). Opus hoc illustre inter ea eminet, quæ ex Antiquitate ad nos pervenerunt, ita ut provindentiæ divinæ tribuendum sit, quod injuria temporum non interciderit.

§. 3. *Joannes Scheubelius*, in Academia Tubingensi *Euclidis* Professor, existimans præter institutum *Euclidis* in designandis demonstrationum momentis literarum figuras usurpari, atque hac ratione & docentibus laborem ac molestiam augeri, & discentium intelligentiam impediri, An. 1550. novo consilio elementa sex priora ita demonstravit, ut literis remotis sua unumquodque propria appellatione designarit. Prodiit opus Basileæ in fol. præmissa brevi Algebræ descriptione. (3. Alph. 5. plag.)

§. 4. Alio consilio An. 1565. *Christianus Herlinus* & *Conradus Dasypodius* demonstrationes *Euclideas* in syllogismos resolverunt: qui labor hunc usum habere potest, ut appareat, quomodo ex plurium Syllogismorum concatenatione tandem demonstratio completa enascatur. Idem opus utrique debetur ex parte. Prodiit Argentinæ An. 1566. in fol. (Alph. 2. plag. 4. cum figuris ligno incisis.). Titulus est: *Analyses Geometricæ sex librorum* Euclidis, *primi & quinti a* Christiano Herlino, *reliquæ una cum Commentariis* & *scholiis perbrevibus in eosdem sex libros Geometricos a* Conrado Dasypodio.

§. 5. Ordo *Euclidis* displicuit *Petro Ramo*, quemadmodum ex iis intelligitur, quæ in Scholis Mathematicis lib. 6. & seqq. contra *Euclidem* passim disputat. Prodiere hæ Scholæ Francofurti ad Mœnum opera *Lazari Schoneri* An. 1599. in 4. (2. Alph. 17. plag.) continentes 1. exhortationem ad artes mathematicas, 2. disputationes de præcipuis quibusdam capitibus Arithmeticæ, & 3. discursus de quindecim libris *Euclidis*. Confer etiam lib. 3. p. 94. & *seqq. Ramus* itaque alia Geometriæ elementa conscripsit libris 27. comprehensa secundum ordinem Scholæ, a *Schonero* An. 1599. in 4. Francofurti una cum libris 2. Arithmeticæ edita & *Euclideis* prælata. Titulus libri est: Petri Rami *Arithmeticæ Libri duo*, *Geometriæ septem & viginti*, a Lazaro Schonero *recogniti & aucti* (2. Alph. 9. plag. cum figuris textui insertis.). Arithmetica magis practica, quam theoretica est, etsi theoria de ratione & proportione exemplis illustretur & ad praxin

trans-

transferatur. Deficiunt tamen demonſtrationes accuratæ, quales dedit *Euclides*. Adjecit *Schonerus* de numeris figuratis librum unum & *Rami* Algebræ libros duos a ſe emendatos, atque de Logiſtica ſexagenaria librum proprium. In Geometria agitur primum de magnitudine in genere, deinde de lineis, poſtea de ſuperficiebus, tandem de Solidis. Enimvero qui primus Geometriam ad ordinem Scholæ reformare auſus eſt, ſtatim exemplo ſuo docuit (quod ſupra §. 57. *Meth. Math.* annotatum eſt) accuratam demonſtrandi methodum cum ordine Scholæ ſubſiſtere non poſſe. Etſi enim *Schonerus* teſtetur, ſe in docenda Arithmetica & Geometria P. *Rami* per multos annos verſatum, & quantum ex iis proficere liceat tyronibus experientia multiplici edoctum fuiſſe; hoc tamen non obſtat, quo minus *Euclidem* ipſum *Ramo* præferamus. Neque enim *Schonerus* methodi ac rigoris in demonſtrando; ſed tantummodo doctrinæ rationem habet, quam ex *Ramo* facilius hauriri ac memoriæ imprimi poſſe facile conceditur. Nobis vero jam ſermo eſt de methodo, quæ cum rigore demonſtrandi conſiſtit, ut plenaria adſit convictio eaque immota, quocunque tandem acumine demonſtrationem perluſtres. Hanc deſiderari in *Ramo*, nec cum eo ordine, quo doctrinas congeſſit, conſiſtere poſſe contendimus.

§. 6. Idem apparet etiam ex cœterorum ſcriptis, qui poſt *Ramum* idem conſilii ceperunt. Pertinent huc 1. Elementa Geometriæ *Ignatii Gaſtonis Pardies* e Societate Jeſu, quartum Hagæ Comitum An. 1680. in 12. (plag. 8.) recuſa & a ſumme Reverendo Abbate *Schmidio*, Helmſtadienſium Theologo celeberrimo, cum adhuc Jenæ Matheſin & Philoſophiam profiteretur, ex Gallico ſermone in Latinum translata. Extant in Opuſculis ejus mathematicis, quæ ſub titulo: *Oeuvres de Mathematique* Hagæ Comitum An. 1691. in 12. prodiere, in quibus præter hæc elementa libris 9. comprehenſa continetur Diſcurſus de motu locali, Statica & Deſcriptio duarum machinarum deſcribendis horologiis Solaribus convenientium. 2. Nova

va Elementa Geometriæ *Arnaldi*, suppresso nomine, Anno 1667. Parisiis primum edita, dein An. 1685. ibidem & An. 1690. Hagæ Comitum in 8. recusa (plag. 21) idiomate Gallico. 3. Elementa Geometriæ Gallica R. P. *Bernhardi Lamy* An. 1685. Parisiis in 12. primum edita & An. 1710. ibidem multo auctiora recusa, ita ut nunc singulæ *Euclidis* propositiones, exceptis elementis septimo, octavo & nono de numeris agentibus, in iisdem contineantur una cum introductione ad sectiones Conicas (plag. 21.) 4. Elementa Geometriæ Serenissimi Burgundiæ Ducis Gallice conscripta (Trevoltii 1705. in 4. reg. 1. Alph. 7. plag.) concinna brevitate maxime necessaria methodo *Arnaldiana* evolventia. Omittimus alia, quæ minoris sunt momenti & ex hisce compilata.

§. 7. Integrum quoque *Euclidem* alio ordine digessit & novis passim demonstrationibus munivit Cl. *Petrus Polynier*, Medicus Parisiensis, in Elementis Geometriæ, quæ una cum Elementis Arithmeticæ sub titulo: *Elemens des Mathematiques* Parisiis 1704. in 12. reg. (1. Alph. 4. plag.) edidit. Contra quæ ex *Euclide* cognitu minus necessaria sunt, omisit, & necessaria alio ordine digessit, aliterque subinde demonstravit Cl. *Angelus de Marchettis* in Pisana Universitate Mathematum Professor in *Euclide*, quem vocat, *Reformato* (Liburni 1709. in 4. 1. Alph. 10. plag.).

§. 8. Præter nos alii etiam Mathematici agnoverant, reformatores Elementorum *Euclidis* non fuisse in ausu suo satis felices; sed *Euclidis* elementis palmam adhuc merito tribuendam esse. Memini hanc fuisse *Leibnitio* sententiam, cum me inviseret, dum Elementis Geometriæ concinnandis operam darem ipsiq ue referrem, me multiplici modo tentasse, ut eo ordine Elementa Geometriæ digererem, quo usus est *Bernhardus Lamy*, sed nunquam hoc fieri potuisse, nisi quædam assumerem absq; demonstratione, quæ essent demonstranda, vel in demonstrando ac definiendo admitterem confuse tantummodo percepta. In Anglia *Joannes Keil*, ut Matheseos Studiosos ad Elementa *Euclidis* reduceret, eo fine Oxonii A. 1715. in 8. (Alph. 1. plag.

plag. 6. cum figuris textui insertis), imprimi curavit Elementa sex priora *Euclidis* una cum decimo & undecimo ex versione *Frederici Commandini*. In præfatione, quam iisdem præmisit, graviter invehitur in eos, qui *Euclidem* carpunt & ab ejus lectione juvenes abducunt. Addidit Elementa Trigonometriæ planæ & Sphæricæ atque Tractatum de natura & Arithmetica Logarithmorum.

§. 9. Præter ordinem, quem *Euclides* in Elementis suis tenet, multi ex antiquis pariter ac recentioribus Geometræ tres sibi visi sunt deprehendisse nævos in ejusdem Elementis, quorum primus respicit definitionem parallelarum & sub ea axioma, quod apud *Clavium* est decimum tertium libri primi, secundus definitionem sextam libri quinti, quæ est æque proportionalium & tertius definitionem quintam libri sexti de compositione rationum. Ab his nævis eum vindicare aggressus est *Hieronymus Saccherius*, Societatis Jesu, in Ticinensi Universitate Matheseos Professor, in Opusculo, quod sub titulo: *Euclides ab omni nævo vindicatus sive Conatus Geometricus, quo stabiliuntur prima ipsa universæ Geometriæ principia*, Mediolani 1733. in 4. (plag. 20. Tab. æn. 6)

§. 10. Nos equidem in Elementis hisce Matheseos non exhibuimus Elementa *Euclidis* ipsa; nihil tamen in iis occurrit, quod non reperiatur vel in Aritmetica, vel in Geometria, vel in Algebra, quemadmodum inferius fidem oculatam dabimus. Nihil vero nobis magis curæ cordique fuit, quam ut rigori demonstrandi consuleremus & demonstrationes ita componeremus, ut essent consummatæ eo sensu, quem in Logica Latina (§. 799. 854. 855.) explicamus, ad usum tamen tyronum compositæ. Et plurimorum annorum experientia abunde docuit fructum, quem inde percipere licet.

§. 11. Quæ in *Euclide* de circuli, sphæræ, & cylindri dimensione defuere; ea supplevit *Archimedes* in duobus de sphæra & cylindro libris, & de circuli dimensione libello unico: ex quibus selecta theoremata ad faciliorem tyronum intelligentiam proposuit *Tacquetus* sub finem Geometriæ supra laudatæ

(§. 2.). Idem *Archimedes* libros alios de Spiralibus, de Conoidibus & Sphæroidibus & de Quadratura Parabolæ scripsit. Opera ejus una cum Conicis *Apollonii* & Sphæricis *Theodosii* edidit facilioribus cum demonstrationibus *Isaacus Barrowius* Londini 1675. in 4to (Opera *Archimedis* constant 24. plag. Tabb. æn. 13. *Apollonii* 14. plag. Tab. 12. & *Theodosii* plag. 6. Tab. 3.). Præter vero Geometrica in operibus *Archimedis* una continentur libri de æquiponderantibus & insidentibus humido: Arenarium tamen ejus omisit *Barrowius*, qui in alia editione una comparet, quæ Panormi A. 1685. in fol. prodiit, & cujus singularia fata in Actis Eruditorum An. 1687. p. 543. & 544. recensentur. Germanicam operum *Archimedis* versionem (libris de insidentibus humido exceptis) dedit *Joh. Christoph. Sturmius* (Norimbergæ 1670. in fol. 6. Alph. 2. plag.).

§. 12. Archimedea promovere studuit *Johannes Keplerus* in Nova Stereometria doliorum vinariorum, inprimis Austriaci (Lincii 1615. in fol. plag. 28). quæ una continet supplementum ad Archimedem de Stereometria figurarum Conoidibus & Sphæroidibus proxime succedentium. Ex Latino in Germanicum versam eandem anno sequenti edidit, sed passim mutatam, alicubi etiam practicis nonnullis auctam. Ejus exemplo excitatus *Bonaventura Cavalerius*, ordinis S. Hieronymi, olim Mathematum Professor Bononiensis (quemadmodum ipse in præfatione fatetur) adhuc ulterius progressus plurium, quam *Archimedes* & *Keplerus* solidorum per revolutionem sectionum conicarum circa axem aut rectas alias dedit nova methodo indivisibilium, quam vocat, a *Keplero* part. 1. theor. 2. Stereom. indicata, in *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (Bononiæ 1653. in 4. 3. Alph. 1. plag.). Similiter *Archimedea* illustravit atque promovit *Evangelista Torricellius*, magni Hetruriæ Ducis Mathematicus, in *Operibus Geometricis de Solidis sphæralibus, de motu, de dimensione parabolæ, de solido hyperbolico cum appendicibus, de cycloide & cochlea* (Florentiæ An. 1644. in 4. 2. Alph.).

§. 13.

§. 13. Præter ea, quæ *Archimedes* ad sublimiorem Geometriam spectantia tradidit, Veteres inprimis ad eandem sectionum conicarum doctrinam referebant, de quibus opus absolutum 8. libris comprehensum composuit *Apollonius Pergæus*, quorum quatuor priores sæpius editi. Inter optimas editiones refertur, quam cum Commentariis prolixis An. 1655. in fol. (5. Alph. 19. plag. Tabb. æn. 30.) Antverpiæ in lucem emisit *Claudius Richardus*, e Societate Jesu, quales etiam in *Euclidis* Elementa 15. A. 1645. in fol. dederat integro volumine comprehensos. Quintum, sextum & septimum, qui pro amissis habebantur, ex Arabico MSC. *Abalphati Asphahanensis* opera *Abrahami Ecchellensis Maronitæ*, Linguarum Orientalium Professoris Romani, in vertendis usus Florentiæ 1641. in fol. (4. Alph. 21. plag.), cum libro Assumtorum *Archimedis* in lucem protraxit *Joh. Alphonsus Borellus*, in Academia Pisana Matheseos Professor. Antequam vero iidem prodirent, *Vincentius Viviani*, Magni Hetruriæ Ducis Mathematicus, ex descriptione *Pappi* librum quintum feliciter restituit, & sub titulo Divinationis Geometricæ in quintum Conicorum *Apollonii Pergæi* adhuc desideratum Florentiæ 1659. in lucem emisit: quo successu felici permotus ex intervallo An. 1701. addidit de locis secundam divinationem Geometricam in quinque libros injuria temporum amissos *Aristæi* senioris Geometræ (Florentiæ in fol. 3. Alph. 15. plag.). Scripta *Viviani* usui esse possunt illis, qui methodo demonstrandi veterum in Geometria sublimiori delectantur. Præstantissimam operum Apollonii editionem dedit Celeberrimus *Hallejus* Oxoniæ A. 1710. in fol. (5. Alph. 16. plag.). Accessere eidem *Sereni* libri duo de Sectione Cylindri & Coni, qui primi Græce editi & *Apollonii* liber octavus ab *Hallejo* restitutus.

§. 14. Inter recentiores doctrinam Conicam illustrarunt varii. Commendari meretur opus de Sectionibus Conicis *Claudii Mydorgii* An. 1632. Parisiis in fol. publicatum, in quo & proprietates earundem demonstrantur, & descriptiones variæ docentur. Huic præferen-

rendus *Gregorius a S. Vincentio*, e Societate Jesu, qui in Opere Geometrico Quadraturæ circuli & Sectionum Coni 10. libris comprehenso ad inventa recentiora viam stravit, ita ut *Leibnitius* in Actis Eruditorum An. 1691. p. 438. fateatur, sibi in interiori Geometria hospiti, cum opus hoc *Gregorii* a S. *Vincentio* una cum *Hugenii* libro de Horologio oscillatorio & *Dettonvillæi* (hoc est, *Pascalii*) epistolis legeret, subito affulsisse lucem & sibi & aliis inexpectatam. Prodiit opus insigne Antverpiæ 1647. in fol. (14. Alph.) & præter conica in eodem continentur variæ linearum inter se proportiones, triangulorum novæ proprietates, rectangulorum proportiones, progressionum Geometricarum, etiam in infinitum progredientium, miræ proprietates, multa de circulo alibi minus obvia, doctrina de ductu plani in planum, de proportionalitatibus Geometricis theoria nova, ungularum item, conoidum & sphæroidum doctrina. Absolutum quoque Sectionum conicarum opus debemus industriæ *Philippi de la Hire* (Paris. An. 1685. in fol. 2. Alph. 18. plag.), in quo præter *Apolloniana* plurima alia methodo veterum demonstrantur: ex quo in gratiam tyronum compendium fecit *Jacobus Milnes* impressum Oxonii An. 1702. in 8. (12 plag. & 19. Tab. Fig.) & recusum emendatius atque auctius ibidem 1712. in 8. (15. plag. Tabb. 19.) sub titulo: *Elementa Sectionum Conicarum nova methodo demonstrata.*

§. 15. Ipse etiam celeberrimus *de la Hire* in eorundem gratiam Elementa Sectionum Conicarum Parisiis A. 1679. in 12. in lucem emisit una cum constructione locorum geometricorum & æquationum, de qua in capite subsequente. Titulus opusculi: *Nouveaux Elemens des sections coniques, les lieux Geometriques, la construction des Equations.* (plag. 21.). Similis iisdem est Tractatus *Ozanami* Gallicus de lineis primi generis, locis geometricis & constructione æquationum (Parisiis 1687. in 4. 1. Alph. 15. plag. Tab. æn. 35). Nominandus hic quoque est Tractatus de Sectionibus cylindri & Coni in solido & plano consideratis, cum demonstrationibus simplicibus ac novis,

vis, quem sermone Gallico Parisiis An. 1704. in 8. edidit *Poivre* (5. plag. & 8. Tabb. æn.). De aliis Conicorum scriptoribus dicemus capite sequente.

§. 16. Commemoranda tamen de iisdem adhuc nonnulla sunt, quæ hic apprime locum merentur. Nimirum *Guido Grandus*, cum intelligeret, desiderari libellum Conicorum ad captum tyronum, cujus defectu doctrina Conica in Scholis vulgo negligitur; eundem supplevit & methodo veterum conscripsit libellum mole parvum, sed rerum ubertate gravem. in quo præcipua de sectionibus Conicis theoremata demonstrat. Prodiit Florentiæ An. 1722. in 12. (plag. 6½. Tabb. æn. 7.), sub titulo: *Compendio delle sezioni Coniche d'Apollonio.* Quoniam hoc compendium commendari meretur Matheseos Studiosis, *Christianus Augustus Hausen*, Matheseos Professor Lipsiensis, versionem hujus opusculi Latinam in gratiam auditorum adornasse dicitur in Actis Eruditorum supplement. Tom. VIII. sect. X. hinc inde tamen quædam imutasse. Equidem *Vincentius Santini*, Florentinus, simile Compendium dare conatus est Lucæ 1722. in 8. (plag. 6. Fig. 28.) sub titulo: *Delle sezzioni Coniche dedotte nuovamente in Piano dal cherchio*, in quo nova ratione sectiones conicas in plano a circulo deducit; sed demonstrationes ejus laborare circulo vitioso jam annotarunt Collectores Actorum Eruditorum *loc. cit.* p. 432 *Nicolaus de Martino*, Regius Matheматum Professor Neapoli, duobus Tomis Elementa Sectionum conicarum edidit Neapoli A. 1734. in 8. charta augusta (Tom. I. plag. 21½. Tabb. æn. 8. Tom. II. plag. 22. Tabb. æn. 8.). Conscripserat hæc elementa ad usum *Faustinæ Pignatelli*, Principis Culubranensis & Tolvensis Ducatus heredis; postea in gratiam studiosæ juventutis publici juris fecit. Omissis propositionum, scholiorum & corollariorum titulis, continuo textu ad morem vulgarem extra Mathesin receptum cuncta demonstrat. Præter Sectionum conicarum proprietates earum usum in construendis problematis solidis docet, præmissis iis, quæ cum in genere de constructionibus geometricis, tum pro-

blematorum planorum sciri debent.

§. 17. Præter Conica apud veteres in Geometria sublimiori celebre fuit Problema Deliacum de duplicando cubo, seu, quod eodem recidit (§. 626. *Anal. fin.*), de inveniendis duabus mediis continue proportionalibus inter duas datas: quem in finem excogitatæ sunt variæ lineæ curvæ a *Pappo Alexandrino* in collectionibus Mathematicis conservatæ. Earum duo libri priores hactenus desiderantur. Sex posteriores Bononiæ 1660. in fol. editi (Alph. 5. plag. 9. cum figuris textui insertis, continent, inter alia solutiones varias problematis Deliaci, trisectionem anguli, isoperimetrorum doctrinam, sphærica nonnulla & quædam ad Mechanicam spectantia. Varia etiam scripta Geometrarum veterum in præfatione ad librum sextimum recenset *Pappus*.

§. 18. Inter præcipua inventa Geometrica superioris seculi refertur methodus centrobaryca *Pauli Guldini*, e Societate Jesu, de qua diximus in Mechanica & Statica (§. 164). Prodiit ejus liber primus de centro gravitatis una cum Tabulis numerorum quadratorum & cubicorum decies millium, Viennæ Austriæ 1635. in fol. (4. Alph. 21. plag.). Accessere libri secundus, tertius & quartus A. 1640. (4. Alph. 14. plag.). Libro primo adjuncta est dissertatio de motu terræ ex mutatione centri gravitatis ipsius proveniente.

§. 19. Curvarum doctrinam universalius pertractavit & multis novis inventis auxit *Isaacus Barrowius* supra laudatus in egregio opere Lectionum Geometricarum Londini 1674. in 4. (plag. 21. Tabb. 13.). Elementa curvarum in usum tyronum hactenus desiderantur, qualia tamen prostare consultum foret.

§. 20 Alia scripta particularia ad Geometriam theoreticam spectantia nimis longum foret hic recensere. Quædam tamen recensere lubet. Pertinet huc *Christiani Hugenii* liber de circuli magnitudine, Hagæ comitum An. 1644. in 4. (plag. 5. cum figuris textui insertis) & ejusdem Theoremata de Quadratura Hyperboles, Ellipsis & circuli ex dato portionum gravitatis centro Lugduni Batavorum

vorum 1651. in 4. (plag. 6½ cum figuris textui inſertis.). Uterque Tractatus legitur Operum variorum Tomo ſecundo (§. 35. c. 1.).

§. 21. Affinia his ſunt *Ludolphi a Ceulen*, Hildesheimenſis, de Circulo & Adſcriptis liber, ex vernacula in Latinam translatus & annotationibus illuſtratus a *Willebrordo Snellio* (Lugd. Bat. 1619. in 4. plag. 8.) & ejusdem Fundamenta Arithmetica & Geometrica cum eorundem uſu in variis problematis Geometricis partim ſolo linearum ductu, partim per numeros irrationales & tabulas ſinuum & Algebram ſolutis, a *Snellio* itidem Latine verſa Lugd. Bat. 1615. in 4. (1. Alph. 16. plag.)

§. 22. *Laurentius Lorenzinius*, Diſcipulus *Vincentii Viviani*, edidit Florentiæ An. 1721. in 4. (plag. 20. Tabb. æn. 14.) Exercitationem Geometricam, in qua agitur de dimenſione omnium conicarum ſectionum, curvæ parabolicæ curvæque ſuperficiei Conoidis parabolici. Solvit more veterum per demonſtrationes problemata, quæ hodie per Algebram ſolvi ſolent. Unde ejus lectio commendanda iis, qui methodum veterum ſibi familiarem reddere geſtiunt. Cum viginti annos in vinculis duro fato detineretur, ab omni commercio cum hominibus literatis remotus, nullius libri uſu conceſſo, methodum iſtam excoluit & duodecim libros de ſectionibus conicis & cylindricis eorumque ſolidis conſcripſit, ultra *Apllonii & Viviani* inventa progreſſus. Ex carcere igitur tandem dimiſſus, ubi cognoviſſet, quæ nunc agerentur a Geometris, ſublimiora quoque meditari cœpit, ſed conſueta ſibi utens methodo. Sex itaque compoſuit Exercitationes, quarum prima eſt, quæ hic commemoratur, ceteræ enim, quantum conſtat, lucem publicam non adſpexerunt.

§. 23. *Comes de Pagan*, cujus non minus in Aſtronomia, quam Architectura militari celebre eſt nomen, decem edidit libros Theorematum Geometricorum ſub titulo: Les dix livres des Theoremes Geometriques du Comte de Pagan, Pariſiis 1654. in 8. (1. Alph. 5. plag.), in quibus de lineis 4. proportionalibus, de ſectionibus coni-

F 2 cs,

cis, de theoria planetarum elliptica, de munitionibus regularibus & de navigatione agit. Prostant etiam *Ismaelis Bullialdi* de Lineis spiralibus demonstrationes novæ (Parif. 1657. in 4. plag. 18.) & ejusdem Exercitationes Geometricæ circa demonstrationes per inscriptas & circumscriptas figuras, circa conicarum sectionum quasdam propositiones, & de porismatibus (Parif. 1657. in 4. plag. 6.).

§. 24. *Stephanus de Angelis*, *Nobilis*, Venetus, Ordinis Jesuatorum S. Hieronymi, methodum *Cavalerii* excoluit, ejus usum insignem demonstraturus, cum non deessent, qui eandem impugnarent & contemnerent. Edidit Venetiis An. 1658. in 4. (Alph. 1. plag. 14. cum figuris textui insertis) Problemata Geometrica Sexaginta circa Conos, sphæras, superficies conicas sphæricasque præcipue versantia; ibidem An. 1656. in 4. Libros quatuor de infinitis parabolis infinitisque solidis ex variis rotationibus ipsarum partiumq; earundem genitis, una cum nonnullis ad prædictarum magnitudinum aliarumque centra gravitatis attinentibus (Alph. 2. plag. 7.). Addidit An. 1663. librum quintum (plag. 14.). Ibidem An. 1659. in 4. in lucem publicam emisit Miscellaneum hyperbolicum & parabolicum, in quo præcipue agitur de centris gravitatis hyperbolæ partium ejusdem atque nonnullorum solidorum, de quibus nunquam Geometria locuta est. Parabola noviter quadratur dupliciter, ducuntur infinitarum parabolarum tangentes, assignantur maxima inscriptibilia, minimaque circumscriptibilia infinitis parabolis, conoidibus ac semifusis parabolicis, aliaq; geometrica nova exponuntur scitu digna (Alph. 1. plag. 11.). A. 1660. ibidem prodiit ejus opusculum Geometricum de infinitorum spiralium spatiorum mensura (plag. 16.) & tandem Anno 1661. publici juris facti Tractatus de infinitarum cochlearum mensuris ac centris gravitatis (plag. 16.), & Tractat. duo de superficie Ungulæ & de Quartis Liliorum parabolicorum & cycloidalium (Alph. 1. plag. 19). Atque adeo patet, quod suo tempore Geometriam sublimiorem multum promoverit, aliisque viam ad ulteriora monstraverit.

§. 25. *Franciscus a Schooten*, Leydensis, in Academia Lugduno-Batava Matheseos Professor, Exercitationum mathematicarum libros quinque Lugduni Batavorum in 4. An. 1657. (Alph. 3.) edidit, in quibus habentur varia tum ad Geometriam elementarem, tum sublimiorem spectantia una cum tractatu de sectionum conicarum in plano descriptione, qui sigillatim prodiit (Lugd. Batav. 1646. in 4. plag. 17). Nimirum libro primo continetur propositionum arithmeticarum & geometricarum centuria, secundo constructio problematum simplicium geometricorum, tertio *Apollonii Pergæi* loca plana restituta, quarto organica conicarum sectionum in plano descriptio & quinto sectiones miscellaneæ triginta. Colophonis loco adjicitur *Hugenii* Tractatus de Ratiociniis in ludo aleæ, qui inter opera varia Vol. 2. legitur (§. 35. c. 1.).

§. 26. *Jacobi de Billy*, e Societate Jesu, tractatus de proportione harmonica, An. 1658. editus, in quo varia problemata ejus ope solvuntur. *Antonii Lalovera*, e Societate Jesu, Geometria veterum promota, seu libri septem de Cycloide Tolosæ 1660. prodiere, quibus multa continentur ad Geometriam sublimiorem spectantia. Extat etiam *Ferdinandi Ernesti Comitis ab Herberstein* Diatome Circulorum seu specimen Geometricum, quo Lunularum, Curvilineorum aliorumque spatiorum propositiones demonstrat (Pragæ 1710. in 8. 1. Alph. Tab. 1.): *Vincentii Viviani* Exercitatio mathematica de formatione & mensura fornicum (Florentiæ 1692. in 4. plag. 6): *Joh. Baptistæ Palmæ* in Geometriam Exercitationes (Neapoli 1689. in 4. plag. 16.) 100. propositiones, quæ ad Geometriam elementarem pertinent, cotinentes.

§. 27. *Angelus de Marchettis*, in Pisana Universitate scientiarum mechanicarum Professor, Pistoriæ An. 1695. in 4. (plag. 14.) sermone patrio edidit Tractatum de natura rationis & proportionis nova, facili & secura methodo explicata. Titulus libelli est: *La Natura della proporzione & della proporzionalita.* In eo aliam viam ingressus est, quam *Euclides*, aliam quoque, quam alii recentiores. Ab

Euclide recedentes calcarunt. Cum intellexisset, eundem probari *Stephano de Angelis*, *Dominico Gulielmino*, *Francisco Spoleti*, *collectoribus Actorum Eruditorum* in Actis An. 1696. p. 244. 245. in Latinam linguam ipsum transtulit: Qua data occasione cetera quoque *Euclidis* Elementa tam plana quam solida in breviorem & meliorem formam redigere voluit. Unde enatum est opus Elementorum planorum & solidorum Geometriæ, quod sub titulo: *Euclides Reformatus* prodiit & quod supra laudavimus (§. 7.).

§. 28. Ad libros analyticos veterum, quorum memoriam conservavit *Pappus* in præfatione ad librum septimum Collectionum mathematicarum referendi sunt *Apollonii Pergæi* de sectione rationis libri duo ex arabico latine versi, & de sectione spatii libri duo restituti ab *Edmundo Halley* ac editi Oxonii 1706. in 8. (1. Alph. 3. plag.).

§ 29. Ad Geometriam quoque spectat Sphæricorum doctrina, quæ circulorum in superficie Sphæræ descriptorum & sese mutuo intersecantium proprietates explicat. Eam olim tribus libris comprehendit *Theodosius*, quos Tomo primo Cursus Mathematici exhibet *Dechales*, ut supra monuimus (§.4). Eosdem nova methodo illustravit & succincte demonstravit *Isaacus Barrowius* atque Londini 1675. in 4. (plag. 6. Tab. æn. 3.) edidit, subjunctos operibus *Archimedis* & *Apollonii*. Aliqua hujus doctrinæ etiam attingit *Pappus* libro septimo collectionum mathematicarum, ubi addit, quæ in *Theodosio* desiderantur scitu necessaria.

§. 30. Geometriam practicam omnium absolutissimam, sed sine demonstrationibus dedit *Malletus*, quatuor Tomis idiomate gallico conscriptis comprehensam (Paris. 1702. in 8. reg. Tom. I. plag. 23. Tom. II. plag. 26. Tom. III. plag. 24. Tom. IV. plag. 18.). In Geodæsia declaratur usus semicirculi, quadrati Geometrici, circini proportionum, Astrolabii, pixidis magneticæ, baculi Jacobi & mensulæ geometricæ. Singula folia Figuris elegantibus, sed ad rem parum facientibus exornantur.

§. 31. Germanico idiomate Geometriam practicam conscripsit

psit *Daniel Schwenterus*, Professor olim Mathematum Altorfinus, cum notis *Johannis Bæckleri*, Norimbergæ 1667. in 4. (4. Alph. 18. plag.) recusam. Praxis in charta cum demonstrationibus docetur: in campo solus baculorum & mensulæ geometricæ usus ostenditur, stereometria desideratur. Unde instar supplementi esse potest *Johannis Hartmanni Beyeri*, Med. D. Stereometria, quam sub titulo: **Eine neue und schöne Art der vollkommenen Visir-Kunst**, Franc. ad Mœn. 1603. in 4. (1. Alph. 7. plag.) edidit. Autor inprimis Stereometriam doliorum plenius explicat, quam ab aliis factum. Cum tamen doliorum non plenorum stereometriam non attigisset; A. 1619. addidit Conometriam Mauritianam vernaculo itidem sermone conscriptam. (Franc. in 4. plag. 11.), in qua stereometria doliorum tam plenorum, quam non plenorum traditur. Cæterum idem Autor de virgula pithometrica conficienda ibidem 1620. plagulam unam adjecit.

§. 32. Ante *Schwenterum* in usum agrimensorum *Bernhardus Cantzlerus* edidit tractatum geodæticum sub titulo: **Kurtzer u. leichter Bericht vom Feldmessen**, quem *Abdias* **Trew** Mathes. Prof. Altorfinus multis annotationibus auxit, ita ut sub titulo: *Summa Geometriæ practicæ* An. 1673. Norimbergæ in 8. (plag. 33. Tab. æn. 55.) edi meruerit.

§. 33. Nomen Autoris commendat scholam agrimensorum, quam *Phil. de la Hire* sub titulo: *l' Ecole des Arpenteurs* Paris. Anno 1689. in 8. edidit. Prodiit tertia vice Parisiis Anno 1728. in 12. reg. (plag. 16.). Explicantur in hoc libello operationes arithmeticæ & trigonometricæ cum principiis Geometriæ, quibus agrimensores habent opus. Deinde exponuntur praxes Geodætarum & subjicitur descriptio artis libellandi. Nec minus laudem merentur *Clavii* (§. 24.) *Tacqueti*. (§. 28.), *Ozanami* Geometriæ practicæ (§. 7.) hujusque *Methode facile pour arpenter, ou mesurer toutes sortes de superficies & pour toiser exactement la Maconnerie, les vuidanges des Terres & tous les autres corps, dont on peut avoir besoin dans la practique. Prodiit denuo Parisiis* 1725. in 12. reg.

reg. (plag. 12.). Explicantur etiam in hoc libello operationes arithmeticæ & trigonometricæ ac principia Geometriæ agrimensoribus ſcitu neceſſaria. Eundem cum *Philippo de la Hire* ſcopum ſibi præfixit *Henricus Wilſon* in libro Anglico, quem ſub Titulo: *ſurveying improved* Londini 1726. in 8. reg. (Alph. 1. Tabb. æn. 11.) edidit, in ſuo genere ſatis conſummatum. Solet vulgo inſtitutionibus architecturæ militaris præmitti Geometria practica.

§. 34. *Adrianus Metius* 1725 in 4. edidit Arithmeticæ libros duos & Geometriæ libros ſex. Qui multo auctiores 1650. Lugduni Batavorum in 4. recuſi (Alph. 3.). Geometria nonniſi practica eſt, perinde ac Arithmetica, ut adeo hic recenſeri mereatur. Tractatur in hiſce libris etiam Trigonometria plana, uſus circini & regulæ proportionalis, Architectura militaris, problemata aſtronomica, & ſciaterica horologia, ita ut in hoc opere reperias, quæ titulus non promittere videtur, nec in libris, quæ eundem habent, vulgo quæri ſolent. Nullas tamen addit demonſtrationes. Aliter *Joannes* Düſer, Tigurinus, in Geometria Theorica & practica patrio idiomate Tigurini 1627. in 4. publicata theoriam cum praxi conjungit, & hanc ex illa deducit. Multa docet, quæ iſtiusmodi autores non tangunt: de ſtereometria tamen nihil habet.

§. 35. *A. Scharpe*, Anglus, idiomate patrio edidit Geometriam promotam 1. per tabulam amplam & accuratam ſegmentorum circulorum, & 2. per Tractatum conciſum de Polyedris Londini An. 1718. in 4. (plag. 17. Tabb. æn. 4.). Tractatus primus ſine controverſia ad Geometram practicam ſpectat, cum computandis ſegmentis circulorum deſtinetur, qui calculus ad Geometriam practicam pertinet ac multiplicem in variis problematis huc ſpectantibus habet uſum. Tractatus alter ad ſtereometriam refertur, cumque Autor in eodem conſtructionem & dimenſionem quinque corporum regularium ac præterea duodecim novorum a Geometris hactenus non expenſorum polyhedrorum tradat; hic quoque Tracta-

Tractatus Geometriæ practicæ quædam pars eſt.

§. 36. *Batty Langley* Londini 1726. in fol. (Alph. 1. plag. 11. Tabb. æn. 40.). Geometriam practicam ad Architecturam civilem, & hortenſem, Geodæſiam & Stereometriam applicatam edidit ſermone patrio. Titulus libri eſt: *Practicel Geometry applied to the uſeful Arts of Building, Surveying, Gardening and Menſuration.* Sed hic liber potiore jure inter inter Architectonicos locum meretur, quam inter eos, qui de Geometria conſcripti ſunt, quemadmodum ſuo loco monebimus.

§. 37. Pithometriam promovere aggreſſus eſt *Joannes Matthias Haſius*, Mathematum Profeſſor in Academia Wittebergenſi, in Pithometriæ Theoria & Praxi nova Wittebergæ 1728 in 4. (Plag. 10. Tabb. æn. 2): ubi etiam Algebræ in hoc argumento uſum declarat.

§. 38. *Eraſmus Reinholdus* in Geodæſia ſua, quæ ſub titulo: **Gründlicher Bericht vom Feldmessen**, Franc. 1615. in 4. (1. Alph. 17. plag.) recuſa, Geometriam quoque ſubterraneam (*Wolfii Matheſis. Tomus V.*) explicat: de qua opus peculiare conſcripſit *Nicolaus* **Voigtel**, decimarum e Mansfeldenſibus metallifodinis Receptor, Islebiæ An. 1688. in fol. (plag. 32. Tab. 9) excuſum & itidem An. 1713. auctius (2. Alph. 10. plag. Tab. æn. 10.) recuſum, unicum ſane in hoc genere, donec An. 1710. *Leonhardus Chriſtophorus Sturmius* Francofurti Anno 1710. in 8. Tractatus quatuor idiomate Germanico ederet, inter quos quartus eſt Geometriæ ſubterraneæ Compendium, primus vero de deſcriptione corporum regularium, ſecundus de Circino proportionum, tertius de Trigonometria plana (plag. 6. Tab. æn.), & An. 1727. *Joannes Fridericus Weidlerus*, Profeſſor Mathematum Wittebergenſis, Inſtitutiones Geometriæ ſubterraneæ latinas daret Wittebergæ in 4. (plag. 10. Tab. 1.)

§. 39. Circinum proportionis a *Juſto Byrgio* multo ante inventum deſcripſit *Levinus Hulſius* Tractatu tertio inſtrumentorum mechanicorum vernaculo idiomate Francof. ad Mœnum An. 1603. edito (plag. 4.) Poſtea A. 1607. *Galilæus*, alienum inventum ſibi attribuens, de eodem

librum Italicum sub titulo: *Le Operationi del compasso Geometrico & militari* publicavit. Omnium maxime commendari in hoc genere meretur *Nicolai Goldmanni* de circino proportionis Tractatus (Lugd. Batav. 1679. latine & germanice in fol. (1. Alph. Tabb. 16) editus, ex quo sua descripsit *Michael Scheffelt* in tractatu germanico **Unterricht von dem** *Proportional Circul* Ulmæ 1697. in 4. (plag. 18. Tab. 12.). Prostat quoque Tractatus Gallicus Cl *Ozanami* de usu circini proportionum (Parisiis 1688. in 8.). Recentius ejus constructionem & usum in peculiari Tractatu, qui multa singularia continet, exposuit *Samuel Cune*. Eum post mortem Autoris *Edmundus Stone* sub Titulo: *A new Treatisse of Construction and use of the sector* Londini A. 1729. in 8. (plag. 15. Tab. æn. 2. & Fig. multis ligno incisis) publici juris fecit.

§. 40. Ad scripta de Geometria practica referendum quoque est *Casparis Schotti* Pantometrum Kircherianum, hoc est, instrumentum Geometricum novum ab *Athanasio Kirchero* inventum, decem libris universam pæne practicam Geometriam complectentibus explicatum perspicuisque demonstrationibus illustratum. Prodiit Herbipoli 1660. in 4. (Alph. 2. plag. 11. Tabb. æn. 32). Liber primus technicus fabricam instrumenti, secundus euthymetricus linearum rectarum dimensiones, tertius enbadometricus dimensionem superficierum, quartus stereometricus dimensiones solidorum, sextus cœlometricus dimensiones concavorum, septimus geodæticus divisiones superficierum, octavus metamorphoticus planorum corporumque transformationem, nonus hydragogicus libellationem aquarum totamque libellationis naturam, decimus tandem varius problematum variorum solutionem docet, quæ ope circini proportionum alias solvi solent.

CAP.

CAPUT IV.

DE SCRIPTIS ANALYTICIS.

§. 1.

SCripta veterum analytica recenſet *Pappus* in præfatione ad librum ſeptimum collectionis mathematicæ. Sunt nempe Datorum *Euclidis* liber unus (§. 1. c. 1.) *Apollonii* de Sectione Rationis libri duo ab *Hallejo* editi, & de Sectione ſpatii libri duo ab eodem reſtituti (§. 28. c. 3.), *Apollonii* de Tactionibus libri duo, de Inclinationibus duo, de locis planis duo, Conicorum octo, *Euclidis* Poriſmatum tres, & de locis ad ſuperficiem duo, *Ariſtæi* de locis ſolidis quinque, *Eratoſthenis* de mediis proportionalibus duo: quorum aliqui extant (§. 13. Cap. 3.), aliqui deſiderantur, ſed a recentioribus Geometris reſtituti, (§. 1. cap. 1. & §. 13. Cap. 3.). Sed Analyſis veterum ab analyſi recentiorum longe fuit diverſa.

§. 2. Ad analyſin recentiorum potiſſimum ſpectat Algebra, de qua olim exempla tredecim libris comprehenſa dedit *Diophantus*. Hodie nonniſi 6. proſtant, a *Xylandro* latine verſi, & An. 1575. in fol. primum editi, poſtea cum Commentariis *Caſparis Bacheti*, An. 1621. recuſi. Illuſtrat autem *Diophantus* artem ſolvendi problemata arithmetica indeterminata. Gallica eorum verſio extat inter Opera *Stevini* (§. 23. c. 1.).

§. 3. Antequam *Diophantus* in publicum proſtaret, *Lucas Paciolus* ſeu (ut vulgo vocatur) *Lucas de Burgo S. ſepulchri* in ſumma Arithmeticæ & Geometriæ ſupra laudata (§. 6. cap. 2.) lib. 8. Algebram explicat, prout eam acceperat ab Arabibus. Nimirum ultra æquationes ſimplices & quadraticas non progreditur. Nec longius progreſſi ſunt *Chriſtophorus Rudolphus* Jarovienſis Sileſius, qui primus de Algebra ſeu Coſſa, prout tunc dicebatur, in lingua germanica ſcripſit & cujus librum ad-

ditis regularum demonstrationibus & exemplis pluribus recudi fecit *Michael Stifelius* Regiomonti An. 1553. in 4. (Alph. 5. plag. 11.). Titulus libri: **Die Coss Christoffs Rudolffs, mit schönen Exempeln der Coss durch Michael Stifel gebessert und sehr gemehrt**, *Stifelius*, qui hoc Magistro profecit, in Arithmetica integra (§. 7. cap. 2.), *Henischius* in Arithmetica perfecta (§. 10. cap. cit.) aliique. Non ineleganter *Rudolphus* eumque secutus *Stifelius* æquationes algebraicas ex progressionibus geometricis derivant. Sed *Scipio Ferreus* addidit regulas resolvendi æquationes cubicas, a *Cardano* in Arte Magna, quam vulgo Cossam seu Regulam Algebræ vocant, An. 1545. primum publicatas: Cl. *Ludovicus Ferrariensis* ostendit methodum reducendi æquationes biquadraticas, quam An. 1579. Algebræ suæ inseruit *Raphaël Bombelli*. Ulteriores progressus Algebra stricte sic dicta nondum vidit.

§. 4. Circa annum Christi 1590. *Franciscus Vieta* Gallus arithmeticam litteralem invenit, & ad Algebram applicavit, quam & methodo ingeniosa extrahendi radices ex æquationibus quibuscunque per approximationem locupletavit. (§. 25. cap. 1.). Ejus inventa explicat iisdemque utitur *Guilielmus Oughtred*, Anglus, in Clave Mathematica, An. 1631. primum, sed An. 1693. Oxonii quinta vice edita (plag. 12). Regulas ad exempla applicat & usum Arithmeticæ litteralis in Geometria elementari ostendit, quem in inveniendis theorematis & resolvendis problematis habet. Extractionem quoque radicum per approximationem ex æquationibus exemplo *Vietæ* docet.

§. 5. *Thomas Harriot*, itidem Anglus, qui Londini An. 1621. obiit, in Artis Analyticæ Praxi ad æquationes algebraicas nova, expedita & generali methodo resolvendas, a *Walthero Warnero* An. 1631. in fol. Londini (2. Alph. 2. plag.) edita Arithmeticam *Vietæam* ad commodiorem formam reduxit, eam nempe, qua nunc utimur, & æquationum indolem ac reductionem plenius explicavit.

§. 6. A. 1637. *Cartesius* Geometriam, quam vocat, idiomate galli-

gallico publicavit, quam postea Latine vertit & prolixis Commentariis auxit *Francisc. a Schooten*. Utor ego editione Amstelodamensi An. 1659. in 4. (5. Alph. 8. plag.). Continentur in eadem præter *Cartesii* Geometriam (plag. 12.) *Florimundi de Beaune* Notæ breves & *Francisci a Schooten* Commentarii in eandem; *Joh. Huddenii* epistola de reductione æquationum, ejusdem epistola de maximis & minimis. *Erasmi Bartholini* Principia Matheseos universalis seu introductio ad Geometriæ methodum *Cartesii*; *Florimundi de Beaune* tractatus posthumi de natura & constitutione atque de limitibus æquationum; *Joh. de Witt* libri duo de Elementis Curvarum, & *Franc. a Schooten* tractatus de concinnandis demonstrationibus geometricis ex calculo algebraico. *Cartesius* Arithmeticam litteralem & regulas Algebræ descripsit ex *Harrioto*, & quemadmodum *Oughtredus* in Clave, atque *Marinus Ghetaldus* in Libris 5. de Resolutione & Compositione mathematica (Romæ 1630. in fol. 2. Alph. 15. plag.) arithmeticam *Vietæam* ad Geometriam elementarem applicarunt & constructiones æquationum simplicium ac quadraticarum dederunt, ita ipse *Harrioteam* ad Geometriam sublimiorem trarsferens curvarum naturam per æquationes algebraicas explicare cœpit & constructionem Cubicarum atque biquadraticarum æquationum, immo etiam supriorum, docuit. Opus hoc inprimis utile ad Algebram speciosam addiscendam.

§. 7. *Cartesius* non tyronibus, sed Geometris peritis scripsit, nimis concisa brevitate, ut adeo Commentario maxime opus sit. Quamvis vero de ejus Geometria egregie meritus sit *Franciscus a Schooten*, quemadmodum ex iis intelligitur, quæ modo diximus (§. 6.); nondum tamen ea dedit, quæ in Commentario consummato quæruntur, sed ipse potius Commentatore haud raro opus habet. Dedit tandem istiusmodi Commentarium, qualis desiderari poterat *Claudius Rabuel*, e Societate Jesu, qui post fata ejus Lugduni Gallorum sub titulo: *Commentaires sur la Geometrie de Mr. Descartes* An. 1730. in 4. reg.

 pro-

prodiit (Alph. 3. plag. 6. Tabb. æn. 23. Textum *Cartesii*, quem presso pede sequitur, ita explanat, atque ita regulis, exemplis, & problematis illustrat, ut nihil occurrat, quod ex Commentario non plene intelligatur. Commentarius hic in linguam latinam transferri & in nova editione Geometriæ *Cartesii* commentatoribus regulis adjungi mereretur: sit ita quod solus sufficiat menti tanti Geometræ penitus intelligendæ.

§. 8. Regulam *Cartesii* construendi æquationes cubicas & biquadraticas uberius exposuit *Thomas Baker* in Clave geometrica catholica (Londini 1684. in 4. (1. Alph. 10. plag. 10. Tab. æn.): ast verum harum Constructionum fundamentum, quod a *Menechmo* didicit *Cartesius*, minime assecutus. Hoc monstravit *Renatus Slusius* Tomo secundo Mesolabi An. 1668. in 4. (plag. 24.) Leodii excusi cum variis Miscellaneis, in quibus algebra ad quadraturas Curvarum, ad quæstiones de maximis & minimis, ad methodum inveniendi punctum flexus contrarii, ad methodum centrobarycam *Guldini* &c. applicatur. Cartesiana inventa etiam promoverunt quemadmodum *Slusius* in Miscellaneis, *Fermatius* in Operibus mathematicis (Tolosæ 1679. in fol.), *Robervallius* (§. 31. 37. c. 1.). & *Barrowius* (§. 19. cap. 3.).

§. 9. *Johannes Kersey*, An. 1671. Londini in fol. edidit Elementa Algebræ Idiomate anglico (Alph. 10. plag. 10.). In iis explicatur arithmetica litteralis & æquationum natura, præceptaque exemplis plurimis illustrantur: Totus *Diophantus* enucleatur, & resolutione & compositione mathematica ex *Gethaldo* multa exhibentur. Idem fere institutum apud Gallos fuit *Joh. Prestet*, cujus nova Matheseos elementa Tomo integro secundo auctiora Parisiis 1694. in 4. (6. Alph. 3. plag.) gallice prodierunt. In iis omnia dogmata arithmetica una cum problematibus *Diophanti* atque *Vietæ* per analysin recentiorem resolvuntur.

§. 10. Similiter *Ozanam* in Elementis gallicis Algebræ (Amstelodami An. 1703. in 8. reg. 1. Alph. 21. plag.) præter calculum litteralem & æquationum doctrinam, artem quoque Dio-

Diophanteam resolvendi problemata numerica egregie illustrat, in qua inprimis excellit hic Autor. Quanti autem fieri debeat analysis *Diophantea*, vulgo a *Cartesianis* neglecta, docuit illustris *Leibnitius* in Actis Eruditorum. A. 1702. p. 219. Etsi autem Algebra *Ozanami* legi mereatur ab iis, qui in Analysi *Diophantea* sese exercere voluerint; tyronibus tamen Algebræ ejus lectio commendanda non est, propterea quod nimis diffusa regularum explicatione nulla regularum applicatione, ad exempla facta, nimis diu detinet lectorem in parte prima, facitque studii hujus in ipso limine desertores, ut taceam ipsum inventorum recentiorum minime gnarum multa brevius tradere potuisse, ita ut & facilius intelligerentur, & sine tædio. Peccat etiam prolixa præceptorum explicatione *Prestetus*: Unde Compendium *ejus* dedit *Bernhardus Lamy*, quod sub titulo: Elemens de Mathematique, *Paris.* A. 1704. in 12. reg. (1. Alph. 7. plag.) auctius recusum tyronibus ob perspicuitatem commendari meretur. Artificia tamen analyseos *Diophanteæ* non attingit.

§. 11. Hi tamen autores applicationem Algebræ ad Geometriam insuper habent: quem defectum supplent *Ozanam* in Tractatu Gallico de locis Geometricis (plag. 8. Tab. 12.) & altero de constructione æquationum (plag. 12. Tab. 9.) Tractatui de lineis primi generis (§. 15. cap. 3.) subjuncto; *de la Hire* in gemino Tractatu ejusdem nominis & argumenti (§. *cit.* c. 3.) & inprimis *Guisnée* in Applicatione Algebræ ad Geometriam gallice Parisiis A. 1704. in 4. (1. Alph. 19. plag. Tab. æn. 6.) edita & ad captum tyronum composita exemplisque selectis instructa, atque Illustris Marchio *de l' Hospital* in egregio Tractatu Analytico de sectionibus Conicis & eorum usu Paris. 1707. in 4. reg. 2. Alph. 12½. plag. Tab. 32. Gall.) Applicatio Algebræ ad Geometriam sublimiorem ex *Hospitaliano* opere omnium optime addiscere licet iis, qui jam in Geometria & Algebra cum fructu versati & acumine pollent. Ceteris magis satisfaciet *Guisnée*, quo lecto faciliores facient in illo progressus.

§. 12.

§. 12. Algebræ quoque præcepta, sed sine exemplis, perspicue explicat *Gerard Kinckhuysen* in Algebra sermone batavo Harlemi An. 1661. in 4. edita, (plag. 14.)& idem in Fundamento Geometriæ (*Grondt der Meetkonst.*) Harlemi An. 1684. in 4. plag. 12.) Sectionum conicarum palmarias proprietates per analysin eruit; in Geometria vero (Harlemi An. 1663. in 4. plag. 22.) constructiones Geometricas problematum per Algebram solutorum elegantes affert. Singula quoque *Abrahamus de Graaf.* in Algebra sua (§. 7. c. 1.) cum laude exequitur. Unde Dn. de *Tshirnhausen* ad studium Algebræ plurimum commendavit hosce autores. Celeberrimus *Newtonus* in Arithmetica universali, quam *Guil. Whiston* Cantabrigiæ Anno 1707. in 8. (1. Alph.) edidit, exempla habet singularia & regulas varias a se inventas. Recusa sunt hæc elementa Londini An. 1722. in 8. (plag. 22.). In nova editione ordo problematum paulisper immutatus, *Whistoni* præfatio & methodus *Hallejana* extrahendi radices ex æquationibus per approximationem omissæ. Prodiere etiam in Batavia, ut nunc facilius haberi possint. Utilem tyronibus operam sumeret, qui eadem Commentario illustraret. Multa enim occurrunt difficilia, quorum rationes non facile assequi licet etiam exercitatioribus. Desunt etiam constructiones geometricæ problematum, quorum tantummodo dantur solutiones per calculum. Monuit jam *Gravesandius* istiusmodi Commentario esse opus & ejus aliquod specimen de inventione divisorum dedit in Elementis Matheseos universalis Lugduni Batavorum An. 1727. in 8. editis (plag. 16. Tabb. æn. 4.), quæ Algebræ principia continent.

§. 13. *Josephus Raphson* in Analysi æquationum universali, quæ (si titulo credimus) secunda vice Londini An. 1702. in 4. prodiit una cum Conamine metaphysico de Spatio reali seu ente infinito (plag. 20.) extractiones radicum ex æquationibus per approximationem facilitavit: *Rollius* in Tractatu gallico de Algebra (Paris. 1690 in 4. plag. 12.) subsidia non contemnenda ad radicum extractionem suppeditat, sed more suo termi-

terminis insvetis utitur, & haud raro nodum in scirpo quærit. Tractatum quoque Gallicum de Algebra conscripsit *de Crouzas*, quem Parisiis Anno 1726. in 8. reg. sub titulo: *Traité de l' Algebre* edidit (1. Alph. 8. plag.). In eo nonnisi Arithmeticam literalem & regulam Algebram propriissime sic dictam explicat, quemadmodum faciunt *Prestetus* & *Ozanamus*, nimium prolixus in vulgaribus, ita ut longo tempore multa patientia addiscenda sint; quorum usum prospicere non licet. Desunt artificia recentiora, quibus calculus præsertim surdorum & extractio radicum mirifice fuit promota. Nec ars exercetur problematis contra illud *Senecæ*: Iter longum per præcepta, breve per exempla.

§. 14. Exemplo *Pascalii* in Triangulo Arithmetico Parisiis An. 1654. Gallice edito, *Hugenii* in Tractatu de Ludo aleæ, qui sub finem Exercitationum Geometricarum *Schootenii* (§. 25.) & Operum variorum Vol. 2. (§. 35.) legitur, aliorumque *Remundus de Monmort* in Tentamine Gallico Analyseos de ludis eventus fortuiti Parisiis An. 1708. in 4. reg. (1. Alph. 14. plag.) excuso & ibidem 1714. auctius (2. Alph. 11. plag.) recuso ad Sortem in ludis diversis determinandam analysin applicavit: qui combinationum doctrinam egregie illustrat & insignia artificia analytica edocet. In altera editione leguntur literæ *Joannis* & *Nicolai Bernoulliorum* de hoc argumento ad Autorem datæ. Idem præstitit *Jacobus Bernoulli* in opere posthumo Artis Conjectandi (Basil. 1713. in 4. Alph. 1. plag. 20. Tab. 1.) Accessit huic operi Tractatus de seriebus infinitis, mox commendandus. Inprimis autem hoc in argumento commendari meretur *Abrahami de Moivre* opus pereruditum & multa nova continens, quod sub titulo: *The doctrine of chances, or a Method of calculating probability of Events in play* Londini 17. in 4. reg. (Alph. 1.).

§. 15. *Ægidius Franciscus de Gottignes*, e Societate Jesu, in Logistica universali (Neap. An. 1687. in fol. 5. Alph. 14. plag. Tab. 5.) principia Algebræ labefactare aggressus est; sed nondum in scirpo quærit & per ambages eo tendit, quo recta pertingere datur. Condonondum hoc videbitur ea ætate,

(*Wolfii Mathesis. Tomus V.*)

qua Algebræ ſpecioſæ infantia erat: ſed ſi noſtra reperiantur, qui in dubitationem adducere volunt, quæ dudum ſtabilita ipſoque diuturno uſu probata fuerunt, vix ferendum. Noſtrum igitur non eſſe exiſtimamus de iis ſcriptis loqui, quæ hic recenſeri poterant.

§. 16. *Hugo de Omerique* in Analyſi Geometrica (Gadibus Anno 1968. in 4.) methodo communi algebraica, quæ per æquationes procedit, aliud ſubſtituit per rationes argumentandi genus: quod tamen non adeo late patet, quam illa. Applicat illud ad problemata, per Algebram ab aliis jam ſoluta & parum difficultatis habentia. Non tamen uſu ſuo caret, cum ad demonſtrationes ſyntheticas manu ducat. Monet *Pemberton* in præfatione ad Conſpectum Philoſophiæ Newtonianæ, *Newtonum* laudaſſe in hoc autore, quod Analyſin veterum reſtituere conatus fuerit.

§. 17. Methodum *Cavallerii* ad calculum aptare ſtuduit *Johannes Wallifius* in Arithmetica infinitorum An. 1655. primum edita (§. 34. c. 1.) in qua per ſummationes ſerierum infinitarum quadraturas curvarum & cubationes ſolidorum determinare agreſſus eſt: Sed cum inductione uteretur, quæ minus demonſtrativa videri poterat, *Ism. Bullialdus* per maximas ambages more veterum Geometrarum hoc arithmeticæ genus demonſtravit in Opere novo Arithmeticam infinitorum libris 6. comprehenſo. (Pariſ. An. 1682. in fol. 4. Alph. 16. plag.). Hodie tamen paucis lineis plura præſtare licet, quam quæ integro opere *Bullialdi* comprehenduntur.

§. 18. Veram viam ingreſſus non eſt *Wallſius*, felicius id præſtitit Illuſtris *Leibnitius* invento calculo differentiali & integrali, quem primum in Actis Eruditorum An. 1684. p. 467. publicavit, cum dudum ante 1677. eundem in litteris cum celeberrimo *Newtono* communicaſſet, qui in egregias methodos circa idem tempus inciderat: quemadmodum apparet ex litteris *Leibnitii* atque *Newtoni*, quæ leguntur apud *Walliſium* Operum Tomo tertio, fol. 634. 648. Cum enim *Newtonus* in literis d. 24. Octobr. 1676. ſcriberet: *inverſa de Tangentibus problemata ſunt in poteſtate atque illis diffici-*

ficiliora: ad quæ ſolvenda uſus ſum duplici methodo, una concinniori, altera generaliori. Utramque viſum eſt in præſentia litteris tranſpoſitis conſignare: Saccdioffh &c. Literæ in ordinem ſuum diſpoſitæ hunc habent ſenſum: *Una methodus conſiſtit in extractione fluentis quantitatis ex æquatione ſimul involvente fluxionem ejus: altera tantum in aſſumtione ſeriei pro quantitate qualibet incognita, ex qua cetera commode derivari poſſunt, & in collatione terminorum homologorum æquationis reſultantis ad inveniendos terminos aſſumtæ Seriei*: mox *Leibnitius* ipſum Calculum ſuum differentialem in literis d. 21. Jun. 1677. apertis verbis perſcripſit. Ingenue hoc ipſum fatetur *Newtonus* in prima & ſecunda editione Principiorum Philoſophiæ naturalis Mathematicorum *ſchol. Lemmat. 2. lib. 2. p.* 253. 254. In ultima vero ingenuam confeſſionem, quæ viros ſummos maxime decet, omiſit. Ratio patebit inferius. *Leibnitius* calculum ſuum publici juris fecit in Actis Eruditorum An. 1684. p. 467. & *Neuwtonus* methodum ſuam in prima editione Principiorum modo laudatorum, quæ An. 1687. prodiit. Poſtea *Jacobi* ac inprimis *Joannis Bernoulli* opera calculus *Leibnitii* ad majorem perfectionem perductus.

§. 19. Calculi differentialis leges expoſuit & problematibus exquiſitis illuſtravit illuſtris Marchio *de l' Hoſpital* Præceptore uſus *Joanne Bernoulli* in egregio Opere Gallico Analyſeos infinite parvorum (Pariſ. 1696. in 4. reg. 1. Alph. 2. plag. Tab. 11.), omnibus Geometriæ ſublimioris Studioſis maximopere commendando. Subinde tamen Commentatore opus habet, ut a tyronibus Geometriæ ſublimioris intelligatur. Equidem *de Crouzas* Commentarium edidit, qui idiomate gallico Pariſiis An. 1721. in 4. (2. Alph. 1½. plag. 4. Tab.); ſed plerumque nonniſi calculos, quos Autor contraxit, extendit, in difficilioribus vero lectorem deſtituit. Unde magis ſatisfaciet *Varignonius* in ſuis dilucidationibus, quæ ſub titulo: *Eclairciſſements ſur l' Analyſe des infiniments petits* poſt fata ipſius Pariſiis An. 1725. in 4. (plag. 16. Tabb. 6.) prodierunt. Opus egregium *Hoſpitalis* anglice vertit

tit & altera parte de calculo integrali auxit *E. Stone* ac sub titulo: *A Method of fluxions both direct and inverse* Londini 1730. in 8. reg. (1. Alph. 6. plag. Tabb. 15.) edidit.

§. 20. Equidem *Hospitalius* addere constituerat partem alteram de calculo integrali; sed cum *Leibnitius* scientiam infiniti dare sibi proposuisset, a proposito suo destitit. Enimvero præter specimina in Actis Eruditorum An. 1702. & An. 1703. nihil ejus publice comparuit. Interea calculi integralis faciliores regulas dare & exemplis illustrare consultum existmabat *Carré*, cujus scriptum gallicum: *Methode pour la mesure des surfaces, la dimension des solides, leurs centres de pesanteur, de percussion & d' oscillation par l' application du calcul integral* prodiit Paris. An. 1700. in 4. reg. (plag. 15. Tabb. 4.). Sed longius progressus *Gabriel Manfredius* in Opere eximio de constructione æquationum differentialium primi gradus (Bononiæ A. 1707. in 4. 1. Alph. 2. plag. Tabb. 7.) & vir summus *Newtonus* in Tractatu de quadraturis Curvarum, qui Opticæ subjungitur, præclara dedit. Plura quoque in parte altera dedit *Stone* de hoc calculo, quam quæ in Methodo DN. *Carré* leguntur.

§. 21. Postquam *Nicolaus Mercator*, Holsatus, in Logarithmotechnia (Lond. 1668. in 4. cum *Michaëlis Angeli Riccii* Exercitatione Geometrica edita) prop. 17. p. 31. seqq. quadraturam hyperbolæ per seriem infinitam dedisset; serierum doctrinam per extractionem radicum insigniter promovit & ad curvarum quadraturas & rectificationes applicavit vir summus *Isaacus Newtonus*: cujus Analysin per quantitatum series, fluxiones ac differentias cum enumeratione linearum tertii ordinis, varios tractatus analyticos a viro celeberrimo diu ante compositos continentem, Londini 1711. in 4. (plag. 16. Tabb. 2) edidit *Guil. Jones*. Quemadmodum vero hoc opus ad serierum doctrinam perdiscendam multum commendari meretur; ita recondita de hoc argumento superaddi debent ex celeberrimi *Bernoullii* dissertationibus de seriebus infinitis (§. 14.).

§. 22. Serierum doctrinam ex inventis *Mercatoris*, *Newtoni*, *Leib-*

Leibnitii atque *Johannis Bernoulli* exhibuit quoque *Georgius Cheynæus* in Methodo Fluxionum inversa (Londini 1703. in 4. reg. plag. 6.). Multo vero ante methodum serierum *Mercatoris* & *Newtoni* multis exemplis illustravit *David Gregorius* in Exercitatione geometrica de dimensione figuram Edinburgi An. 1684. in 4. edita (plag. 7. Tabb. 1.). Horum exempla complura computata sunt a patruo ipsius *Jacobo Gregorio*, quemadmodum ipse fatetur p. 2. 3. & 4. De Geometria enim sublimiore optime meritus *Jacobus Gregorius*, quemadmodum ex ejus Libro de vera Circuli & Hyperlolæ Quadratura cum Geometriæ parte universali, quantitatum curvarum transmutationi inserviente colligitur. Prodiit Pataviæ 1668. in 4. Tractatus de Quadratura constat plag. 8. Appendix de Geometriæ parte universali plag. 19. Ceterum hinc perspicere licet, quid ab eo expectandum fuisset, nisi fata propositum ejus intervertissent.

§. 23. *Joan. Craige*, Scotus, 1685. Londini in 4. (plag. 6. Tab. I.) edidit Tractatum de Methodo figurarum lineis rectis & curvis comprehensarum Quadraturas determinandi & A. 1693. addidit Tractatum de figurarum curvilinearum Quadraturis & Locis Geometricis, Londini in 4. (plag. 11. Tab. I.) excusum. Utitur equidem calculo differentiali *Leibnitii*, cum in Anglia calculus fluxionum adhuc ignoraretur, nec editis A. 1687. Principiis Philosophiæ naturalis mathematicis *Newtoni* ullus Geometra de eodem cogitaret; per ambages tamen adhuc incedit, quod calculus integralis seu summatorius nondum ipsi esset perspectus. In quadrandis igitur curvis utitur Theorematis *Barrowianis*, quibus opus non habemus, si calculi differentialis vis fuerit perspecta, cujus pars quædam est summatorius seu integralis, qui dicitur. Inde est, quod etiam *Gregorius* alia via incedat, etsi seriebus infinitis utatur. De Locis Geometricis formulas generales tradit *Craigius*, quas *Hospitalius* in opere analytico de sectionibus conicis (§. 10.) uberius explicavit & illustravit, & nos in Elementis Algebræ dilucidatas ad facillimam intelligentiam

tiam reduximus, via ad ulteriora planissima strata. Enimvero ubi calculus integralis, quem Angli methodum fluxionum inversam vocant, in Anglia quoque invaluisset; idem *Craigius* Londini An. 1718. in 4. (plag. 12½.) Libros duos de Calculo fluentium & totidem de Optica analytica edidit, quorum istis doctrinam de Quadraturis Curvarum promovet.

§. 24. Quæ apud *Hospitalium* in Analysi infinite parvorum, *Carresium*, sive *Quadratum*, *Cheynæum*, *Gregorium & Craigium* in Methodo figurarum lineis rectis & curvis comprehensarum Quadraturas determinandi & in Tractatu de Quadraturis figurarum Curvilinearum occurrunt; ea in unum volumen congessit & perspicue explicavit, varia etiam problemata, quorum solutiones in Actis Eruditorum Lipsiensibus extant, inprimis quæ in iisdem *Leibnitius* de motuum cœlestium causis physicis dedit, illustravit *Carolus Hayes* in opere anglico, quod sub titulo *Traitise of Fluxions or introduction to mathematical and mechanical Philosophy* Londini 1704. in fol. (3. Alph. 3. plag.) prodiit.

§. 25. Regulas Algebræ Communis atque Analyseos *Leibnitianæ*, hoc est, calculi differentialis & summatorii uno opere complexus est *Carolus Reynau*, quod sub titulo: *Analyse demonstrée* Paris. 1708. in 4. reg. (Alph. 5. plag. 7. Tabb. æn. 5.): sed in exemplis parcior videri poterat, quam ut tyronibus inservire possit, provectioribus tamen commendandus. Neque etiam ea præstitisse videtur, quæ titulus promittit, cum eas demonstrationes in hoc Opere non reperias, quæ forsan in eodem quæsiveris demonstrationis notionem distinctam animo complexus.

§. 26. Calculus fluxionum, qui cum differentiali & summatorio idem est, in Anglia primum comparuit, cum *Isaacus Newtonus* Opticam suam ederet An. 1704. de qua suo loco dicemus. Addidit enim præter Enumerationem Linearum tertii Ordinis seu curvarum secundi generis Tractatum de Quadratura curvarum, in quo hanc doctrinam plurimum promovit, & calculum hunc explicat eademque

demque utitur. Ex intervallo *Guilielmus Jones* Londini Anno 1711. in 4. plag. 16. Tab. 2. edidit *Newtoni* Analysin per quantitatum series, fluxiones ac differentias cum enumeratione linearum tertii ordinis, ex quo apparet, quid *Newtonus* in Geometria sublimiori per analysin promota præstiterit, & quantum serierum doctrinam promoverit. Cum vero in tractatu de enumeratione linearum tertii ordinis demonstrationes desiderarentur; hunc defectum supplevit *Jacobus Stirling* in Illustratione Tractatus D. *Newtoni* de Enumeratione linearum tertii Ordinis, quæ Oxoniæ A. 1717. in 8. (plag. 9½.) lucem adspexit & multa præclara continet.

§. 27. Haud ita pridem, nimirum An. 1736. *Johannes Colson* Methodum fluxionum & infinitarum serierum *Newtoni* in sermonem anglicum translatam edidit Londini in 4. sub titulo: *The Method of fluxions and infinite series, With its application to the Geometry of curve-lines.* (Alph. 2.). Tractatus hic idem est, quem publico An. 1728. in præfatione ad Conspectum Philosophiæ *Newtonianæ* promiserat *Pemberton.* Egregio Commentario librum hunc illustravit Editor, qui maximam operis partem complet & multa offert, quæ Analyseos cultores alibi frustra quærunt. Ipse *Newtonus* docet, quomodo æquationes in series infinitas resolvantur, quomodo fluentium fluxiones seu quantitatum variabilium differentialia & ex fluxionibus fluentes seu differentialium summæ inveniantur, & per methodum fluxionum maxima & minima, tangentes, quadraturæ & rectificationes curvarum determinentur. Ubi simul ostenditur, quomodo curvæ quadrabiles detegantur, curvæ cum sectionibus conicis comparabiles investigentur, curvæ rectificabiles inveniantur & quæ sunt alia hujus generis.

§. 28. Anno 1730. *Jacobus Stirling* Londini in 4. charta augusta (Alph. 1. plag. 15.) edidit Methodum differentialem sive Tractatum de Summatione & interpolatione serierum infinitarum. In eo potissimum docet, quibus artificiis assequamur valores illarum curvarum, quæ summari nequeunt, ut habeatur

tur ſolutio illorum problematum, quæ ex quadraturis pendent. Non modo inventa aliorum exponit, verum etiam proprius hanc doctrinam plurimum promovit, ut adeo opus inſigne ſublimioris Matheſeos ſtudioſis ſummopere ſit commendandum.

§. 29. Commendanda hic quoque ſunt *Abrahami de Moivre* Miſcellanea analytica de ſeriebus & Quadraturis, quæ eodem anno Londini in 4. reg. (Alph. 1. plag. 9.) prodiere. Acceſſere variæ conſiderationes de Methodis comparationum, combinationum & differentiarum, ſolutiones difficiliorum aliquot problematum ad ſortem ſpectantium, itemque conſtructiones faciles orbium Planetarum, una cum determinatione maximarum & minimarum mutationum, quæ in motibus corporum cœleſtium occurrunt. Multa in hiſce Miſcellaneis occurrunt, quibus non modo ſerierum doctrina, verum etiam menſura ſortis & alia ad Matheſin ſublimiorem ſpectantia capita promoventur.

§. 30. Quæ *Newtonus* in Tractatu de Quadraturis curvarum dederat, alia methodo inveſtigare docuit *Rogerus Coteſius*, Profeſſor Aſtronomiæ & Experimentalis Philoſophiæ apud Cantabrigienſes, in Harmonia Menſurarum ſive Analyſi & Syntheſi per rationum & angulorum menſuras promota, quam cum aliis ejusdem opuſculis Mathematicis ejus ſucceſſor *Robertus Schmith* Cantabrigiæ An. 1722. in 4. (plag. 50. Tab. I.) poſt mortem ejus præmaturam edidit. Potiſſimum ipſi propoſitum eſt dare *Logometriam*, quam vocat, qua ſcilicet per Logarithmos, ſinus atque tangentes inveſtigantur, quæ hactenus ad Quadraturam circuli & hyperbolæ fuerunt reducta, differentialium ſummatione ad menſuras rationum & angulorum reducta. In operibus Miſcellaneis Æſtimatio errorum in mixta Matheſi per variationes partium Trianguli plani & ſphærici, qualia theoremata dedimus in Trigonometria plana, Tractatus de Methodo differentiali *Nevvtoniana*, quem multo ante ab eo conſcriptum dicit Autor, quam a *Joneſio Nevvtoni* de eodem argumento Tractatus in Analyſis ſuperius commendata (§. 2.)

(§. 2.) ederetur, Canonotechnia sive constructio Tabularum per differentias & Tractatus de Descensu gravium, de motu pendulorum in Cycloide & de Motu projectorum. Quomodo inventa *Cotesiana* ex *Nevvtonianis* deducantur, docet Anonymus in Epistola ad Amicum de *Cotesii* inventis Londini eodem adhuc Anno in 4. edita (plag. 13).

§. 31. *Leibnitius* calculum differentialem & summatorium primum exercuerat in quantitatibus finitis, veluti in summandis potentiis numerorum, & deinde lecto opere *Hugeniano* de horologio oscillatorio & opere Conico *Gregorii a S. Vincentio* ad quantitates infinite parvas applicavit, atque sic via vere analytica in calculum differentialem & summatorium seu integralem incidit, quali hodie in Geometria sublimiori utimur. In Anglia eundem calculum seu methodum fluxionum styloAnglicano ad quantitates finitas applicavit *Brook Taylor* in Methodo incrementorum directa & inversa, quæ Londini 1715. in 4. (plag. 15½.) prodiit. De obscuritate, qua in scribendo usus Autor, publice conquestus est *Joannes Bernoulli*, ut adeo mirari desinant lectores in sublimioribus nondum satis versati, siquidem hinc inde hæsitent. Continentur tamen in hoc opere lectu digna.

§. 32. Integram Mathesin puram una cum Algebra & calculo differentiali succincte explicavit *Wilhelmus Jones* in Synopsi palmariorum Matheseos, Anglice Anno 1706. Londini in 8. (plag. 20.) edita; sed sine interprete a tyronibus vix intelligetur, qui tamen hoc duce commode utuntur in repetendis iis, quæ ex aliis Autoribus didicere. In iis, quæ ad Algebram communem spectant, cum hac Synopsi convenit Tractatus de Algebra itidem Anglice scriptus & Londini 1717. in 8. reg. editus (plag. 15.) a *Ronaynio*: recentior enim analysis in eo desideratur, & methodus Tangentium atque de maximis & minimis per methodum exhaustionum illustratur.

§. 33. Equidem *Bernhardus Nieuvventiit* in Considerationibus circa Analyseos ad quantitates infinite parvas applicatæ principia & calculi differentialis usum

ſum in reſolvendis problematibus Geometricis (Amſtel. 1694. in 8. plag. 3.) & in Conſiderationibus ſecundis circa calculi differentialis principia (Amſtel. An. 1696. in 8. plag. 3.) contra calculum differentialem nonnulla dubia movit, & hinc in Analyſi Infinitorum (Amſtelod. A. 1695. in 8. plag. 20. Tab. 21.) methodum aliam ſubſtituit; ſed non modo *Leibnitius* atque *Bernoullius* in Actis Eruditorum A. 1695. p. 310. & ſeqq. it. p. 369. & ſeqq. & An. 1697. p. 125. & ſeqq. verum etiam Cl. *Jacobus Hermannus*, nunc Mathematum Profeſſor Francofurtanus, in Reſponſione ad illas conſiderationes ſecundas Baſileæ A. 1700. in 8. (plag. 4.) iisdem abunde ſatisfecerunt, quamvis memini, quod hic *Leibnitio* non ex aſſe ſatisfecerit, quod quantitates infinite parvas tanquam entia realia conſideret, cum tamen non ſint niſi modus loquendi, qui exhibet ſtylo *Jungiano* toleranter vera, quemadmodum clariſſime docui in Ontologia, in qua realia ab imaginariis ubivis diſcrevi. Analyſi tamen infinitorum *Nieuwentiitiana* in rem ſuam uti norunt intelligentes. *Bernhardus de Fontenelle*, Academiæ Regiæ ſcientiarum, quæ Pariſiis floret, Secretarius, idiomate patrio An. 1727. Pariſiis in 4. reg. (Alph. 3. plag. 3. Tab. I.) edidit Elementa Geometriæ infinitorum (*Elemens de la Geometrie des infinis*), in quo potiſſimum ſibi propoſitum habet, ut calculos hodie receptos ex ipſa notione infiniti deducat. Conſiderat vero, quemadmodum omnibus fere Mathematicis ſolenne eſt, infinite magnum & infinite parvum Mathematicorum per modum entis realis. Satisfacere intendit theoria ſua iis, quibus Analyſis infinitorum moderna ſuſpecta videtur, ut adeo hic loci commemorari debuerit hoc opus.

§. 34. In Actis Philoſophicis Anglicanis pro menſibus Septembri & Octobri Anno 1708. editis ſcripſerat *Johannes Keill*, inventorem Arithmeticæ fluxionum ſine omni dubio primum eſſe *Nevvtonum*, eandem tamen poſtea mutatis nomine & notationis modo editam eſſe a *Leibnitio* in Actis Eruditorum. *Leibnitius*, cui hæc Acta miſerat Cl. *Sloane*, tum Societatis Regalis Secre-

Secretarius, in literis d. 4. Martii An. 1711. datis de injuria ſibi illata conqueſtus deſiderabat, ut *Keillius* publice teſtaretur, non fuiſſe ſibi animum *Leibnitio* imputandi, quaſi alienum inventum ſibi attribuerit. Enimvero *Keillius* in epiſtola ad eundem *Sloanium* data, quæ primum ſcripſerat defendit & oſtendere conatur, quomodo ex *Newtonianis* ſua deduxerit. Cum candorem ſuum jam apertius, quam ante oppugnari exiſtimaret *Leibnitius*, ſibique parum convenire arbitraretur, ut provectiori ætate poſt tot documenta vitæ eum apologia defenderet; in literis ad *Sloanium* d. 29. Decembris An. 1711. datis æquitati Societatis committebat, annon coërcendæ ſint vanæ & injuſtæ vociferationes, quas ipſi *Newtono* improbari putabat confiſus eundem ſententiæ ſuæ libenter daturum indicia. Juſſit Societas monumenta antiquiora conſuli & ſociis aliquot in mandatis dedit, ut in eam rem inquirerent & quæ in ſcriptis antiquis invenirent ad eam una cum ſententia ſua referrent. Hi pronunciarunt, *Newtonum* eſſe primum inventorem, nec *Keillium* inventum eidem vindicantem injuriam feciſſe *Leibnitio*. Juſſu adeo Societatis Regiæ in lucem editum eſt Londini 1712. in 4. (plag. 15½.) Commercium epiſtolicum D. *Johannis Collins* & aliorum de Analyſi promota & per Europam inter Mathematicos diſtributum. Continentur in eo excerpta ex literis, quorum autographa conſervat illuſtris Societas Regalis, una cum epiſtolis *Newtoni* atque *Leibnitii*, quæ jam apud *Walliſium* Tomo tertio Operum leguntur, Tractatus de Analyſi per æquationes numero terminorum infinitas a *Joneſio* editus (§. 26.), epiſtolæ *Leibnitii* ad *Hans Sloane* & *Keillii* reſponſiones ad eaſdem, de quibus modo diximus & Relatio ac ſententia Commiſſariorum, quam modo retulimus.

§. 35. *Leibnitius* tunc temporis Viennæ in Auſtria degebat, nec Commercium epiſtolicum ibidem videre ipſi contingebat. Cum igitur ex ipſo per litteras quærerem, num idem in Actis Eruditorum recenſeri & quædam ad ipſum reponi conſultum judicaret; conſultius ipſi videbatur, ut charta quadam volante ſuppreſſo loci

ac Autoris nomine publico significaretur, ipsum esse Viennæ nec Commercium epistolicum vidisse, atque ex litteris *Joannis Bernoulli* excerptum publicaretur, quo rationes continebantur, cur inventum calculi differentialis ipsi dubium reddi minime possit. Inde ansam arripiebat *Keillius* cum in Transactionibus Anglicanis, tum in Diario literario, quod Hagæ Comitum prodibat, paulo durius de *Leibnitio* atque *Bernoullio* scribendi. Quamobrem cum *Leibnitio* limites modestiæ transgredi videretur, a se impetrare non potuit, ut ipse responderet. Scripsit tamen sententiam suam ad amicos, ad quas ejus literas *Nevvtonus* quoque respondit, tumque apparuit, quæ a *Keillio* dicta fuerant, consentiente & approbante *Nevvtono* prolata fuisse. Epistolas hasce *Leibnitii* atque *Nevvtoni* idiomate Anglico cum excerptis nonnullis aliis Historiæ fluxionum suæ latine conscriptæ adjecit *Josephus Raphson*, in qua originem & progressum hujus methodi brevissimo compendio exhibere intendit. Prodiit Londini 1715. in 4. (plag. 16.). Quid sibi proposuerit Autor, ipse in præfatione monet, scilicet inventiones præcipuas in hoc genere primis suis autoribus speciatim asserere & vindicare, & inprimis D. *Nevvtono* inventori longe & tempore primo, & præstantia inventionum præcellentissimo, & aditum pate facere tyronibus ad hæcce facilius & explicatius, adeoque ut cuivis introductionis loco ad *Nevvtoniana, Cheyneana* aliorumque inventa & congesta in hoc genere inserviret. Si quis historiam Analyseos infinitesimalis conscribere vellet, ut origo & progressus pateret ac unicuique, quod suum est, tribueretur; illi multo majore studio ac solertia inquirendum esset in ea, quæ a tempore *Cavallerii* usque ad præsens a Geometris fuere edita, & accurate determinandum, quantum unusquisque ex inventis alterius sibi notis vel proficere potuerit, vel actu profecerit: ubi certa a probabilibus exacte distinguenda. Sed alibi in Logica de historia scientiarum & artium mentem nostram aperuimus & uberius explicavimus.

§. 36. Controversia hæc de inventore calculi differentialis

postea magna animorum contentione agitata, præsertim inter *Keillium* & *Joannem Bernoullium*, de qua inprimis legi possunt Acta Eruditorum Lipsiensia. Nostrum jam non est eam definire, cum discussioni hic non sit locus, sine qua definiri nequit, nec hoc nobis sumimus. Neque opus est ex Actis laudatis huc transcribere, quæ ibidem legi possunt. Nos veneramur merita *Newtoni*, veneramur merita *Leibnitii*, *Bernoullii* aliorumque; æquum existimamus, ut suum cuique tribuatur & gloria, quæ dat vires præclara agendi, excitentur magna ingenia; in aliorum merita extollenda proni sumus: principiis tamen Philosophiæ moralis adversum judicamus de laude altercari, nec ulla nos autoritas movebit, ut altercationibus istiusmodi calculum adjiciamus.

§. 37. Antequam igitur recensioni præsenti Autorum colophonem imponamus, monemus curvarum descriptionem plurimum promovisse *Colinum Mac Laurin*, Matheseos in collegio novo Abredonensi Professorem, & *Gulielmum Braikenridge*, Ecclesiæ Anglicanæ Presbyterum. Edidit ille Londini An. 1720. in 4. (plag. 19. Tabb. 12.) Geometriam organicam, sive Descriptionem Linearum curvarum universalem. Docet in eadem, quomodo lineæ secundi, tertii, quarti tandemque ordinis cujuscunque describantur, & ubi ostendit, quomodo lineæ omnium ordinum altiorum ope linearum ordinis cujuscunque inferioris describantur, simul descriptionem Curvarum organicam *Newtonianam* demonstrat. Plurima hic reperies ad Geometriam sublimiorem spectantia. Alter horum autorum Londini 1733. in 4. in publicam lucem emisit Exercitationem Geometricam de Descriptione Linearum Curvarum (plag. 10.). Tradit primum descriptionem curvarum primi generis, seu linearum secundi ordinis, deinde vero descriptionem Linearum cujuscunque ordinis ope Linearum ordinis inferioris & denique descriptionem sectionum conicarum ope plurium rectarum circa polos moventium. Diversa tamen sunt ejus theoremata ab illis, quæ tradit prior, & plura hisce etiam

majora promittit in una aut altera exercitatione post paucos menses edenda: Nobis tamen huc usque præter eam, quam hic commemoramus, nullam videre licuit. Utiles sunt descriptiones curvarum generales ad Theoriam Curvarum condendam, qualem adhuc desiderari supra (§. 19. c. 3.) monuimus. Quid enim tribuendum sit definitionibus geneticis, vel ex Synopsi Geometrica *Honorati Fabry*, e Societate Jesu, intelligitur, quæ Lugduni Gallorum in gratiam tyronum edita An. 1669. in 12. edita (Alph. 1. cum figuris multis in folio excusis), & cui accessere tria opuscula, nimirum de Linea Sinuum & Cycloide, de maximis & minimis centuria & synopsis Trigonometriæ planæ. Absit tamen, ut cum Autoribus Anglis, quorum Tractatus hic commendavimus, æquipares *Bartholomæi Intieri*, Florentini, ad nova arcana Geometrica detegenda aditum, qui Beneventi 1703. in 4. (plag. 13. Tabb. 2.) & *Apollonium* ac *Serenum* Promotum, qui Neapoli 1704. in 4. (plag. 9. Tab. 1.) lucem adspexit, ubi sectionum conicarum graduum superiorum genesin tradit. Atyronibus tamen ea legi non in consultum est, antequam ad sublimiora Anglorum inventa pedem promoveant.

§. 38. Cœterum multa ad calculum differentialem & integralem spectantia peti debent ex Actis Eruditorum, ex Historia & Commentariis Academiæ Regiæ Scientiarum, qui quotannis Parisiis prodeunt & Amstelodami recuduntur, ex Transactionibus Anglicanis, & seqq. ex Miscellaneis Berolinensibus & Commentariis Petropolitanis, de quibus singulis supra diximus (§. 36. & seqq. c. 1.). Inter Algebraistas inprimis quoque nominari debebant *Johan. Faulhaberus* ex textore Mathematicus insignis, cum quo per aliquod tempus egit *Cartesius*, cum Algebræ vacaret, & *Justus Byrgius Wilhelmi* Hassiæ Landgravii Mechanicus, sed illius scripta perpauca, hujus nulla videre hactenus licuit.

§. 39. Coronidis loco adhuc observamus, in gratiam tyronum idiomate Anglico Institutiones fluxionum edidisse *Humphredum Ditton*, in quibus præcepta calculi explicat & exemplis

plis quibusdam selectis illustrat, cum istiusmodi libellus adhuc desideraretur. Post obitum Autoris novam editionem dedit *Johannes Clarke*, Regi a sacris ordinariis, quæ sub titulo: *An Institution of fluxions* Londini An. 1726. in 8. reg. (plag. 16.) prodiit. In eorundem usum L. *Trevigar* Sectionum conicarum elementa methodo facillima demonstrata edidit Cantabrigiæ Anno 1731. in 4. reg. (Alph. 1. plag. 1. Tabb. æn. 12.). In compendium misit Tractatum analyticum de sectionibus conicis *Hospitalii*, in quo methodus genetica cum analytica conjungitur, ut in Geometria & Algebra vel mediocriter versatus præcipuas sectionum conicarum proprietates addiscere possit. Addidit nonnulla, quæ in Hospitalio desiderantur, sed ad Principia Philosophiæ naturalis mathematica intelligenda requiruntur. In Italia vero *Franciscus Xaverius Brunetti*, Sacrario Pontificis Maximi *Clementis* XII. Præfectus, sub titulo: *Dell' Arithmetica commune e speciosa Trattato*, seu Tractatus de Arithmetica communi & speciosa, Romæ An. 1731. in 4. (Alph. 1. plag. 11. Tab. 2.) Introductionem edidit ad scripta arithmetica & analytica intelligenda, in quo præter Arithmeticam, Algebram quoque & Analysin infinitesimalem recentiorem perspicue explicat, ut adeo plura in hoc opere reperiantur, quam titulus promittit.

CAPUT V.

De TRIGONOMETRIA.

§. 1.

TRigonometria in gratiam Astronomiæ primum inventa: unde *Ptolemæus* sub initium operis sui Astronomici tantum hujus doctrinæ exponit, quantum scopo suo sufficere visum est, & recentiores Astronomi passim institutionibus Astronomicis Trigonometriæ præcepta præmiserunt.

§. 2.

§. 2. Magis hanc ſcientiam excoluit *Johannes de Regio Monte* in Libris quinque de Triangulis omnimodis An. 1464. conſcriptis & Norimbergæ, mortuo Autore, a *Schonero* An. 1533. in fol. (2. Alph. 11. plag.) editis. Idem quoque Canonem Sinuum novum condidit aſſumto radio pro unitate eoque in fractiones decimales diviſo, cum ante idem in 60 ſcrupula divideretur. Immo ipſe primum radium ſumebat 60 & nonniſi in fractiones decimales ſubdividebat: ſed cum animadverteret præſtare in calculo, ſi ſinus totus ſit 1, canonem ſuum reformavit, aut novum potius condidit. Canon Sinuum ad radium 60000 conſtructus ſubjungitur ejusdem Tabulis Directionum Profectionumque, de quibus in Aſtronomia dicemus. Eum in plerisque ſequitur *Clavius* (§. 24. c. 1.).

§. 3. Canonem Sinuum ad radium 1000000000000000 & ad dena quæque ſcrupula ſecunda Quadrantis ſupputavit *Joachimus Rheticus*, quem mortuo Autore una cum Sinibus primi & poſtremi gradus ad eundem radium & ad ſingula ſecunda ſcrupula Quadrantis edidit *Bartholomæus Pitiſcus* Francof. ad Mœnum 1613. in fol. (3. Alph. 21. plag.), qui adjecit principia Sinuum ad radium 100000 0000000000000000 ſupputata & ſinus decimorum, triceſimorum & quinquageſimorum quorumque ſcrupulorum ſecundorum per prima & poſtrema 35 ſcrupula prima ad radium 10000 0000000000000000. Hujus Canonis uſus inprimis eſt in corrigendis Tabulis Sinuum atque Tangentium vulgaribus.

§. 4. Multum nimirum Trigonometriæ perficiendæ incubuit *Rheticus*, Mathematum Profeſſor Wittebergenſis, ſed qui relicta Profeſſione ad *Copernicum* profectus & apud eum egit: quemadmodum ex Opere Palatino de Triangulis apparet, quod ab ipſo cœptum conſummavit L. *Valentinus Otho*, Principis Palatini Friderici IV. Electoris Mathematicus. Prodiit An. 1616. in fol. (21. Alph. 17. plag.). Continentur in eo 1. *Rhetici* libri tres de fabrica Canonis doctrinæ triangulorum & 2. ejusdem liber quartus de triangulis globi: 3. *Othonis* libri quinque de triangulis globi

bi ſine angulo recto: 4. prolixus Canon triangulorum.

§. 5. *Pitiſcus* vero & ipſe Trigonometriam egregie illuſtravit editis quinque de eadem libris An. 1599. quorum editio tertia auctior prodiit Francof. A. 1612. in 4. (2. Alph. 15. plag.). Libris iſtis ſubjicitur Canon Sinuum, tangentium & ſecantium una cum libris undecim, in quibus trigonometriæ uſus in ſolutione problematum Geodæticorum, altimetricorum, architectonicorum, geographicorum, gnomonicorum & aſtronomicorum oſtenditur, quæ a nobis ſuis in locis per eandem ſoluta.

§. 6. Non minus commendari merentur *Willebrordi Snellii* doctrinæ Triangulorum Canonicæ libri quatuor, quibus Canonis ſinuum, tangentium & ſecantium conſtructio, triangulorum tam planorum, quam ſphæricorum expedita dimenſio breviter ac perſpicue traditur una cum Canone Secantium. Poſt mortem Autoris eos edidit *Martinus Hortenſius*, Delfenſis (Lugd. Bat. 1627. in 8. plag. 29) & tractatus problematum geodæticorum & ſphæricorum adjecit, quibus utrique Trigonometriæ uſus edocetur.

§. 7. A. 1591. *Philippus Lansbergius* edidit Geometriam Triangulorum, quæ Anno 1663. Middelburgi in Seelandia in fol. (plag. 11.) auctius recuſa & primum inter opera ejus locum tenet (§. 26. c. 1.). In eo Trigonometriam tam planam, quam ſphæricam & conſtructionem ſinuum atque tangentium perſpicue explicat, quemadmodum jam fecerat *Georgius Purbachius*, Præceptor *Regiomontani*, Profeſſor Matheſeos in Academia Viennenſi, qui in promovendo Matheſeos ſtudio plurimum operæ collocavit, & de cujus meritis plura dicemus in Aſtronomia.

§. 8. Inſignis ad Trigonometriam acceſſio facta eſt, Logarithmis a *Johanne Nepero*, Barone *Merchiſtonii* Scoto, in eandem introductis. Prodiit mirifici Logarithmorum Canonis deſcriptio ejusque uſus in utraque Trigonometria & omni Logiſtica Mathematica explicatio Edinburgi 1614. in 4. (plag. 21.) & opera filii parente mortuo recuſum eſt opus auctius A. 1619. Acceſſere nempe tractatus aliqui de logarithmorum conſtructione poſt-

posthumi. In eodem opere continetur regula generalis facilius solvendi triangulorum sphæricorum rectangulorum casus omnes, cui similem nos quoque dedimus in Elementis nostris. Cæterum logarithmi isti ab iis, quibus nunc utimur, sunt diversi: supposuit enim *Neperus* in prima eorundem constructione logarithmum Sinus totius seu radii 0, ut multiplicationem & divisionem in trigonometria plerumque prorsus evitaret, nec additionem vel subtractionem substituere opus haberet.

§. 9. Canonem *Neperi* ad singula minuta prima quadrantis constructum ad dena secunda extendit *Benjamin Ursinus*, Mathematicus Electoralis Brandenburgicus, & cum Canonis tam naturalis, quam artificialis constructionem, tum trigonometriam utramque & quidem sphæricam juxta *Neperum* explicavit in Trigonometria Coloniæ An. 1625. in 4. edita (constat liber 1. Alph. 12. plag. & Canon 2. Alph. 11. plag.). Multa continet lectu digna, præsertim quoad constructionem Canonis & praxin Trigonometriæ sphæricæ.

§. 10. Postquam *Keplerus* hoc logarithmorum genus a *Justo Byrgio* supra laudato (§. 38. c. 4.) inventum, sed illo reprehendente in Rudolphinis f. 11. in privatos tantum usus reservatum, ad Astronomiam transtulerat; ipsius gener *Jacobus Bartschius* Canonem *Ursini* reduxit, resectis tribus ultimis cyphris, & particulam antilogarithmorum exactiorum ad singula bina secunda. Tabulamque logarithmorum indicis prostaphæreseos supputavit atque Heptacosiadem *Keplerianam* ad singula scrupula secunda dilatavit. Has tabulas sub soceri *Kepleri* auctoritate Sagani edidit A. 1630. sed ob earum usum in calculo *Rudolphino* insignem sub titulo: *Joh. Kepleri & Jacobi Bartschii Tabulæ Manuales Logarithmicæ* A. 1700. Argentorati in 8. (1. Alph. 17. plag.) recudi fecit *Johann Caspar Eisenschmid*. Med. D.

§. 11. Ex consilio *Neperi* logarithmorum formam immutavit *Henricus Briggius*, Professor Geometriæ Oxoniensis, ita ut logarithmus unitatis fieret 0, quemadmodum nos exposuimus in Elementis Arithmeticæ cap. 8. Construxit Canonem Loga-

garithmorum numerorum vulgarium ab 1. usque ad 20000 & a 90000 usque ad 100000, quem in Arithmetica Logarithmica una cum methodo inveniendi logarithmos & uſu eorundem exhibuit A. 1624. in fol. Sed mox Goudæ A. 1628. in fol. (9. Alph. 7. plag.) eandem recudi fecit *Adrianus Vlacq*, Goudanus, qui logarithmos Briggianos 4 numeris minuit, lacunam inter 20000 & 90000 explevit, ut 100 logarithmorum chiliades exhibuerit, Canonem triangulorum ſeu tabulam ſinuum & tangentium artificialium ad radium 10000000000 & ad ſingula ſcrupula prima quadrantis adjecit, in deſcriptione vero *Briggiana* quædam hic illic immutavit, quædam omiſit, quædam adjunxit. Idem poſtea A. 1633. Canonem Sinuum atque Tangentium artificialium extendit ad ſingula dena ſecunda & ſub titulo Trigonometriæ artificialis ſeu Magni Canonis triangulorum Logarithmici, Goudæ in fol. (5. Alph. 3. plag.), adjectis Chiliadibus viginti Logarithmorum pro numeris naturali ſerie creſcentibus *H. Briggii*, edidit.

§. 12. Inchoaverat idem *Briggius* Canonem Sinuum & tangentium artificialem pro gradibus graduumque centeſimis; ſed morte præpeditus non abſolvit. Quæ adeo deficiebant, ſupplevit *Henricus Gellibrand* & An. 1633. ſub nomine *Trigonometriæ Britannicæ* publicavit. Prodiit Goudæ in fol. (3. Alph. 7. plag.).

§. 13. Sub eodem Trigonometriæ Britannicæ nomine, ſed Anglico idiomate opus trigonometricum præclarum edidit *Johannes Newton* Londini 1658. in fol. (5. Alph. 19. plag.), in quo continentur 1. conſtructio & uſus Canonis Sinuum & tangentium naturalis atque artificialis, 2. ſolutio triangulorum, tam planorum, quam ſphæricorum, 3. chiliades centum logarithmorum pro numeris vulgaribus, 4. Canon logarithmorum pro ſinibus & tangentibus ad ſingulos gradus & partes graduum centeſimas, 5. Canon logarithmorum pro ſinibus & tangentibus ad tres primos Quadrantis gradus & partes graduum milleſimas.

§. 14. Fundamentum Logarithmorum breviter quidem, attamen perſpicue expoſuit *Stifelius*

lius in Arithmetica integra (§. 7. c. 1.) lib. 3. f. 249. b & seqq. monens posse hic fere novum librum integrum scribi de mirabilibus numerorum, sed oportere, ut se hic subducat & clausis oculis abeat. Utilitatem fractionum decimalium ad exprimendos numeros prope veros, qui in calculo excludant errorem quantumlibet exiguum, adeoque contemnendum, dudum ante monstravit *Regiomontanus.* Hisce igitur luminibus usi sunt *Byrgius* atque *Neperus* in Logarithmis computandis. Recentiores vero alias invenere methodos, de quibus in Algebra agitur. Illa tamen, qua usi sunt Canonis conditores, ad captum tyronum composita, adeoque a nobis in Arithmetica retenta.

§. 15. An. 1643. Bononiæ in 4. (1. Aplph. 1. plag.) *Bonaventuræ Cavallerii* Trigonometria plana & sphærica, linearis & logarithmica, cum canone duplici Trigonometrico & chiliade numerorum absolutorum ab 1. usque ad 10000 eorumque logarithmis ac differentiis, opus Autore suo dignum, prodiit. Eodem usus est *Geminianus Rondelli*, Mathem. Professor Bononiensis, qui An. 1705. Bononiæ in 4. (2. Alph. 12. plag.) Trigonometriam universalem linearem & logarithmicam, Italico idiomate edidit, cum canone sinuum, tangentium & secantium, atque logarithmorum sinuum & tangentium & decem chiliadibus logarithmorum pro numeris vulgaribus.

§. 16. *Sethi Wardi* Idea Trigonometriæ demonstratæ, quæ cum Prælectione de Cometis & Inquisitione in *Bullialdi* Astronomiæ Philolaicæ fundamentum Oxonii A. 1654. in 4. (plag. 3.) prodiit, est admodum concisa & characteribus expressa. Ejusdem vero indolis est Trigonometria *Wilhelmi Oughtredi*, quæ cum canone sinuum, tangentium & secantium Londini 1657. in 4. lucem adspexit (1. Alph. 13. plag.). In eundem quoque censum veniunt *Joannis Wilson* Principia Trigonometriæ succincte demonstrata, quæ Lugduni Batavorum An. 1718. in 8. (plag. 5. Tab. 2.) prodiere.

§. 17. *Richardus Norwood* in Trigonometria, quæ Anglico sermone Lond. 1651. in 4. recusa, (2. Alph. 3. plag.) præter

ter Trigonometriam planam & sphæricam logarithmorum doctrinam explicat, & omnia trigonometriæ sphericæ problemata per duo axiomata fundamentalia *Neperi* solvit. Adjiciuntur canones finuum & tangentium naturalium atque artificialium cum 10. chiliadibus logarithmorum pro numeris vulgaribus.

§. 18. *Wilhelmus Hawney* A. 1725. Londini in 8. reg. (Alph. 1. plag. 8.) Trigonometriam planam & sphæricam omnem explicatam dedit & ejus usum in Navigatione, Astronomia, Geographia, Architectura militari, Geodæsia & Euthymetria, atque Gnomonica prolixe commonstravit in libro sermone Anglico edito sub titulo: *The Doctrine of plain and spherical Trigonometrie.*

§. 19. Compendium Trigonometriæ planæ & sphæricæ non contemnendum Leodii 1704. in 8. (12½. plag.) edidit *Jacobus Gooden*, e Societate Jesu, in quo regulæ accurate demonstrantur & exemplis utilibus ex Geodæsia, Astronomia & Geographia petitis illustrantur. Adjiciuntur palmaria ex *Euclide* theoremata cum Canonibus sinuum, tangentium & logarithmorum contractis.

§. 20. In cursibus Trigonometriam bene explicant *Dechales* atque *Ozanam* (§. 4. 7. c. 1). Præterea in multis aliis libris, qui de Astronomia & Navigatione conscripti sunt, Trigonometria tam plana, quam sphærica explicatur. Sed de eo dicemus suo loco, quando illorum mentionem facturi sumus.

§. 21. Tabulæ sinuum & tangentium itemque Logarithmorum separatim editæ commendantur *Ulacci*, quæ Hagæ Comitum An. 1665. prodierunt, & *Ozanami*, quæ juxta eas correctæ. Quid nos in nostris præstiterimus, quæ Halæ 1711. (plag. 20.) prodierunt, & 1728. recusæ ex præfatione iisdem præfixa intelligi potest.

§. 22. Analysis speciosam Trigonometriæ sphæricæ, primo mobili, Triangulis rectilineis & Progressioni Arithmeticæ & Geometricæ aliisque variis Problematis applicata a R. P. *Jacobo Kresa*, e Societate Jesu, quæ Pragæ prodiit 1720. in 4. (Alph. 2. Tab. 2.), docet usum Algebræ communis, cujus Isagoge libro primo præmittitur, in Trigonometria plana & Sphærica.

CAPUT VI.

DE

STATICA ET MECHANICA.

§. 1.

THeoria Staticæ atque Mechanicæ apud veteres fuit valde imperfecta, nec quicquam ea de re extat, nisi quod *Archimedes* in duobus de æquiponderantibus libris de centro gravitatis figurarum planarum & de statices palmario fundamento, *&* *Pappus* lib. 8. Collect. Mathemat. de quinque Potentiis mechanicis vecte, axe in peritrochio, trochlea, cochlea & cuneo demonstrat.

§. 2. Neque ulterius progrediuntur Autores recentiores, qui institutiones Mechanicas ediderunt: immo plerique Archimedea de centro gravitatis, quæ non sunt ad palatum tyronum, nec ad praxin directe tendunt, omittunt. Pertinent huc *Guidi Ubaldi* liber Mechanicorum Pisauri Anno 1577. editus in fol. (2. Alph.) *Simonis Stevini* Statica (§. 23. cap. 1.); *Jac. Rohault* Tractatus de Mechanica, qui inter posthuma habetur Hagæ 1690. in 12. reg. (1. Alph. 22. pl.) edita & non nullis editionibus Physicæ ejus in Latinum versæ subjungitur; *Ignatii Gastonis Pardies* Statica Gallice Hagæ comitum An. 1692. in 12. (10½. plag.) tertia vice recusa & vitiosissime in Latinam linguam translata; *Bernhardi Lamy* Tractatus Gallicus de Mechanica (Parisiis 1687. in 12. plag. 12.), cui accessit plagula una continens Novam methodum demonstrandi præcipua theoremata Elementorum Mechanicorum; *Guil. Oughtred* Institutiones Mechanicæ (§. 27. cap. 1.), *Pauli Casati* Mechanicorum libri octo Lugduni Gallorum An. 1784. in 4. (4. Alph. 7. plag.) & *And.* Jungenickels / ex vitriario primum militis gregarii, deinde Suggestuum tormentorum Præfecti Clavis Machinarum, Germanice conscripta & Norimbergæ A. 1661. in 4. (2. Alph. 3. plag.) edita. Hos inter *Stevinus* atque *Casatus* multa ad praxin pro-

profutura : afferunt: *Rohaltius* atque *Lamy* ob perspicuitatem tyronibus commendandi: *Jüngenickelius* iis satisfacit, qui in Geometria non multum versati fundamenta mechanica populari modo cognoscere cupiunt.

§. 3. Theoriam potentiarum mechanicarum, quæ dicuntur seu machinarum simplicium nemo prolixius demonstravit, ac singula huc spectantia uberius exposuit, quam *Varignonius* in opere posthumo, quod duobus Tomis Parisiis An. 1725. in 4. reg. (Alph. 4. plag. 21. Tabb. 64.) sub titulo: *Nouvelle Mecanique & Statique* prodiit, ubi ex motu composito demonstrationes deducit. Ad eorum palatum est, qui theoriis profundis delectantur. Ideam hujus operis jam publicaverat A. 1687. Parisiis in 4. sub titulo: *Project d' une nouvelle Mecanique*, in quo nonnisi principia continentur peritis valde probata. Adjiciuntur duo Tractatus, quorum primo examinatur Machina ab afflictu liberata, cujus mentionem facit *Perrault* in Commentario ad *Vitruvium*; secundo autem opinio *Borelli* de ponderibus ex chorda suspensis.

§. 4. Ulterius primus omnium progressus *Gallilæus Gallilæi* in discursibus & demonstrationibus Mathematicis circa duas novas scientias, pertinentes ad Mechanicam & motum localem, una cum Dialogis ejus de systemate mundi Lugdini Bat. 1699. in 4. editis. (Dialogi de motu constant 1. Alph. 14. plag). In iis enim resistentiam solidorum considerare aggressus est, quamvis parum feliciter, usus nimirum principiis parum genuinis, & de motu cum generalia tradidit, tum in specie motum gravium tam libere, quam super plano inclinato descendentium vel ascendentium, atque motum projectorum & pendulorum felicissime evolvit.

§. 5. Inventa *Gallilæi* expolivit discipulus ejus *Evangelista Torricellius* in libris duobus de motu gravium naturaliter descendentium & projectorum, qui inter opera ejus Geometrica habentur (§. 12. cap. 3.), immutavit *Joh. Baptista Balianus* in Tractatu de motu naturali gravium (Genuæ 1646. in 4.), sed parum feliciter, & doctrinam de motu pendulorum ulterius promovit *Christianus Hugenius* in

in infigni Tractatu de Horologio ofcillatorio Parif. An. 1673. in fol. (2. Alph.), cujus etiam parte tertia de linearum curvarum evolutione & dimenfione Geometria fublimior novis inventis illuftratur. Illuftris *Leibnitius* de refiftentia folidorum certiora dedit in Actis Eruditorum A. 1684. p. 319. & eandem doctrinam celeberrimus *Varignonius* more fuo maxime univerfalem reddidit in Commentariis Academiæ Regiæ fcientiarum A. 1702. p. 87.

§. 6. *Joh. Alphonfus Borellus* in Tractatu de vi percuffionis regulas motuum explicare aggreffus eft. Prodiit primum Bononiæ A. 1666. in 4. & cum Tractatu altero de motionibus naturalibus a gravitate pendentibus Lugd. Batav. A. 1686. in 4. (3. Alph. 18. plag. 21. Tabb. æn.). Idem in Opere eximio de motu animalium Lugd. Batav. 1685. in 4. (3. Alph. 18. plag. 18. Tabb. æn.) regulas Staticorum ad motus animalium varios explicandos applicavit.

§. 7. Primi regulas motuum veras dedere eodem tempore *Wallifius*, *Hugenius* & *Chriftophorus Wren:* ille quidem de Corporibus non elafticis, hi vero de corporibus elafticis. Extant regulæ *Wallifianæ* in Transactionibus Anglicanis n. 43. p. 864. *Wrennianæ* n. 43. p. 867. & *Hugenianæ* n. 46. pag. 927. Conf. the Philofophical Transactions abrig'd by *John Lowthorp* Vol. I. cap. 5. p. 545. & feqq.

§. 8. *Hugenius* poftea Tractatum peculiarem de motu corporum ex percuffione confcripfit, qui inter pofthuma opera habetur, & in quo inventa fua clarius explicat: *Wallifius* vero abfolutiffimum de Mechanica feu motu opus perfecit, Oxonii A. 1669. in 4. primum editum, deinde Tomo primo Operum infertum, in quo non folum inventa veterum & *Gallilæana*, *Wrenniana*, *Hugeniana* atque propria ope analyfeos plerumque demonftrantur, verum etiam in prolixa de centro gravitatis pertractatione multa ad Geometriam fublimiorem fpectantia una evolvuntur. Utitur Arithmetica hinc inde infinitorum, fed ope calculi differentialis ac integralis talia felicius eruuntur.

§. 9.

§. 9. Quoniam opus præclarum captum tyronum transcendit; operæ pretium fecit Cl. *Joh. Keill*, Astronomiæ Professor in Academia Oxoniensi, quod in introductione ad Veram Physicam, quæ A. 1705. Oxonii in 8. reg. (19½. plag.) auctior recusa, palmaria illius de motu dogmata ad captum tyronum ex elementis demonstraverit, more veterum Geometrarum.

§. 10. Cel. *Philippus de la Hire* in Tractatu de Mechanica (Parif. 1695. in reg. 12. plag. 18.) non modo ea demonstrat, quæ ad praxin mechanicam usui sunt; verum etiam motuum doctrinam attingit. Unde merito in hoc genere commendatur.

§. 11. Prostant etiam alia de motu corporum ex percussione Scripta particularia. Pertinet huc *Mariotti* Tractatus de percussione corporum (*du Choc des corps*,) qui Parisiis 1673. in 12. (plag. 18. Tab. 2.) editus Autore suo dignus; & inter opera ejus legitur, quæ Lugduni Batavorum An. 1717. in 4. (Alph. 4. plag. 2. Tabb. 25.) prodierunt. In eo ex experimentis pendulorum demonstrationes deducit; P. *Dechales* Tractatus Gallicus de motu (Lugd. Gall. 1682. in 8.) & P. *Pardies* discursus de motu locali (Hag. Comit. 1692. in 12. tertia vice Gallice recusus) non magni momenti, nec veritati per omnia consentaneus. Inprimis vero hic nominanda sunt Elementa Gallica Mechanicæ & Physicæ a *Parentio* Parif. 1700. in reg. 12. (plag. 22. Tabb. 12.) edita, quamvis non satis perspicua.

§. 12. *Hugenius* primum considerare cœpit in motu curvilineo, præsertim circulari, vim centrifugam, & de ea aliquot theoremata, sed suppressa demonstratione, Tractatui de Horologio oscillatorio (§. 4.) subjunxit. Conscripsit deinde Tractatum de vi centrifuga, qui inter posthuma comparet, ubi theoremata ista demonstrantur. Sed antequam is in publicum prodiret, Cl. *Keillius* faciles ac elegantes eorundem theorematum demonstrationes dedit sub finem Introductionis ad veram Physicam modo laudatæ (§. 9.). Easdem regulas per calculum differentialem in Commentariis Academiæ Regiæ scientiarum An. 1700. p. 19. eruit *Hospita-*

lius & nos noſtro more in Elementis Mechanicæ demonſtravimus.

§. 13. De motu, præſertim curvilineo, inventa prorſus præclara & admiranda dedit Geometra Summus *Iſaacus Newtonus* in excellenti Principiorum Mathematicorum Philoſophiæ Naturalis Opere (Londini An. 1682. in 4. reg. 2. Alph. 18. plag.) quod hinc inde emendatum & auctum Cantabrigiæ 1713. in 4. reg. (2 Alph. 19. plag.) & mox Amſtelodami 1714. eadem forma recuſum cum præfatione ***Rogeri Cotes***, Aſtronomiæ & Philoſophiæ experimentalis Profeſſoris Plumiani in Academia Cantabrigienſi, qui operam dedit, ut opus præſtantiſſimum nitide inprimeretur. Tandem An. 1726. Londini in 4. reg. (Alph. 2. plag. 3.) prodiit editio tertia aucta & emendata, ceteris omnibus præferenda. Docetur in hoc opere applicatio Geometriæ ad Naturæ explicationem & ſcientia mechanica mirifice fuit promota.

§. 14. Excitavit illud attentionem Geometrarum primi ordinis, eosque incitavit, ut varia ad majorem univerſalitatem perducerent & ulterius provehérent: quos inter inprimis nominandus mihi eſt celeberrimus *Varignonius*, cujus præclara in hoc genere meditata in Commentariis Academiæ Regiæ Scientiarum paſſim leguntur.

§. 15. Cæterum cum ad lectionem operis *Newtoniani* non admittantur, niſi in Theoria mathematica multum diuque verſati, cum in ea majorem perſpicuitatem deſideraverit ipſe *Hugenius*; *Guilielmus Whiſton*, Matheſeos tum Profeſſor in Academia Cantabrigienſi, in Prælectionibus Phyſico-Mathematicis Philoſophiam Newtoni mathematicam explicatius tradidit & facilius, quamvis ſubinde laxius demonſtravit (Cantabrigiæ An. 1710. in 8. 1. Alph.). Forſan huc etiam tendit liber alius ab *Henrico Ditton* Londini A. 1706. ſub titulo *the general Laws of nature and motion wit their application to Mechanicks*, *alſo the doctrine of centripetal forces and velocities of bodies*, *deſcribing any of the Conick Sections* editus, quem nobis non viſum nomen Autoris ex aliis ſpeciminibus nobis noti commendat.

§. 15. Inprimis etiam loco introductio-

ductionis in opus *Nevvtonianum* commendanda est explicatio quarundam sectionum ejusdem, quam dedit *Johannes Clarke* & sub titulo: *A Demonstration of some of the principal sections, of Sir Isaac Newtons principles of natural Philosophy, in Wich his peculiar method of treating that useful subject is explained and applied to some of the chief phænomena of the system of the World* Lond. 1730. in 8. reg. (plag. 22. Tabb. 17.) edidit, & omnium maxime *Domickii* Philosophia mathematica *Nevvtoniana* illustrata, quam Latino sermone conscriptam Londini An. 1731 in 8. (Alph. 1. plag. 3. Tabb. 16.) publici juris fecit autor. Enimvero cum opus *Nevvtonianum* merito tantopere celebratum a tyronum non modo, sed etiam provectiornm captu valde removeatur, utilissimam operam sumeret, qui continuo Commentario idem illustraret, qualem in Geometriam *Cartesii* edidit *Rabuel* (§. 7. c. 4.). Præstaret enim, ut principiis Geometriæ, Analyseos & Mechanicæ instructus statim ad lectionem ejus accederet, cum dulcius ex fonte bibantur aquæ, quam demum per ambages non sine multo temporis dispendio ad eandem perduceretur, aut prorsus ab eadem avocaretur.

§. 17. Multa egregia de motu & resistentia cum solidorum, tum fluidorum a celeberrimis ævi hujus Geometris detecta in Actis Eruditorum & Commentariis Academiæ Regiæ Scientiarum, nec non in Transactionibus Anglicanis, passim extant: & præclarum de motu solidorum & fluidorum opus Geometræ insignis *Jacobi Hermanni*, Mathematum Professoris primum Patavii, deinde Francofurti ad Oderam, posthac Petropoli Mathematum, tandem in Academia patria Basiliensi Philosophiæ moralis celeberrimi, Amstel. 1716. in 4. (Alph. 2. plag. 15. Tabb. 12.) sub *Phoronomiæ* nomine editum plurima inventa nova eaque egregia continet. More veterum doctrinam hanc demonstrare voluit, quorum tamen methodum non satis familiarem expertus, nec intimius perspectam possedit, ut adeo & sibi, & aliis magis consuluisset, siquidem analytica methodo, in qua erat versatissimus, usus fuisset.

§. 18. Ne igitur desideraretur opus Mechanicæ, in quo Motus scientia profundius explicaretur, & lectores ad solvenda proprio Marte problemata præpararentur, *Leonhardus Eulerus*, Academiæ Imperialis scientiarum, quæ Petropoli floret, Membrum & Matheseos sublimioris Professor, Mechanicam sive Motus scientiam analytice expositam conscripsit & duobus Tomis Petropoli in 4. reg. (Tom. I. Alph. 2. plag. 17. Tabb. 14. & Tom. II. Alph. 2. plag. 18. Tabb. 18.) in lucem publicam emisit, plura suo tempore additurus. Reperies in hoc opere multa nova, quæ alibi frustra quæsiveris, & ad ejus lectionem cum fructu absolvendam admittitur, qui in Analysi finitorum & infinitorum satis fuerit exercitatus.

§. 19. Quibus machinarum constructio curæ cordique est, in eorum gratiam Tractatum de Viribus motricibus (*Traité des Forces mouvantes*) Parisiis An. 1722. in 8. reg. (Alph. 1½. Tabb. 8.) edidit *de Camus*. Explicantur enim principia & ad machinas applicantur, quorum in praxi mechanica cognitio præsupponitur.

§. 20. Machinarum descriptiones dederunt *Jacobus de Strada Ferdinandi*, *Maximiliani* & *Rudolphi* II. Imperatorum Antiquarius, An. 1618. a nepote *Octavio de Strada* in publicum emissas, & An. 1629. recusas; *Zeisingius* in Theatro Machinarum Lipsiæ An. 1612. in 4. edito, *Jacobus Besson* in Theatro instrumentorum & machinarum 1582. in lucem emisso in fol. (plag. 32.), cum *Francisci Beroaldi* Figurarum declaratione demonstrativa & *Jolii Paschalis* additionibus; *Augustinus de Ramellis de Masanzana* in opere, quod ex Gallico in sermonem Germanicum translatum Lipsiæ An. 1620. in fol. (7. Alph. 18. plag.) sub titulo: **Schatz-Kamer Mechanischer Künste** prodiit, & *Georgius Andreas* **Böckler** / in Theatro Machinarum novo (Norimb. 1673. in fol. plag. 11. Tabb. æn. 154.)

§. 21. Quoniam descriptiones machinarum, quas Autores isti tradunt, omnes sunt nimis breves, & inprimis dimensionum rationes non exprimunt, ita

ita ut adæquata machinarum idea inde hauriri nequeat; Mechanicus ingeniosus atque industrius *Jacobus Leopoldus* novum promisit Theatrum machinarum & instrumentorum in Actis Eruditorum An. 1712. p. 366. cui ut staret, ipsimet eum hortati sumus. Stetit tandem, quantum per fata licuit, & Lipsiæ An. 1724. in publicam lucem protulit *Theatrum machinarum generale*, Schau-Platz des Grundes mechanischer Wissenschafften in fol. (Alph. 2. plag. 20. Tab.71.), in quo potentias mechanicas & virium motricium ad machinas applicationem declarat. Eodem adhuc anno comparuerunt *Theatrum machinarum hydrotechnicarum*, Schau-Platz der Wasser-Bau-Kunst, in quo ea traduntur, quæ ad Architecturam aquarum faciunt (Alph. 2. plag. 5. Tabb. 51.) & pars prior *Theatri machinarum hydraulicarum*, Schau-Platz der Wasser-Künste, in quo repræsentantur machinæ ad aquas elevandas excogitatæ (Alph. 2. Tabb. 52.). Pars posterior subsecuta anno sequente (Alph. 2. plag. 1. Tabb. 54). Eodem adhuc anno 1725. comparuit *Theatrum Machinarium*, quod vocat Autor, Schau-Platz der Hebezeuge (Alph. 2. Tab. 96.), in quo reperies machinas ponderibus elevandis aptas hisq; agnatas, & *Theatrum staticum universale*, Schau-Platz der Wage- und Gewicht-Kunst, (Alph. 2. plag. 11. Tab. 57.), quod exhibet varias librarum & staterarum structuras una cum instrumentis hydrostaticis meteoralogicis & ad libellationem necessariis, & quæ ad pondera spectant, explicat. A. 1726. *Theatrum Pontificiale*, quod vocat autor, Schau-Platz der Brücken, und des Brücken-Baues (Alph. 1. plag. 21. Tab. 57.), quæ eam Architecturæ partem illustrat, quæ de pontibus struendis agit. Tandem A. 1727. *Theatrum Arithmetico-Geometricum*, Schau-Platz der Rechen- u. Meß-Kunst (2. Alph. 8½. plag. Tabb. 43.) successit, in quo instrumenta arithmetica & geometrica describuntur. Nisi mors Autris finem imposuisset, dare adhuc constituerat Theatra 1. fontium hydraulicorum, 2. molarum, 3. ad mechanicam ignis spectantium, 4. machinarum in metalli fodinis usitarum, 5. machinarum & instru-

ſtrumentorum, quæ in Architectura civili & militari uſui ſunt, 6. quæ in re Oeconomica & 7. venatoria uſum habent, 8. machinarum & inſtrumentorum aërometricorum, 9. machinarum & inſtrumentorum opticorum, 10. machinarum & inſtrumentorum in Gnomonica & arte horologiopæa uſitatorum, 11. inſtrumentorum aſtronomicorum, 12. acuſticorum & muſicorum aliorumque agnatorum, 13. anatomicorum & chirurgicorum, & tandem omnium machinarum & inſtrumentorum apud artifices & opifices obviorum.

§. 22. Dolendum inprimis erat, quod molarum uſitarum genera cum Architecturæ parte, quæ iisdem excitandis deſtinatur, non deſcribere potuerat Autor. Hunc igitur defectum ſupplere conatus eſt *Johannes Matthias Beyer*, qui per modum Tomi noni Theatri machinarum *Leupoldi* Anno 1735. Lipſiæ in fol. (Alph. 1. plag. 14. Tab. 43.) edidit, in quo non modo uſitata molarum genera, verum etiam ea, quæ ad extructionem earundem neceſſaria ſcitu, deſcribuntur. Acceſſit Tomus ſecundus, in quo jura molendinorum operoſe congeruntur (Alph. 2. plag. 12.) in uſum Juriſperitorum.

§. 23. Molas Batavorum peculiari libro exhibuit *Petrus Limpergh* ſermone patrio, cujus *Moole-Bæk* Amſtelodami A. 1690. in fol. reg. (plag. 2. Tabb. 32.) prodiit. Accuratiores illarum delineationes ac deſcriptiones dedit *Johannes van Zyl* in Theatro Machinarum univerſali *of groot algemen Moolen-Bæk*, cujus Tomus I. Amſtelodami A. 1734. in fol. reg. prodiit (plag. 6. Tabb. 56.), etenim ſingulæ partes, qualescunque tandem fuerint, quam accuratiſſime ſecundum ſuas dimenſiones repræſentantur, ut integræ ſtructuræ adæquatam ideam inde haurire liceat. Textus in Germanicam linguam translatus fuit, ut operis hujus etiam in Germania eſſet uſus.

§. 24. Accuratas quarundam machinarum recentius inventarum deſcriptiones dedit *Perrault* in opuſculo Gallico, quod ſub titulo *Recueil de pluſieurs Machines de novelle invention* Pariſiis

risiis An. 1700. in 4. (plag. 7. Tabb. 11.) prodiit, & *Hugenius* cum in Tractatu de horologio oscillatorio horologium a se inventum, tum in operibus posthumis automatum suum planetarium accurate describit.

§. 25. In Gallia machinas ab Academia Scientiarum approbatas, a prima fundatione usque ad nostra tempora una cum illarum descriptionibus delineatas consensu Academiæ sub titulo: *Machines & Inventions approuvées par l' Academie Royale des Sciences* Parisiis sex Tomis publici juris fecit *Gallonus*. An. 1735. in 4. reg. (Alph. 6. plag. 20. Tabb. 422.). Non modo machinæ scenographice repræsentantur, verum etiam ichnographice cum orthographiis & singularum partium delineationibus adjiciuntur, ubi opus fuerit. Descriptiones sunt satis accurratæ, ut nihil in iis desiderari possit. Subinde etiam vires ad agitandam machinam requisitæ ad calculum revocantur, aliaque cognitu necessaria annotantur. Opus hoc Mechanicæ practicæ cultoribus plurimum commendandum.

§. 26. Structuram horologiorum exponit Anglus Anonymus in Tractatu Anglico, qui auctior Londini An. 1700. in 12. reg. Sub titulo: *The artificial Clockmaker* ($7\frac{1}{2}$. plag. Tabb. 2.) prodiit & An. 1707. in Germanicum idioma translatus novæ editioni Gnomonicæ *Welperianæ* subjungitur: quod argumentum etiam attingit *Oughtredus* in posthumis pag. 68. & seqq. Idiomate autem Germanico de horologiorum structura commentatus est *Joannes Georgius Leutmannus*, in mechanicis & praxi optica versatissimus. Prodiit ejus Tractatus sub titulo: **Vollständige Nachricht von den Uhren** Halæ 1718. in 8. (plag. 9. Tab. 7.). Addidit A. 1722. Continuationem, in qua supplentur, quæ desiderari poterant de horologio examinatorio & repetitorio (plag. 12. Tabb. 22.).

§. 27. Autoribus tamen istis palmam præripit *Dom. Jacobus Alexander*, Monachus Benedictinus Congregationis S. Mauri, in Tractatu generali de Horologiis, qui sub titulo: *Traité general des Horloges* Parisiis in 8. maj. 1734. prodiit (Alph. 1. pl. 2. Tabb.

Tabb. 25.), quem ob utilitatem suam me suasore in Germanicam linguam transtulit *Christianus Philippus Bergerus*, Medicinæ Doctor, & Lemgovii An. 1738. in 8. (Alph. 1. plag. 5. Tabb. 25) edidit sub titulo: **des P. Dom Jacob Alexanders ausführliche Abhandlung von den Uhren.** Agit etiam de horologiis solaribus majoribus construendis. Ceterum hoc opus omnibus commendandum, qui horologiorum constructionem accurate cognoscere desiderant. Singularia vero de constructione horologiorum tradit in libro Gallico *Henricus Sully*, qui secunda vice actior recusus Parisiis An. 1737. in 12. (plag. 20. Tab. 5) cum multis accessionibus. Maximopere commendandus iis est, qui perfectionem horologiorum curæ cordique habent, atque adeo in Germanicam linguam verti meretur, ut Tractatui *Alexandri* jungi posset.

§. 28. Silentio denique hic prætereunda non erant *Caspari Schotti*, e Societate Jesu, Technica curiosa, libris 12. comprehensa, quæ Norimbergæ An. 1664. in 4. (Alph. 6. Tabb. 20.) prodierunt. Etenim in iis præter varia experienta aliaque technasmata continentur etiam mechanica, chronometrica & automatica, consequenter plurima ad Mechanicam practicam spectantia. Edidit idem Magiam universalem Naturæ & Artis in tres partes distributam Bambergæ 1677. in 4. (Alph. 14. plag. 2. Tab. 90.): pars enim tertia multa continet, quæ ad Mechanicam & staticam spectant, nimirum quæ sub nominibus Magiæ centrobarycæ, mechanicæ, thaumaturgæ libris tribus prioribus continentur.

§. 29. Idem *Schottus* in Technica curiosa lib. 9. sub titulo mirabilium chronometricorum multa artis horologiopææ utilia tradit, præter alia mechanica. Inprimis etiam de mobili perpetuo varios conatus describit.

CAPUT

CAPUT VII.

DE

HYDROSTATICA, AEROMETRIA ET HYDRAULICA.

§. 1.

Hydroſtaticam primus docuit *Archimedes* in libris de inſidentibus humido, cujus dogmata ad experimenta applicavit *Marinus Ghetaldus* in Archimede promoto: unde ſua excerpſit *Oughtredus* (§. 19. cap. 1.).

§. 2. *Mariottus* in Tractatu Gallico de motu aquarum & aliorum corporum fluidorum, qui primum ſub titulo: *Traité du mouvoment des eaux & des autres corps fluides* prodiit Pariſiis An. 1686. in 12. reg. (plag. 17½.) & in editione Batava operum ipſius legitur, propoſitionum hydroſtaticarum & hydraulicarum magnam partem & rationibus confirmavit, & experimentis comprobavit. Propter inſignem utilitatem D. *Joannes Chriſtophorus Meinig* eum in Germanicam linguam tranſtulit & notis quibusdam illuſtratum Lipſiæ 1723. in 8. (Alph. 1. plag. 5½.) edidit.

§. 3. Nec contemnenda habet *Robertus Boyle*, cum in Paradoxis Hydroſtaticis (Genevæ An. 1680. in 4 plag. 15. Tabb. 3.), tum in Medicina Hydroſtatica (Genevæ An. 1693. in 4. plag. 10½.): quod utrumque ſcriptum in uſum præſertim phyſicum legi meretur, intelligendum etiam ab iis, qui Mathematum ſunt imperiti.

§. 4. *Franciſcus Tertius de Lanis*, e Societatis Jeſu, Tomo tertio Magiſterii Naturæ & Artis Parmæ An. 1692. in fol. (6. Alph. 14. plag. Tabb. XIII.) lib. 25. f. 49. & ſeqq. dogmata hydroſtatica uberius expoſuit, quam alibi leguntur. Tomo autem primo & inprimis ſecundo paſſim Machinas Hydraulicas deſcripſit: quemadmodum etiam in primo Mechanicam multum illuſtravit. (Tom. I. Brixiæ

Brixiæ An. 1684. in fol. 6. Alph. Tab. 24. Tom. II. Brixiæ 1686. 6. Alph. 5. plag. Tabb. 20.).

§. 5. *Bernhardus Lamy* parte secunda Mechanicæ (§. 2 cap. 6.), quæ inscribitur *Traité de l'equilibre des liqueurs*, propositiones aliquot Hydrostaticæ ac Hydraulicæ fundamentales explicavit: quod etiam fecere *Rohaltius* (§ cit.) & *Wallisius* in Mechanicis (§. 8. c. cit.). Commendanda quoque tyronibus Hydrostatica P. *Dechales*, quæ in Mundo ipsius Mathematico Tom. III. legitur. (§. 4. c. 1.).

§. 6. Sublimiora dedit Geometra summus *Isaacus Newtonus* in Principiis Philosophiæ Naturalis Mathematicis Sect. 5. lib. 2. p. 282. & seqq.

§. 7. De Aërometria scriptum aliud non extat, nisi quod sub titulo: *Elementa Aërometriæ* Lipsiæ Anno 1709. in 12. (16. plag. Tabb. XII.) edidi in usum potissimum tyronum, ut Mathesin ad experimenta applicare discant. Sed ea deinceps hisce Elementis Matheseos universæ inserui. Passim tamen huc spectantia leguntur apud *Guerickium*, Consulem Magdeburgicum, antliæ pneumaticæ inventorem, in Experimentis novis Magdeburgicis de vacuo spatio Amstelodami An. 1672. in fol. (Alph. 2. plag. 20. Tabb. 18) editis & qui post eum aëris proprietates experimentis comprobarunt.

§. 8. Cæterum hic etiam locum meretur libellus Gallicus, qui sub titulo: *Traitez des Barometres, Thermometres & Hygrometres* prostat & barometrorum, thermometrorum atque hygrometrorum constructionem ac usum edocet (Amstel. 1707. in 12. plag. 7. Tabb. 35.). Inprimis autem hinc inde in Commentariis Academiæ Regiæ scientiarum inseruntur, quibus Aëreometria locuputari ac ad majorem perfectionem adduci potest.

§. 9. Ad hydraulicam perficiendam tendit *Johannis Cevæ*, Mediolanensis, Geometria motus (Bononiæ 1692. in 4. plag. 12. Tabb. 9.), in qua de motu tam simplici, quam composito traduntur, quæ ad motum aquarum explicandum utilia sunt.

§. 10. *Joannes Baptista Balianus* lib. 3. 4 & 5 de motu naturali gravium, solidorum & liquidorum (§. 5. cap. 6.) de motu

ti aquiorum, canalium sectionibus & de foraminibus vasis, ad praxin hydraulicæ utilia profert: quorsum etiam spectant Tractatus aliquot *Picardi*, *Ræmeri & Mariotti* supra recensiti (§. 31. c. 1.).

§. 11. *Dominicus Gulielmini* in Mensura Aquarum fluentium (Bononiæ An. 1690. & 1691. in 4. plag. 19. Tabb. 8.) theorias hydraulicas sublimiores ad praxin revocare studet. Nemo autem in theoria hydraulica sublimiora dedit quam Geometræ celeberrimi *Newtonus* in Opere modo laudato (§. 6.) lib. 2. sect. 7. p. 318. & seqq. atque *Varignonius* in Commentariis Academiæ Regiæ Scientiarum An. 1699. & 1703. Multa nova & egregia de hoc argumento dedit Geometra insignis *Hermannus* in Phoronomia (§. 17. c. 6.).

§. 12. Quemadmodum vero *Eulerus* theoriam mechanicam perficere studuit (§. 18. cap. 6.), in quam stricturas Londini edidit *Robinson Nourse* sub titulo: *Remarks on Mr. Eulers Treatise of motion*, nobis nondum visas; ita *Daniel Bernoulli*, Medicinæ Professor Basileensis, antea Mathefeos sublimioris in Academia scientiarum imperiali Petropolitana, nunc Professor honorarius, similem operam impendit theoriæ hydrostaticæ & hydraulicæ, quam sub titulo: Hydrodynamicæ sive de viribus & motibus fluidorum Commentarii Argentorati An. 1738. in 4. reg. (Alph. 1. plag. 16. Tabb. 12.) publici juris fecit, cum hoc opus jam octo annis ante congessisset, dum Petropoli ageret.

§. 13. Ceterum ad hydraulicam quoque facit *Sexti Julii Frontini* de Aquæ ductibus urbis Romæ Commentarius, quem uberrimis notis explicatum Patavii Anno 1722. in 4. reg. (Alph. 1. plag. 21. Tabb. 15.) in lucem emisit *Joannes Polenus*, Professor Patavinus, cui etiam debentur de Motu aquæ mixto libri duo, quibus multa nova pertinentia ad æstuaria, ad portus atque ad flumina continentur, Patavii A. 1697. in 4. reg. (plag. 18. Tab. 3.) & liber de Castellis, per quæ derivantur fluviorum aquæ, habentibus latera convergentia, qui etiam continet nova experimenta ad aquas fluentes & ad percussionis vires pertinentia & Patavii An. 1738. in 4. (pl g 9.

 Tabb.

Tabb. 1.) prodiit. Idem etiam An. 1723. edidit epistolam ad *Joannem Jacobum Marinonium*, Mathematicum Cæsareum, in qua præter defectum Solis anno isto Patavii observatum, agitur de aliquibus experimentis pertinentibus ad aquas fluentes & cui subjicitur *Joannis Buteonis* libellus de fluentis aquæ mensura cum annotationibus nonnullis, Patavii in 4. (plag. 3½. Tabb. 1.).

§. 14. Neque silentio hic prætereunda sunt *Marini Mersenni* Phænomena Hydraulica pneumatica, quæ inter Cogitata ipsius Physico-mathematica leguntur, in quibus tam naturæ, quam artis effectus admirandi certissimis demonstrationibus explicantur, Parisiis 1654. in 4. (Alph. 8. plag. 19.). In hac nimirum collectione, quæ inter opera mathematica superius commemorari merebatur, reperiuntur 1. Tractatus de mensuris, ponderibus atque nummis tam Hebraicis, quam Græcis & Romanis ad Parisiensia expensis, 2. Tractatus, cui titulus: Hydraulica pneumatica, Arsque navigandi, Harmonia theorica, practica, & Mechanica phænomena, 3. Tractatus mechanicus theoricus & practicus, 4. Balistica & Acontismologia, in qua sagittarum, jaculorum & aliorum missilium jactus & robur arcuum explicantur, 5. Universæ Geometriæ mixtæque Mathematicæ Synopsis & bini refractionum demonstratarum Tractatus 6. *Aristarchi Samii* Tractatus de mundi Systemate & Reflexiones Physico-mathematicæ, quibus varia adjiciuntur ad præcedentia. In Synopsi tantummodo sine demonstratione recensentur Propositiones *Euclidis*, *Petri Rami*, *Archimedis*, *Theodosii*, *Menelai*, *Maurolyci*, *Apollonii*, *Mydorgii*, *'geometricæ; Pappi*, *Guidonis Utaldi & Stevini mechanicæ*.

§. 15. De motu fluminum scripsit *Dechales* in Tractatu de fontibus naturalibus prop. 39. & seqq. Tomi III. Mundi Mathematici f. 137. & seqq. sed paucis plura & abstrusiora hisce complexus est *Hermannus* in Phoronomia cap. 10. p. 226. & seqq. Ex instituto de hoc argumento scripsit *Dominicus Guglielmini*, cujus della Natura de Fiumi Trattato Fisico-Matematico prodiit Bononiæ An. 1697.

in

in 4. (Alph. 2. plag. 3. Tabb. 15.). Multa in Italia prodiere ſcripta Italico ſermone, in quibus plura ad hoc argumentum ſpectantia leguntur, occaſione controverſiæ de Rheno fluvio in Padum deducendo.

§. 16. Inter veteres machinas hydraulicas deſcripſit *Heron Alexandrinus* in libro ſpiritalium a *Commandino* in Latinam linguam translato (Pariſiis An. 1583. in 4.) Ex recentioribus ſimilem operam collocarunt *Salomon de Caux*, Architectus militaris Electoris Palatini, in libro Gallico de Machinis, præcipue hydraulicis, qui An. 1615. prodiit: *Ceſparus Schottus* in Mechanica Hydraulico-pnevmatica Herbipoli 1657. in 4. (Alph. 2. plag. 22. Tabb. 56.) edita, *Dechales* in Mundo Mathematico Tom. III. (§. 4. c. 1.), *Georgius Andreas* Böckler in Architectura Curioſa Germanica (Norimbergæ An. 1704. in fol. plag. 21. Tabb. 200.), qui ultra 70. fontium ſalientium & ultra 120. fontium artificialium formas deſcribit; & *Lucas Antonius Portius* in Nonnullis de fontibus naturalibus, quæ nonnullis de motu corporum ſubjuncta, poſſibilitatem inprimis quorundam fontium adſtruens, qui a *Plinio* commemorantur. (Neapoli A. 1704. in 4. plag. 7. Tabb. 5.).

§. 17. Denique quæ de Hydroſtatica & Hydraulica per plurimos libros & volumina diſperſa leguntur, qua theoriam & praxin, uno complexus eſt & ſub titulo: An introduction to a general ſyſtem of Hydroſtaticks and Hydraulicks, Londini 1729. in 4. charta aug. (Alph. 2. plag. 16. Tabb. æn. 60.) edidit *Stephanus Swizer:* Extant etiam in hoc libro deſcriptiones machinarum, quibus aqua elevatur.

§. 18. Inprimis autem iis, qui praxin ſolidam Hydraulicæ curæ cordique habent, commendari meretur Architectura hydraulica, quam Gallico idiomate conſcriptam Pariſiis Anno 1737. in 4. reg. cum 54. Tabulis æneis ſplendidiſſimis edidit *de Belidor.* In hoc opere etiam accurata traditur molarum deſcriptio & quæ ad molas aqua agitandas requiruntur ibidem explanantur. Opus utiliſſimum in linguam Germanicam verti mereretur.

§. 19. Ad Hydraulicam quidam referunt Libellationem aquarum, de qua nos egimus in Mechanicæ Elementis. Egregium de ea Tractatum conscripsit *Picardus*, quem *Philippus de la Hire* post mortem ipsius Parisiis An. 1684. in 12. (plag. 15. Tabb. 3.) edidit, unde sua desumsere, qui de hoc argumento apud Nostros scripsere, veluti *Leupoldus* atque *Sturmius*, filius. Inter opera *Mariotti* extat quoque de libellatione Tractatus brevis.

CAPUT VIII.

De

OPTICA, CATOPTRICA, DIOPTRICA ET PERSPECTIVA.

§. 1.

Opticæ & Catoptricæ elementa olim conscripsit *Euclides*, quæ a *Johanne Pena*, Mathematico Regio, Latine versa Parisiis A 1604. prodiere. Extant etiam in Cursu Mathematico *Herigonii* (§. 1. cap. 1.) & in editione *Gregoriana* operum *Euclidis* (§. 2 c. 3).

§. 2. Circa annum Christi 1100. *Alhazen* Arabs ingens de Optica volumen composuit, quod in libros, capita & propositiones distinxit *Fridericus Risnerus*. Usus est scriptis veterum, præertim *Ptolemæi* de Optica libris decem, qui hodie desiderantur.

§. 3. Cum demonstrationes *Alhazeni* sint admodum intricatæ ac prolixæ; *Vitellio* Polonus circa An. 1270. aliud de Optica volumen conscripsit in libros 10 digestum. Pleraque ex *Alhazeno* desumsit, sed demonstrationum fundamenta ex *Apollonio*, *Theodosio*, *Menelao*, *Theone*, *Pappo & Proclo* petiit. Ad hunc Autorem Paralipomena edidit *Johannes Kepplerus*, quibus Astronomiæ pars optica traditur. (Francofurti 1604 in 4. 2. Alph. 15. plag.). Habentur

tur tamen multa quoque alia in hiſce paralipomenis, & inter alia modum viſionis primus decente ratione explicat Autor. *Alhazenum* & *Vitellonem* uno volumine edidit *Fridericus Risnerus* Baſileæ An. 1572. in fol. (Alph. 7. plag. 18.). Titulus libri eſt: Opticæ Theſaurus. *Alhazeni* Arabis libri ſeptem nunc primum editi. Ejusdem liber de crepusculis & Nubium aſcenſionibus. Item *Vitellonis* libri X. Omnes inſtaurati, figuris illuſtrati & aucti, adjectis etiam in *Alhazenum* commentariis a *Federico Risnero*.

§. 4. Compendium Opticæ antiquæ circa annum 1279. conſcripſit *Johannes Peccamus*, Archiepiſcopus Cantuarienſis & Primas Angliæ (Coloniæ Agrippinæ 1627. in 4. plag. 11.), quale etiam recentius dedit *Ambroſius Rhodius*, Profeſſor Mathematum Wittebergenſis, cujus Optica Wittebergæ 1611. cum Tractatu de crepuſculis in 8. prodiit (1. Alph. 10. plag.). Uberius eandem expoſuit *Risnerus* ante laudatus, cujus Opticæ libri quatuor Caſſellis 1606. in 4. prodiere (Alph. 1. plag. 14.).

§. 5. Opticam quoque illuſtrare aggreſſus eſt circa idem tempus *Rogerius Bacon*, Philoſophus ſuo tempore ſummus, anno 1284. Oxonii mortuus, & ob ſcientias Mathematicas magiæ accuſatus. Ejus Perſpectivam in lucem protraxit *Joannes Combachius*, Philoſ. Profeſſor Marpurgenſis, (Francof. 1714. in 4. 1. Alph. 5. plag.): parum tamen Mathematici ea continet, etſi lectu non indigna.

§. 6. Enimvero veteres ea, quæ viſionem directam & reflexam concernunt, potiſſimum explicant: quæ vero ad refractam ſpectant, nimis imperfecte tradunt. *Johannes Baptiſta Porta* libris novem de Refractione conſcriptis hanc doctrinam melius tradere conatus eſt (prodiere Neapoli An. 1593. in 4. 1. Alph. 6. plag.); ſed parum adhuc profecit. Primus qui Dioptricam meliori habitu induit & lentium ſphæricarum proprietates demonſtravit accurate, fuit *Johannes Keplerus*, cujus Dioptrica prodiit Auguſtæ Vindelicorum 1611. in 4. (plag. 14.) & poſthac alibi recuſa. Præmittuntur epiſtolæ *Gallilei* de iis, quæ poſt editionem Nuncii

ſiderei

ſiderei ope perſpicilli nova & admiranda in cœlo deprehenſa ſunt, itemque Examen præfationis *Johannis Penæ* in Opticam *Euclidis* de uſu Opticæ in Philoſophia.

§. 7. *Carteſius* in Dioptrica, quæ principiis Philoſophiæ ſubjungi ſolet, veram refractionis legem a *Snellio* inventam, ſed ſuppreſſo inventoris nomine, affert & modum viſionis diſtinctius, quam ab aliis factum fuerat, explicat, lentium ellipticarum & hyperbolicarum proprietates recenſet & praxin poliendi vitra ita docet, ut in ea non ſatis verſatum judicent experti.

§. 8. Theoriam Dioptricæ magis excoluit, novis plerumque demonſtrationibus inventis, *Wilhelmus Molyneux* in dioptrica Nova Anglice conſcripta (Londini An. 1692. in 4. plag. 16. Tabb. 40.), ubi calculo trigonometrico ad eruendas lentium ſphæricarum proprietates juxta veram refractionis legem utitur. Omnium maxime eandem hactenus perfecit *Hugenius*, cujus dioptrica maximam poſthumorum partem conſtituit. Eidem & praxis multum debet: de quo tractatus de poliendis vitris teſtatur, dioptricæ ſubjunctus. Prodiere primum opera poſthuma Lugduni Batav. An. 1703. in 4. (2. Alph. 19. plag. Tabb. 24.), deinde cum aliis recuſa (§. 35. cap. 1.). Opus Hugenianum perfectiſſimum eorum, quæ in hoc genere proſtant: requirit autem lectorem in Geometria probe verſatum.

§. 9. Tyronibus adeo commendandum eſt *Dioptricæ* Tentamen Gallicum *Nicolai Hartſoeker* (Pariſ. An. 1694. 1. Alph. 10. plag.), ubi mnlta quoque ad Phyſicam & praxin ſpectantia traduntur. Ipſe enim in poliendis vitris & opticis technasmatis erat verſatiſſimus.

§. 10. In ſplendidi Operis dioptrici *Cherubini*, Capucini, Tomo primo, qui ſub titulo: *Dioptrique oculaire* Pariſiis An. 1671. in fol. (5. Alph. 11. plag.) Tabb. 16.) prodiit, multa ad praxin ſpectantia reperiuntur. In altero Tomo, qui ſub titulo: *La viſion parfaite* Pariſiis 1678. in fol. (3. Alph. 10. plag. Tab. 23. lucem adſpexit, argumentum palmarium eſt tubus binoculus, cujus ſub finem tomi primi mentionem injecerat.

§. 11.

§. 11. Opticam sine Catoptrica & Dioptrica tradit *Christophorus Scheinerus*, e Societate Jesu, in Oculo (Oeniponti 1619. in 4. 1. Alph. 10. plag.). Ab iis potissimum legendus, qui rationes phænomenorum visionis directæ cognoscere gestiunt.

§. 12. Vir summus *Newtonus* in egregio Optices opere novas luminis proprietates, ante nondum animadversas, & quarum consideratio (ceu ex *Hugenii* dioptrica apparet) maximi in Dioptrica momenti, per experimenta edocet. Prodiit opus primum Londini An. 1704. in 4. reg. (2. Alph. 5. plag.) sub titulo: *Opticks or a Treatise of the Reflexions, Refractions, Inflexions and coleurs of Light.* In fine adjiciuntur duo Tractatus Latini, primus scilicet de enumeratione linearum tertii ordinis, alter de Quadratura curvarum. Ipsum in Latinam linguam transtulit *Samuel Clarke* Autore approbante & nonnulla adjiciente (Londini An. 1706. in reg. 4. 2. Alph. 9. plag. Tabb. 19.) An. 1719. ibidem prodiit versionis editio altera in 4. (Alph. 2. plag. 8. Tabb. 12.), ubi quæstiones adjectæ augentur, sed Tractatus geometrici omittuntur, quos in Analysi sua ediderat *Jones* (§.21. cap. 4.). Post mortem *Newtoni* Londini 1729. in 4. (Alph. 1. plag. 14. Tabb. 24.) prodierunt Lectiones ejus opticæ An. 1669. 1670 & 1671 in Scholis publicis habitæ. In his equidem multa continentur quæ in Optica leguntur, alia tamen prorsus ratione proponuntur. Reperiuntur hic, quæ alibi frustra quæsiveris.

§. 13. Huc etiam referri potest *Mariotti* Tentamen de Coloribus (Paris. An. 1681. in reg. 12. Alph. 1. plag. 9. Tabb. 16.) quod Tentaminum Physicorum Gallice conscriptorum quartum est, & in editione Batava operum ipsius legitur, atque *Hugenii* Tractatus Gallicus de Lumine (Lugd. 1690. in 4. 1. Alph. 2. plag.), qui in Operum reliquorum volumine primo extat. Ejus hypothesi in explicandis phænomenis opticis utitur *Petrus Ango* in Optica Gallica (Paris. An. 1682. in 12.).

§. 14. *Andreas Tacquet* in Optica Perspectivæ fundamenta jecit & in Catoptrica speculorum planorum & sphæricorum pro-

proprietates bene demonstrat (§. 28. cap. 1.), sed Dioptricam non attingit. *Isaacus Barrowius* in Lectionibus Opticis, quæ Lectionibus Geometricis præmittuntur (§. 19. cap. 3.), theoriam Catoptricæ & Dioptricæ demonstrat. Nec dubitamus, quin *Jacobus Gregorius* in Optica promota multa præclara dederit, etsi nobis non visa. An. 1663. in 4. lucem adspexit.

§. 15. Utriusque Compendium dedit *David Gregorius* in Elementis Dioptricæ & Catoptricæ sphæricæ (Oxonii 1695. in reg. 8. plag. 7.). Idem in linguam Anglicam vertit *Wilhelmus Browne*, M. D. & prolixum supplementum adjecit atque Introductionem præmisit. Prodiit secunda vice cum appendice J. T. *Desagulieurs*, L. L. D. de telescopio reflectente cum epistolis, quas de eodem *Newtonus* & *Jacobus Gregorius* ad se invicem scripsere, Londini A. 1735. in 8. reg (plag. 20. Tabb. 4.). Prima telescopii catoptrico-dioptrici idea debetur *Gregorio*, qui eam describit in Optica promota p. 94. Sed eam perfecit *Newtonus* & tandem felicissime istiusmodi telescopium construxit *J. Hadley*, atque nunc construuntur ab *Eduardo Scarlet*, Optico Regio, ejusque filio. Descripsimus idem in Elementis Dioptricæ nostris.

§. 16. Opticam, Catoptricam & Dioptricam una exposuit *Zacharias Traberus*, e Societate Jesu, in Nervo Optico (Viennæ A. 1675. in fol. 2. Alph. 16. plag. Tabb. 28.). Multa in praxi jucunda habet, sed theoria exigui momenti. Quoad praxes opticas opus absolutum censeri potest *Johannis Zahn* Oculus artificialis teledioptricus. Editio altera auctior, sed vitiosior prodiit Norimbergæ An. 1702. in fol. (9. Alph. 8. plag.) cum figuris multis cum ligno, tum æri incisis. Huc etiam spectat *Athanasii Kircheri* Ars magna lucis & umbræ (Romæ 1646. in fol. 10. Alph. 16. plag. Tabb. 34.).

§. 17. *Johannes Christophorus* **Kolhans** in Tractatu Optico (Lips. 1663. in 8. 1. Alph. 15. plag.) non contemnenda prorsus dedit excerpta cum ad theoriam, tum ad praxin opticam spectantia, retentis ipsorummet Autorum verbis. Omnes

tres Opticæ partes discursu vulgari recensuit in gratiam artificum *Johannes Michaël Conradi* in Optica Germanica, quam sub titulo: **der dreyfach geartete Sehe-Strahl** Coburgi An. 1710. in 4. edidit (plag. 17. Tabb. 25.).

§. 18. De poliendis vitris Commentarios reliquit *Hugenius*, qui inter posthuma leguntur (§. 35). Hac arte excelluit ipse: primus enim lentes objectivas tanta exactitudine paravit, ut iis pares nullibi reperirentur, quemadmodum in Astronomicis docuimus & Dioptricis. In Germania An. 1716. in 8. (plag. 14. Tab. 20.) Halæ prodiit sub titulo: **Christian Gottlieb Hertels vollständige Anweisung zum Glasschleiffen, wie auch zu Verfertigung der optischen Maschinen.** Erat Autor Matheseos Professor in Academia illustri Lignicensi & in arte poliendi vitra plurimum exercitatus. Eandem notis illustravit *Joannes Georgius Leutmannus*, qui & ipse hanc artem non sine successu excoluerat. Prodierunt Wittebergæ An. 1719. in 8. (plag. 7. Tabb. 21.) sub titulo: Neue Anmerckungen vom Glasschleiffen.

§. 19. Scriptis opticis accenseri merentur ea, in quibus microscopicæ observationes recensentur. Pertinent huc 1. *Roberti Hooke* Micrographia Anglice scripta (Londini An. 1667. in fol. 3. Alph. 8. plag. Tab. 38.) 2. *Antonii van Leeuwenhoek* scripta varia; nempe α) Arcana Naturæ detecta Delphis 1695. in in 4. (Alph. 2. plag. 6. Tab. 11.) β) Continuatio Arcanorum Naturæ detectorum Ibid. An. 1697. in 4. (Alph. 1. plag. 2. Tab. 7.) γ) Arcana Naturæ ope & beneficio exquisitissimorum microscopiorum detecta Lugd. Batav. An. 1696. in 4. Alph. 3. Tab. 26.) δ) Continuatio epistolarum datarum ad longe celeberrimam Regiam Societatem Londinensem Lugd. Batav. 1696. in 4. (plag. 16½. Tab. 10.) ε) Epistolæ ad Societatem Regiam Anglicam & alios illustres viros, Lugd. Bat. 1719. in 4. (Alph. 2. plag. 11. Tab. 33.). ζ). Epistolæ physiologicæ super compluribus naturæ arcanis, Delphis 1719. in 4. (Alph. 2. plag. 16. Tab. 31). Titulus generalis: *Antonii a Leewen-*

wenhæk Opera omnia, seu Arcana naturæ ope exactissimorum microscopiorum detecta, experimentis variis comprobata, epistolis ad varios illustres viros, ut & ad integram, quæ *Londini floret*, *sapientem Societatem datis comprehensa* impressus Lugduni Batavorum & scriptis istis diverso tempore nec eadem prorsus forma editis in unum fasciculum collectis præfixus. 3. *Johannis Francisci* **Griendels von Aach** Micrographia curiosa Germanica (Norimbergæ 1687. in 4. plag. 9. Tab. 35.) 4. *Philippi Bonanni* Micrographia curiosa, adjuncta observationibus circa viventia, quæ in rebus non viventibus reperiuntur (Romæ An. 1691. in 4. 2. Alph. 12. plag. Tab. 68.)

§. 20. Inter scriptores Perspectivæ omnium maxime commendatur *Desargues*, cujus methodum universalem exercendi Perspectivam gallice conscriptam edidit *Abrahamus Bosse*, ex Gallico in Belgicum sermonem transtulit J. *Bara*. Prodiit Amstelodami 1686. in 8. (plag. 12. & figurarum æri incisarum 1. Alph.)

§. 21. Nec parum Perspectivæ studiosum juvant *Andreæ Alberti* Libri duo de Perspectiva, Norimb. An. 1670. in fol. plag. 19. Tab. XV.): primis vero tyronum conatibus respondet *Bernhardi Lamy* Perspectiva Gallice conscripta (Parisiis A. 1701. in 8.)

§. 22. Concinnas Praxium Perspectivæ demonstrationes dedit *Joh. Franciscus Niceron* ex Ordine Minimorum, in hac arte excellens, in Thaumaturgo Optico, cujus tantum pars prima Parisiis 1646. in fol. prodiit (2. Alph. 18. plag. Tab. 42). Post mortem ejus immaturam anno 1652. prodiit Perspectiva curiosa Gallice conscripta in 4. sub ejusdem nomine, in libros quatuor divisa, in qua plura continentur, quam in Thaumaturgo.

§. 23. Ad praxin properantibus & theoriam spinosam aversantibus satisfacit Anonymus Gallus e Societate Jesu in Perspectiva practica Gallice Parisiis 1642. in 4. publicata & a *Johanne Christophoro Remboldo* Germanice versa atque Augustæ Vindelicorum An. 1710. in 4. edita (1. Alph. 8. plag. cum 150

Tabulis

Tabulis æri incisis atque textui insertis). Enimvero A. 1663. prodiit editio altera duabus partibus & auctior, & quoad primam emendatior ac locupletior. (Tom. I. Alph. 2. plag. 10. Tom. II. Alph. 1. plag. 13. Tom. III. Alph. 2. plag. 8.). In parte secunda docetur Perspectiva corporum inclinatorum: in tertia agitur de laquearibus & anamorphosibus opticis, catoptricis & dioptricis.

§. 24. Praxin Perspectivæ multis exemplis illustrat *P. Andreas Puzzo* in Architectura Pictorum & Sculptorum. Tomus prior prodiit Romæ 1693. in fol. posterior ibidem A. 1700. in fol. Uterque totidem continet Tabulas æneas, quot folia, nimirum prior 102; posterior 120. Prior Germanice prodiit Augustæ Vindelicorum An. 1706. in fol. posterior ibidem An. 1709.

§. 25. An. 1711. *G. J. Gravesandius*, Juris Doctor, nunc Mathematum Professor Lugdunensis, Hagæ Comitum idiomate Gallico evulgavit Tentamen de Perspectiva, in 8. (plag. 12. Tab. 32.). Titulus libelli: *Essai de Perspective*, in quo multiplices regulas seu methodos demonstrat.

§. 26. Cæterum scriptoribus Opticis adhuc accensendus est *Honoratus Fabri*, e Societate Jesu, qui in Synopsi Optica (Lugd. An. 1667. in 4. 1. Alph. 8. plag.) illa omnia, quæ ad Opticam, Dioptricam & Catoptricam pertinent, breviter quidem, accurate tamen demonstrat.

CAPUT. IX.

De

ASTRONOMIA.

§. 1.

Scripta astronomica sunt varii generis. Aut enim observationes recensent, aut calculos motuum cœlestium trigonometricos & geometricos exponunt, aut tabulas Astronomicas complectuntur, aut usum

 globi

globi cœlestis, aut denique corporum mundanorum rationem declarant.

§. 2. Veterum observationes, quas inter eminent observationes *Hipparchi*, conservavit *Ptolemæus* in Almagesto. A. 882. apud Saracenos observationibus operam dedit *Albategnius.* Ab An. 1457. Norimbergæ iisdem incubuit *Johannes Regiomontanus* (vero nomine Müller), cui successere discipuli *Johan. Wernerus* & *Bernhardus Waltherus*, ab A. 1475. usque ad A. 1504. observationes suas continuantes. *Regiomontani* atque *Waltheri* observationes prodiere Norimbergæ cum quibusdam aliis *Regiomontani* atque *Purbachii* scriptis An. 1544. in 4. (plag. 22.). Titulus operis: Scripta *Johannis Regiomontani* de Torqueto, Astrolabio armillari, Regula magna Ptolemaica baculoque Astronomico & observationibus cometarum; item observationes motuum Solis ac stellarum tam fixarum, quam erraticarum; item libellus M. *Georgii Purbachii* de Quadrato Geometrico. Ab An. 1509. *Copernicus*, post eum *Wilhelmus* Hassiæ Landgravius cum Mathematico *Christophoro Rothmanno* & Mechanico suo *Justo Byrgio* Cassellis & *Tycho de Brahe* Uraniburgi observarunt. Incepit observationes suas *Tycho* A. 1582. easque continuavit usque ad A. 1601. majori & meliori instrumentorum apparatu, quam ante ipsum fecerat nemo. Omnes observationes hactenus recensitæ continentur in *Historia cœlesti*, quæ jussu *Ferdinandi* III. Imperatoris Ratisbonæ 1672. in fol. prodiit (12. Alph. 6. plag. Tab. III.). Describuntur quoque in eadem instrumenta *Tychonis*, una exhibentur observationes *Mœstlini*, *Schickhardi* aliorumque. Ipse alias *Tycho* instrumenta sua descripsit A. 1602. in Astronomiæ instauratæ Mechanica Norimbergæ An. 1602. in fol. edita (Alph. 1. plag. 11.). *Wilhelmi* vero Hassiæ Landgravii observationes una cum observationibus *Regiomontani* atque *Waltheri* edidit *Willebrordus Snellius* Lugduni Batavorum An. 1618. in 4. (Alph. 1. plag. 13.).

§. 3. Magis sumtuoso instrumentorum apparatu & majori studio, quam *Tycho*, observationibus cœlestibus vacavit *Johannes*

hannes Hevelius, Consul Dantiscanus. Instrumentorum apparatum descripsit Tomo primo Machinæ cœlestis (Gedani 1673. in fol. reg. 5. Alph. 4. plag. Tab. 30): Tomo secundo (Gedani A. 1679. in fol. 14. Alph. 6. plag.) observationes 48. annorum comprehendit. Dolendum vero, quod Tomi præsertim posterioris exemplaria pleraque ferali flamma fuerint absumta. Equidem *Robertus Hooke* in Animadversionibus in Tomum primum Anglico sermone editis Londini 1674. in 4. (plag. 11. Tab. æn. 3) instrumenta *Heveliana* reprehendit ceu minus exacta; sed celeberrimus *Hallejus* consensu Societatis Regiæ Britannicæ Dantiscum A. 1679. profectus & instrumentorum, & observandi accurationem approbavit. Observationes, quas in gratiam hospitis instituit, una cum aliis reperiuntur in Anno climacterico f. Rerum Uranicarum observationum quadragesimo nono (Gedani 1685. in fol. 2. Alph. 6. plag. Tab. 8). Jam ante An. 1661. celeberrimus Galliæ Astronomus *Ismaël Bullialdus* Dantiscum venit Observatorium *Hevelii* visurus & modum ejus observandi examinaturus. Quid uterque, *Bullialdus* nimirum atque *Hallejus*, de eodem senserint; docent *Excerpta ex literis illustrium & clarissimorum virorum ad* DN. Joh. Hevelium *perscriptis Judicia de rebus astronomicis ejusdemque scriptis*, quæ Dantisci An. 1683. in 4. (Alph. 1. plag. 5.) edidit *Joannes Ericus Olhofius* p. 67. 68. 71. 79. 187.

§. 4. In Anglia seculo superiori observandi studio clarus extitit *Jeremias Horoccius* ab A. 1636. usque ad A. 1640. Ejus observationes ex epistolis ad *Guil. Crabtrium*, suum in studiis astronominicis socium, excerptæ leguntur in operibus posthumis (Londini 1673. in 4. 3. Alph. 12. plag. Tab. 2). Adjiciuntur excerpta ex schediasmatis *Guil. Crabtrii* de observationibus ab ipso institutis A. 1635. 36. 37. & 38.

§. 5. In Italia *Joh. Baptista Ricciolus* superiori seculo observatorem egit, qui præcipuas observationes suas in Astronomia Reformata (Bononiæ 1665. in fol. 6. Alph. 5. plag.) cum selectis veterum & recentiorum observationibus contulit & de Astro-

Astronomiæ perfectione inde judicium tulit.

§. 6. Selectæ celeberrimi *Cassini* aliorumque observationes extant in præstantissimo opere, cujus titulus: *Recueil d' observations faites en plusieurs voyages par ordre de sa Majesté, pour perfectionner l' Astronomie & la Geographie, avec divers Traitez Astronomiques par Messieurs de l' Academie Royale des Sciences.* (Paris. 1693. in fol. 6. Alph. 12. plag. Tabb. 11.). Vide supra §. 37. c. 1. Ejusdem *Cassini*, aliorumque Astronomorum Regiorum, *Cassini junioris, Maraldi* atque *Philippi de la Hire* observationes complures extant in Commentariis Academiæ Regiæ Scientiarum, qui quotannis prodeunt: de quibus supra (§. cit.). Habemus quoque observationes non contemnendas in Transactionibus Anglicanis, Miscellaneis Berolinensibus, Commentariis Petropolitanis, Actis Eruditorum & Diario Trevoltiensi. Vide supra (§. 36. 38. 39.).

§. 7. In Anglia longa annorum serie observationes cœlestes continuavit observator celeberrimus *Joannes Flamstedius*. Quænam in historia ejus coelesti, ab Astronomis dudum desiderata, essent comparitura, in Miscellaneis Berolinensibus p. 263. & seqq. docetur A. 1712. Historiam cœlestem *Flamstædii* edidit *Hallejus* Londini in fol. reg. (Alph. 6. plag. 8. Tab. 5.) Libris duobus, quorum prior exhibet Catalogum stellarum Fixarum Britannicum novum & locupletissimum una cum earundem Planetarumque omnium observationibus sextante, Micrometro &c. habitis; posterior transitus siderum per planum arcus meridionalis & distantias eorum a vertice complectitur. Nimirum An. 1704. aliquot Societatis Regiæ Sodalibus, *Francisco* nimirum *Robartes*, *Christophoro Wrenno*, *Isaaco Newtono*, *Davidi Gregorio & Joanni Arbuthnot* ex chartis *Flamstædii* observationes ejus edendas suis sumtibus commiserat serenissimus Daniæ Princeps *Georgius*, Reginæ *Annæ* conjux: Sed cum moreretur, antequam liber observationum primus absolveretur, tandem Regina, *Flamstædii* oculis in nascentia indies siderum phænomena intentis & in ætate provecta minus acutis, hanc curam demandavit *Edmundo*

Halle-

Hallejo, ut ea quæ adhuc deerant perficeret. Enimvero cum editio non prorſus eſſet ad mentem *Flamſtædii*, de nova ipſe cogitavit: cui tamen immortuus eſt An. 1719. die ultima Decembris, cum magna ejus pars typis jam eſſet deſcripta, ita ut tandem denuo *Hallejus* editionem hanc novam ad umbilicum perducere teneretur. Prodiere itaque Hiſtoriæ cœleſtis Britannicæ Volumina tria, Autore *Joanne Flamſtædio*, Aſtronomo Regio, Londini in fol. maj. A. 1725. (Alph. 13.). Volumen I. continet ſtellarum fixarum & planetarum omnium obſervationes, ſextante & micrometro peractas, ſubjunctis locis, quæ ex obſervationibus deducta ſunt. Volumen II. complectitur fixarum ſtellarum & planetarum omnium tranſitus, per planum arcus meridionalis & diſtantias eorum a vertice, nec non Solis, Lunæ & Satellitum Jovis obſervationes arcu meridionali habitas & loca planetarum inde derivata ab An. 1689. ad An. 1720. Volumen III. comprehendit Hiſtoriam Aſtronomiæ, Catalogos fixarum ante autorem editos una cum *Abrahami Scharpii* Indice fixarum auſtralium in noſtro hemiſphærio non conſpicuarum & Catalogum Britannicum Autoris ad A. C. 1689. cui ſubjunguntur longitudines & latitudines ſtellarum fixarum, quæ a Luna tegi poſſunt, ſigillatim & appendicula Tabularum aſtronomicarum a *Scharpio* conſtructarum. Optandum quoque foret, ut ſelectæ obſervationes Hafnienſes *Ræmeri*, Berolinenſes *Kirchii* ac viduæ ipſius, Norimbergenſes *Eimarti* atque *Wurtzelbaueri* lucem publicam adſpicerent.

§. 8. *Franciſci Blanchini* obſervationes aſtronomicas & geographicas per Italiam paſſim habitas nuperrime Veronæ in fol. edi curavit *Euſtachius Manfredi*, Aſtronomus Bononienſis.

§. 9. Obſervationes phyſicæ, mathematicæ atque botanicæ juſſu Regis Chriſtianiſſimi in America Meridionali & India occidentali ab A. 1701. usque ad annum 1712. a *Ludovico Feuillée*, Minimo, factæ ſub titulo: *Journal des Obſervations phyſiques, mathematiques & botaniques* prodiere Pariſiis duobus Volum. in 4. reg. 1714. & 1725.

(Vol. I. Alph. 4. plag. 6. Tab. æn. 66. Vol. II. Alph. 3. plag. 5. Tab. æn. 57. & A. 1729. *E. Souciet*, e Societate Jesu, idiomate Gallico Parif. in 4. reg. (Alph. 1. plag. 18. Tab. 8.) publicæ luci exposuit observationes mathematicas, astronomicas, geographicas, chronologicas & physicas ex antiquissimis Sinarum libris exceptas & recentius a Patribus Societatis in India & China factas. Addit An. 1732. Tomum secundum, qui continet Historiam Astronomiæ Sinarum a R. P. *Gaubil* e Societate Jesu conscriptam cum dissertationibus (Alph. 2. plag. 5. Tab. 3.). Huc etiam referendæ sunt *Francisci Noel*, Societatis Jesu, Observationes mathematicæ & physicæ in India & China factæ ab An. 1684. usque ad An. 1708. quæ Pragæ 1710. in 4. (plag. 14. Tab. 1.) prodierunt.

§. 10. Astronomiam Geometricam inter veteres justo volumine exposuit *Claudius Ptolemæus* anno Christi 147. mortuus. Opus ejus, quod *μεγάλη σύνταξις* inscribitur, A. C. 827. jussu *Maimonis* Regis Saracenorum in Arabicum translatum & A. 1528. ex Arabico in Latinum versum a *Georgio Trapezuntio* & a *Luca Gaurico* Mathematum Professore Neapolitano revisum illoque anno primum editum. An. 1551. idem cum ejusdem *Ptolemæi* scriptis Astrologicis, libris nempe quatuor de judiciis, Centiloquio & significationibus stellarum inerrantium sub titulo: Cl. *Ptolemæi omnia, quæ extant, Opera præter Geographiam*, Basileæ in fol. (6. Alph.) opera *Erasmi Oswaldi* recusum.

§. 11. Cum ipsum Astronomiam integram complectatur, sed ad captum ty[r]onum minime sit accommodatum; *Georgius Purbachius* in commodiorem formam id redigere cœpit. Sed cum vix cœpto labore rebus humanis valedicere cogeretur; *Regiomontanus* discipulus suasu Præceptoris telam pertextam absolvit. Recusi sunt ejus Libri tredecim in *Ptolemæi* magnam compositionem, quam Almagestum vocant, Noribergæ 1550. in fol. (2. Alph. 11. plag.) & in iis universa doctrina de cœlestibus motibus, magnitudinibus, eclipsibus &c. in epitomen redacta proponitur. Commendantur merito Astronomiæ studiosis, præsertim si qui Astronomiam

nomiam veterem cognoscere in animum induxerint.

§. 12. Juxta formam *Almagesti* inter Arabes *Albategnius* opus de Scientia stellarum composuit, Norimbergæ 1537. & Bononiæ 1545. in 4. editum, in quo ex propriis observationibus Astronomiam perficere studet.

§. 13. Seculo decimo sexto *Nicolaus Copernicus* in libris 6. Revolutionum cœlestium aliquoties recusis, resuscitato *Philolai* de motu Telluris dogmate, primus ad theoriam cœlo consonam fundamenta posuit. Prostat inter alias editiones Basileensis A. 1566. in fol. (Alph. 4. plag. 14.). *Copernicum* secutus *Philippus Lansbergius* theorias motuum cœlestium faciles dedit (§. 26. cap. 1.).

§. 14. Ex adverso autem *Christianus Severinus Longomontanus* in Astronomia Danica, in qua integram Astronomiam pertractat & regulas exemplis veris illustrat, theorias intricatiores proposuit, cum motum Telluris annuum circa Solem in Astronomiam cum *Tychone* admittere nollet. (Amstelod. 1640. in fol. 6. Alph.). Etenim extra omnem controversiam positum est, motus Planetarum per hypothesin Terræ motæ non modo facilius, quam in hypothesi Terræ quiescentis explicari posse; verum etiam loca planetarum in ista computata cum cœlo demum consentire. Unde etiam Inquisitores in Italia permittunt, ut eadem utantur Astronomi, etsi eam pro veritate demonstrata venditari non ferant.

§. 15. Omnes omnino Astronomi usque ad *Keplerum* motum planetarum circularem statuerunt: unde theoriæ ipsorum cœlo non satis responderunt. Hanc Astronomiam circularem omnium optime exposuit *Andreas Tacquet* in octo de Astronomia libris (§. 28. cap. 1.). Dolendum vero, quod præcepta nullis exemplis illustraverit, ut magis inservirent studiis tyronum.

§. 16. Enimvero vir acerrimi judicii ingeniique sagacissimi *Johannes Keplerus* observationibus *Tychonis* (quas eiam adhibuerunt *Longomontanus* atque *Lansbergius*) felicissime usus in Commentariis de motibus stellæ Martis seu Astronomia nova αἰτιολογητὸς (A. 1609. in fol. (4.

 Alph.

Alph.) theoriam planetarum ellipticam proposuit & in Epitome Astronomiæ Copernicanæ (Franc. 1635. in 8. 2. Alph. 15. plag.) ad omnium planetarum motus supputandos adhibuit ac primus in causas physicas motuum cœlestium inquirere cœpit. Hanc theoriam causis physicis convenientem demonstravit *Newtonus* lib. 3. Princ. Mathem. Philos. Nat. itemque *Leibnitius* in Tentamine de causis motuum cœlestium physicis, quod legitur in Actis Eruditorum A. 1689. p. 82. quod idem suo modo ostendere conatus *Philippus Villemot* in Novo systemate motus Planetarum Lugduni An. 1707. in 12. (plag. 12. Tab. 12.) edito. Phænomenis rectius, quam cœteras hypotheses, satisfacientem deprehenderunt Astronomi.

§. 17. Equidem *Kepleri* inventa sprevit *Lansbergius* suaque iisdem anteposuit: sed optime illum contra hujus insultus defendit *Horoccius* in posthumis (§. 4.), qui in extollendis laudibus *Kepleri*, a quo sub initium studii astronomici *Lansbergii* magnificis promissis & nimium acerbis in *Keplerum* stricturis factus fuerat alienior, veluti extra seipsum rapitur.

§. 18. *Ismaël Bullialdus* in Astronomia Philolaica (Parisiis 1645. in fol. 7. Alph. 20 plag.) *Kepleri* theoriam emendare conabatur, ut scilicet calculus magis geometricus fieret, cum *Keplerus* regula positionum interdum uti cogatur (§. 691. *Astron.*): ostendit vero *Sethus Wardus*, Astronomiæ in Academia Oxoniensi Professor, in Inquisitione in Astronomiam Philolaicam *Bullialdi*, quæ Tractatui de Cometis subjecta prodiit Oxonii A. 1653. in 4. (plag. 14), errores quosdam ab ipso fuisse commissos: quos agnoscens *Bullialdus* in Fundamentis Astronomiæ Philolaicæ clarius explicatis & assertis adversus *Wardi* impugnationem (Parisiis An. 1657. in 4. plag. 7.) emendavit. Cæterum *Wardus* Ideæ quoque Trigonometriæ demonstratæ, quæ cum prælectione de Cometis Oxonii 1654. in 4. (plag. 3.) prodiit, inquisitionem aliquam in *Bullialdi* Astronomiæ Philolaicæ fundamenta adjecit.

§. 19. *Sethus Wardus* in Astronomia Geometrica (Londini

ni

ni 1656. in 8. reg. 14½. plag.) methodum geometricam proposuit motus siderum computandi; sed a veris motuum regulis per *Keplerum* stabilitis recedit. Eandem anno sequenti proposuit *Comes de Pagan* in Theoria Planetarum Parisiis A. 1657. in 4. idiomate patrio edita. Non ignoravit eam *Keplerus*; sed ex Epitome Astronomiæ Copernicanæ haud obscure colligitur, quod ideo rejecerit, quia veris naturæ legibus adversam reperit.

§. 20. *Bullialdi* hypothesin excoluit *Vincentius VVing* in Astronomia Britannica (Londini A. 1669. in fol. 7. Alph. 5. plag.) ubi præcepta singula Astronomiæ practicæ veris exemplis illustrantur ad captum tyronum studii Astronomici. Præmittit Trigonometriam tam planam & sphæricam, in qua exemplis illustrantur problemata, & in sphærica exhibet regulam catholicam *Neperi*.

§. 21. *VVardianam* ad numeros revocavit *Johannes Newton* in Astronomia Britannica patrio sermone conscripta (Lond. 1657. in 4. 1. Alph. 20. plag.). Eandem excoluit *Thomas Streete* in Astronomia Carolina Londini 1661. in 4. (plag. 29.) primum edita & non sine augmento ibidem 1710. in 4. (2. Alph. plag. 3.) recusa. Id peculiare habet, quod motum Apheliorum & Nodorum sustulerit. Astronomiam hanc Carolinam ex idiomate Anglico in Latinum transtulit Gabriel Doppelmayer & Norimbergæ An. 1705. in 4. (Alph. 1. plag. 13. Tab. 5.) edidit.

§. 22. Omnia Astronomorum tam veterum, quam recentiorum hypotheses atque inventa, quæ tunc temporis prostabant, in unum volumen congessit *Johannes Baptista Ricciolus* e Societate Jesu in Almagesto Novo (Bon. A. 1651. in fol. 16½ Alph.). Contra *David Gregorius* in Elementis Astronomiæ Physicæ & Geometricæ (Oxoniæ 1702. in fol. 5. Alph. 12. plag.) recentiorem Astronomiam exposuit, *Copernici*, *Kepleri* atque *Newtoni* inventis superstructam, quorum ille verum systema mundi, iste veras planetarum orbitas ac motuum leges, hic tandem omnium causas physicas detexit. Multum præstantiæ operis accederet, si numeris ex recentioribus obser-

vationibus illustraretur. In Anglia in linguam Anglicam versa sunt hæc Astronomiæ elementa: Latina vero recusa sunt Genevæ A. 1726. in 4. (Alph. 5. Tab. 46.) cum nonnullis additamentis.

§. 23. Nucleum Astronomiæ recentioris exhibuit *Guilielmus VVhiston* in Prælectionibus Astronomicis (Cantabrigiæ 1707. in 8. reg. 1. Alph. 6. plag.) solam tamen partem theoricam perstingit. Idem fuit institutum *Joannis Keill* in Introductione ad veram Astronomiam (Oxoniæ 1718. in 8. Alph. 1. plag. 9½. Tabib. 2.), in qua recentissima continentur Astronomorum inventa. Alias Tyronibus inprimis commendandi sunt *Nicolai Mercatoris* Institutionum Astronomicarum Libri duo (Londini A. 1676. in 8. 1. Alph.), in quo & Sphærica, & theorica juxta hypotheses tam veteres, quam recentiores breviter explicatur & exemplis illustratur, calculus quoque stronomicus perspicue docetur.

§. 24. Quodsi cui volupe fuerit, theoricas veterum animi gratia cognoscere; ei satisfaciet *Purbachius* in Theoricis Planetarum sæpius editis. Recusæ sunt Basileæ An. 1569. in 8. cum *Regiomontani* disputationibus contra Cremonensia in planetarum theoricas deliramenta & *Johannis Essleri* speculo Astrologico (plag. 18.). Accessere huic editioni *Christiani VVurstisii*, Mathematum Professoris Basileensis, quæstiones novæ in illas theoricas (1. Alph. 5. plag.). Explicat autem *Purbachius* in tyronum gratiam solas theoricas planetarum, forma calculi geometrici neglecta, quæ ex *Regiomontani* Epitome Almagesti *Ptolemæi* hauriri debet. Hasce Theoricas prolixo ac perspicuo Commentario illustravit *Erasmus Oswaltus Schreckenfuchsius*, qui Basileæ An. 1556. in fol. (Alph. 5. plag. 5.) prodiit, ita ut Astronomiam veterem, qualem tradidit *Ptolemæus*, omnium optime ex hoc opere haurire possint tyrones. Theoricam Astronomiam tantummodo explicavit in gratiam tyronum *Purbachius*, quia isto tempore in Scholis doctrina sphærica tradebatur ex *Joannis de Sacro Bosco* libello de Sphæra, sæpissime recuso, quem prolixo Commentario illustravit *Clavius*

vius Tomo tertio Operum (§. 24.). *Michaël Mœstlinus*, Matheseos Professor Tubingensis, *Kepleri* Præceptor, in Epitome Astronomiæ (Tubingæ A. 1610. in 8. 1. Alph. 12. plag.) non modo theoricas Planetarum, sed & partem Astronomiæ sphæricam explicat.

§. 25. Tabulæ Astronomicæ antiquissimæ sunt *Ptolemaicæ*, in *Ptolemæi* Almagesto; sed hodie cum cœlo non amplius consentiunt. Eas A. 1252. corrigi curavit *Alphonsus* XI. Rex Castiliæ, usus inprimis opera *Isaaci Hazan* Judæi, impensis 400000. aureorum factis. Hinc enatæ sunt *Tabulæ Alphonsinæ*, quibus ipse Rex præfationem præmisit. Sed mox harum etiam defectum agnoverunt Astronomi periti *Purbachius* & *Regiomontanus*: unde *Regiomontanus* & post ipsum *Waltherus* atque *VVernerus* observationibus cœlestibus incubuerunt; non tamen fata permisere, ut iis emendandis manum admoverent. Sane Tabulæ resolutæ, quas dedit *Regiomontanus*, ex Alphonsinis derivatæ. Hasce correctas & locupletatas edidit *Schonerus* An. 1536. & reperire licet in Operibus ejus mathematicis, de quibus postea dicemus. Neque ab his abludunt Tabulæ resolutæ de supputandis siderum motibus *Joannis Virdungi Haffurdii*, quas A. 1542. Norimbergæ edidit *Jacobus Curio*, nunquam antea typis excusas, in 4. (plag. 15.), nisi quod sint breviores.

§. 26. *Nicolaus Copernicus* in libris Revolutionum cœlestium tabulis Alphonsinis alias substituit ex recentioribus & partim propriis observationibus a se supputatas; sed ex Copernici observationibus & theoriis mox *Erasmus Reinholdus* Tabulas Prutenicas procudit, aliquoties recusas. Utor ego editione Tubingensi A. 1571. (in 4. 2. Alph. 15. plag.).

§. 27. Tabularum Prutenicarum imperfectionem juvenis agnovit *Tycho de Brahe*: qua agnita permotus, ut tanto cum fervore observationes cœlestes venaretur. Ipse tamen nonnisi Solis ac Lunæ motus inde restituit Progymnasmatum Tomo primo. Sed mox iisdem utebantur *Longomontanus*, qui in Astronomia Danica exemplo *Ptolemæi* & *Copernici* theoricis singulorum Planetarum tabulas

bulas motuum subjunxit, *Danicarum* nomine hodienum celebratas, & *Keplerus*, cujus opera prodiere *Tabulæ Rudolphinæ* (Ulmæ 1627. in fol. 2. Alph. 20. plag.), quæ hodienum magno in pretio habentur, anterioribus omnibus prælatæ. Has in aliam formam transmutavit *Maria Cunitia*, cujus Urania propitia sive Tabulæ Astronomicæ mire faciles vim hypothesium physicarum a *Keplero* proditarum complexæ, facillimo calculandi compendio sine ulla Logarithmorum mentione phænomenis satisfacientes Latine & Germanice Olsnæ in Silesia An. 1650. in fol. (6. Alph. 4. plag.) prodiere, ut scilicet calculus *Rudolphinus* difficilis facilior redderetur. Idem institutum fuit *Mercatoris* in Astronomicis Institutionibus (§. 23.) & *Joh. Baptistæ Morini*, cujus Tabulas *Rudolphinas* in compendium redactas versioni Latinæ Astronomiæ Carolinæ *Streetii* subjunctæ (§. 21.).

§. 27. Equidem *Lansbergius* Tabularum Rudolphinarum fidem sublestam reddere tentavit & Tabulas motuum cœlestium perpetuas, quas vocat, condidit (§. 26. c. 1.) sed non solum *Horoccius* hominis arrogantiam retudit in Astronomia Kepleriana defensa, quæ maximam posthumorum partem absolvit (§. 4.); verum etiam reliqui Astronomi parum eidem tribuerunt. Similiter *Rudolphinarum* autoritatem non imminuere *Tabulæ Britannicæ VVingii* (§. 20.), quæ in ipsius Astronomia Britannica leguntur, & *Newtoni*, quas in sua Astronomia Britannica proposuit (§. 21.), nec Gallicæ Comitis *de Pagan* (Paris. 1658. in 4. 1. Alph. 11. plag.), Novalmagesticæ *Riccioli*, quæ extant in ejusdem Astronomia Reformata (§. 22.), Philolaicæ *Bullialdi*, quæ leguntur in Astronomia Philolaica (§. 18.) & Carolinæ *Streetii* in Astronomia Carolina (§. 21.). Inter meliores tamen censentur Philolaicæ & Carolinæ, ita ut ob benignum *Flamstedii*, optimi hac in re arbitri, judicium Carolinas prælectionibus suis Astronomicis subjunxerit *VVhiston* (§ 23.)

§. 28. Novas quoque Tabulas ex datis *Keplerianis* & *Bullialdinis* juxta propriam hypothesin Conoellipticam supputavit *Joh. Jacobus* **Zimmermann** Eccle-

Ecclesiæ Würtemberga-Bieticanæ Diaconus, in Prodomo Bicipite Cono-ellipticæ & a priori demonstratæ Planetarum Theorices (Stutgardiæ 1679. in 4. plag. 15.); sed nullam hactenus in foro Astronomico autoritatem adeptæ.

§. 30. Tabulæ omnium novissimæ sunt Ludovicianæ, quas Astronomus præclarus *Philippus de la Hire* ex solis observationibus, citra ullius hypotheseos subsidium, deduxit: quod ante inventa micrometra, tubos & horologium oscillatorium impossibile habebatur. Prodiere Parisiis 1702. in 4. (1. Alph. 4. plag. Tab. IV.) cum ante jam 1687. Tabulæ Solares & Lunares sub titulo partis prioris Tabularum Astronomicarum (in 4. plag. 17.) lucem adspexissent. Haberi possunt pro Tabulis Rudolphinis correctis. Dudum etiam in manibus Astronomorum versantur *Joh. Dominici Cassini* Tabulæ astronomicæ & in Anglia novas condidit *Hallejus*.

§. 31. *Johannes Hevelius* in Prodromo Astronomiæ (Gedani 1690. in fol. 4. Alph. 7. plag. Tab. I.) cum Catalogo fixarum ex propriis observationibus deducto Tabulas quoque Solares exhibuit domesticis observationibus superstructas, quæ præstantissimæ habentur. Optandum vero fuisset, ut fata permisissent, quo reliquorum quoque Planetarum Tabulas conderet observationum suarum fructum laturus celeberrimus Autor.

§. 32. Primum fixarum Catalogum confecit ex domesticis observationibus *Hipparchus*, quem ad suum tempus reductum *Ptolemæus* exhibuit in Almagesto lib. 7. Novum dedit *Tycho* Progymnasmatum Tomo primo p. 257. & seqq. quem extendit *Keplerus* in Rudolphinis. Exhibet fixarum Catalogum, sed tantummodo correctum, non vero ex propriis observationibus conditum *Ricciolus* in Astronomia Reformata. Ast Tabula Longitudinis ac Latitudinis stellarum fixarum ex observatione *Ulugh Beighii*, Tamerlani Magni Nepotis, ex MSC. Persicis Latine vertit, Commentariis illustravit & Oxonii A. 1665. in 4. (1. Alph. 13. plag.) edidit *Thomas Hyde*. Addit *Muhammedis Tixini* Tabulas

las declinationum & Ascensionum rectarum. *Hevelius* in Prodromo catalogus fixarum omnes, qui hactenus prostant, una exhibet atque inter se comparat.

§. 33. Enimvero locupletissimus Fixarum omnium, quæ conspici possunt, ex propriis observationibus conditus a *Flamstædio* & sub titulo: Catalogi Fixarum Britannici exhibetur in Astronomi summi Historia cœlesti, de qua abunde diximus superius (§. 7.).

§. 34. Astra describunt & schematismis illustrant *Johannes Bayerus* in Uranometria Ulmæ 1661. quæ prodiit textu in 4. figuris in folio impressis (plag. 13. Tabb. 48.), qua in citandis stellis utuntur Astronomi, & *Johannes Hevelius* in Firmamento Sobiesciano (Gedani A. 1690. in fol. plag. 6. Tabb. æn. 54.). Optandum vero fuisset, ut literas, quibus ad indigitandas stellas usus fuit *Bayerus*, etiam *Hevelius* retinuisset: id quod fecit *Johannes Flamstædius* in opere magnifico *Atlantis cœlestis*, quod Londini 1729. in fol. reg. (plag. 5. Tab. 29.) prodiit. Compemdia usibus tyronum servientia, sunt *Ægidii Strauchii* Astrognosia (Wittebergæ An. 1684. in 12. plag. 9. Tabb. 25.) & *Wilhelmi Schickardi* Astroscopium (Lipsiæ An. 1698 in 12. plag. 6. Tabb. 2.)

§. 35. Globi cœlestis constructionem & usum perspicue explicavit *Schonerus* in Tractatu, qui inter opera ipsius extat. Recentius præter alios usum globi cœlestis docent *Guilielmus Bleau* in Institutione Astronomica de usu globorum (Amstelodami 1690. in reg. 8. plag. 16.) & *Bion* in libro Gallico ejusdem argumenti, qui sub titulo *Usage des Globes celestes & terrestres & des spheres* Parisiis 1699. in 12. reg. (16. plag. Tabb. 26.) prodiit, ac nuper auctior recusus.

§. 36. Librum *Bionis* Germanice vertit & annotationibus nonnullisque additamentis locupletavit D. *Christianus Philippus* **Berger**. Prodiit Lemgoviæ sub titulo: **Des Herrn Bions Abhandlung von der Welt-Beschreibung und dem Gebrauch derer Himmels und Erd-Kugeln auch Sphæren** An. 1736. in 8. (Alph. 1. plag. 19. Tab. 35.)

Expli-

Explicat hic Autor in altera præsertim editione, quæ ex Astronomia & Geographia tanquam cognita supponi debent, siquidem usum utriusque Globi, terrestris scilicet ac cœlestis, intelligere volueris. Adduntur etiam physica de Meteoris & alia, quæ ad Calendarii notitiam faciunt.

§. 37. Cum *Lotharius Zumbach de Kœsfeld*, Med. D. postea Matheseos Professor in illustri Collegio Carolino, quod Cassellis erat, novos Globos, cœlestem juxta Catalogum fixarum *Hevelii* & terrestrem ex recentissimis observationibus, *Gerardo Valk* chalcographo construxisset, adornationem quoque & distributionem ac usum Globorum descripsit. Enimvero quia Globus cœlestis tantummodo satisfacit phænomenis primi mobilis novum excogitavit instrumentum astronomicum, quale adhuc desiderari arbitrabatur, quo loca & motus Planetarum atque stellarum fixarum proprii in longitudinem & latitudinem Zodiaci, eclipses Solis & Lunæ, occultationes stellarum aliaque plurima inde derivata absque calculo exacte, facile ac promte exhibentur. Instrumentum hoc *Planetolabium* appellavit & *Gerardus Valk* dextre idem præparavit. Descriptioni itaque Globorum adjunxit descriptionem Planetolabii sui, explicans omnem ejus rationem & usum. Utraque descriptio sub titulo: Praxis Astronomiæ utriusque, ut & Geographiæ exercita per usum Globi cœlestis & Terrestris, tum & Planetolabii, prodiit Amstelodami A. 1700. in 4. Descriptio globorum constat plag. 18. Tab. 4. Planetolabii plag. 9. Tab. 2. Supponit illa ad manus esse Globos, hæc Planetolabium. Equidem *Schonerus* jam invenerat Organum Uranicum, quod vocat, e quo facillime absque scrupulosa supputatione veri mediique planetarum motus reperiuntur, & quod sub finem operum describitur; cum tamen ejus constructio nitatur hypothesibus veterum, *Zumbachii* vero Planetolabium secundum hypothesin recentiorem ellipticam & *Bullialdi* inprimis Astronomiam Philolaicam fuerit constructum, & multo accuratius exhibeat loca planetarum, quin non inuti-

lem operam sumserit *Zumbachius* dubitandum non est. Ne quid in mechanica Astronomiæ Theoricæ parte desiderari posset, addidit idem *Jovilabium* & *Saturnilabium*, quorum isto loca Satellitum Jovis, hoc autem loca Satellitum Saturni absque calculo ad datum quodcunque tempus determinantur. Descriptio Jovilabii prodiit Amstelodami A. 1716. in 4. (plag. 6. Tab. 1.); Saturnilabii vero ibidem An. 1726. in 4. (plag. 9. Tab. 2.).

§. 38. Construxit *Zumbachius* Planetolabium suum ad imitationem Astrolabii, instrumenti ad explicanda phænomena motus primi dudum adhibiti. Astrolabii constructionem & usum rigidissime demonstravit *Clavius* in Tractatu de Astrolabio, qui in Operibus ejus legitur (§. 24. c. 1.). Etsi autem *Clavius* tantummodo de polari, quod vocatur, egerit; tanta tamen usus prolixitate & schemata construxit tam implexa ac intricata, ut a nullo mortalium totum fuisse perlectum judicet *Tacquetus*. Quamobrem ipse lib. 3. Opticæ, qui de projectione astronomica agit, doctrinam hanc magis perspicue proponit, & non minus æquinoctiale, quam polare explanat. Ceterum quoad doctrinam de projectione sphæræ tam orthographica, quam stereographica commendari meretur Tractatus, quem sub titulo: *A Treatise of the sphere* patrio sermone Londini A 1714. edidit *Joannes Witty* (plag. 15. Tab. 10.). Tyronibus autem, qui usum Astrololabii cognoscere student, satisfaciet *Bion* in Tractatu, qui Parisiis A. 1702. in 12. reg. (plag. 10½. Tab. 9.) sub titulo: *L' usage des Astrolobes tant universels, que particuliers* lucem adspexit.

§. 39. Ad naturam siderum & rationem universi cognoscendam conducunt præter *Ricciolum* in Almagesto *Christophori Scheineri* Rosa Ursina (Bracciani A. 1626. usque ad A. 1630. in fol. 11. Alph. cum figuris multis textui insertis) opus de maculis solaribus absolutissimum; ejusdem disquisitiones Mathematicæ de controversiis & novitatibus astronomicis (Ingolstadii 1614. in 4. plag. 12.); opusculum de refractionibus coelestibus (Ingolstadii 1617. in 4.) & ejusdem Sol ellipticus (Augustæ

gustæ Vindelicorum in 4. plag. 5.); *Gallilæi* Tractatus de maculis solaribus (Romæ 1613.) & Nuncius sidereus aliquoties recusus; ejusdem dialogi de Systemate mundi (Lugd. Bat. An. 1699 in 4. 3. Alph.), opus lectu dignissimum; *Johannis Kepleri* Tractatus Germanicus de Cometa anni 1607 (Halæ 1608. in 4. plag. 5.) & de Cometis libelli tres (Augustæ Vindelicorum 1619. in 4 plag. 20. Tab. 1.): ejusdem Prodromus dissertationum cosmographicarum, continens Mysterium cosmographicum de admirabili proportione orbium cœlestium deque causis cœlorum numeri, magnitudinis motuumque periodicorum genuinis & propriis, demonstratum per quinque regularia corpora Geometrica, cum Narratione *Georgii Joachimi Rhetici* de libris revolutionum *Nicolai Copernici* (Tubingæ 1596. in 4. 1. Alph.): ejusdem Somnium seu opus posthumum de Astronomia lunari (Francof. 1634. in 4. 1. Alph.): ejusdem Harmonica Mundi (Lincii 1619. in fol. 3. Alph. 13. plag.): ejusdem Hyperaspistes *Tychonis* (Franc. 1625. in 4. plag. 28.) adversus *Scipionis Claramontii* Antitychonem, in quo contra *Tychonem Brahe* demonstrare satagit cometas esse sublunares, non cœlestes (Venetiis 1621. in 4. 2. Alph. 2. plag.); *Hevelii* Selenographia (Gedani 1647. in fol. 6. Alph. 10. plag. Tabb. 111.), in quo ejus facies secundum omnes phases accuratissime delineatur: ejusdem Prodromus Cometicus, quo historia Cometæ A. 1664. exorti, cursum faciesque diversas capitis ac caudæ accurate delineatas complectens, nec non dissertatio de Cometarum omnium motu, generatione variisque phænomenis exhibetur (Gedani 1665. in fol. plag. 17. Tab. 3.): ejusdem descriptio Cometæ A. 1664. (Gedani 1666. in fol. 2. Alph. 5. plag. Tab. 7.): ejusdem epistola de Cometa A. 1672. (Gedani 1672. in fol. 2. plag. Tab. 1.): ejusdem Cometographia (Gedani 1668. in fol. 10. Alph. 19. plag. Tabb. 38.), opus de Cometis absolutissimum: ejusdem dissertatio de nativa Saturni facie (Gedani 1656. fol. 12. plag. Tab. 9.), ubi phases Saturni delineat & ad causas suas revocare studet: ejusdem Mercurius in Sole visus cum *Horoccii*

Venere in Sole visa & Historia stellæ miræ (Gedani 1662. in fol. 2. Alph. 2. plag. 10. Tabb.), *Christiani Hugenii* Systema Saturninum (Hagæ Comitis 1659. in 4. plag. 12.), in quo annulus Saturni describitur & unus ejus satellitum annunciatur; & inprimis ejusdem Cosmotheoros (ibid. 1698. in 4. plag. 18. Tab. 5. it. Leoburgi 1704. in 8. plag. 8. Tab. 5.), in quo natura planetarum ex conjecturis probabilibus eruitur: *Francisci Blanchini* Hesperi & Phosphori Nova phænomena, sive Observationes circa Planetam Veneris (Romæ 1728. in fol. Alph. 1. plag. 2. Tab. 10.), in quo opere maculæ Veneris exactissime delineantur & Veneri eadem opera impenditur, quam in Luna, consumsit *Hevelius* præter alia ad parallaxin Veneris & ejus a Terra distantiam spectantia: *De Mupertuis* Discursus Gallice conscriptus de Figuris differentibus astrorum (Paris. 1732. in 8. plag. 5½.): *Jacobi Bernoulli* Conamen novi systematis Cometarum (Amstelodami An. 1682. in 8. 6½. plag. Tab. 8.): *Joh. Baptistæ du Hamel* Astronomia Physica (Tom. 1. Operum Philos. Norimb. 1681. in 4.): *Wilhelmi Derham* Theologia Astronomica, quæ sub titulo: *Astro-Theology* Londini An. 1715. in 8. (plag. 20. Tab. 3.) prodiit & Hamburgi ex Anglico sermone in Germanicum translata lucem adspexit.

§. 40. Huc etiam referendi sunt Autores qui motuum cœlestium causas physicas tradere aggressi sunt *Kepplerus* in Physica cœlesti seu Commentariis de motibus stellæ Martis & in Epitome Astronomiæ Copernicanæ (§. 16.), *Newtonus* in Principiis Philos. Natur. Mathem. cum *Gregorio* in Elementis Astronomiæ (§. cit.) *Villemot* supra laudatus (§. *cit.*): & Cel. J. *Polenus* in dialogo de Vorticibus cœlestibus (Patavii 1712. in 4. 1. Alph. 6. plag. 7. Tab.).

§. 41. Systema Copernicanum defendunt præter *Gallilæum* ante laudatum in Dialogis de Systemate mundi (§. 39.) peculiaribus scriptis *Petrus Megerlinus*, Professor Mathematum Basileensis in Systemate mundi Copernicano argumentis invictis demonstrato (Amstelodami An. 1682. in 8. plag. 6. Tab. 3.); *Bul-*

Bullialdus in Philolao ab inferis resuscitato seu dissertatione de vero systemate (Amstelod. An. 1639. in 4.), *Petrus Horrebovius* Mathematum Professor Hafniensis, in Copernico triumphante, sive de parallaxi Orbis annui Tractatu epistolari (Hafniæ 1727. in 4. plag. 7. Tab. 1.) & *Joh. Jacobus* **Zimmermann** in Scriptura Copernizante Germanice sæpius edita. Utor editione Noribergensi anni 1709. in 8. (plag. 8.).

§. 42. Astronomiam, quam in parte prima secundum proprias hypotheses explicaverat, in secunda ad usum concionatorum transfert *Antonius Maria Schyrlæus de Rheita*, Capucinus, in Oculo *Enochi* atque *Eliæ*, seu Radio sidereo mystico (Antverpiæ 1665. in fol. 4. Alph. 9. plag.), qui etiam sub finem partis primæ praxin diopticæ explicat.

§. 43. Calculum eclipsium peculiaribus scriptis in usum tyronum illustrarunt *Elias Molerus* in Opere novo Astronomico, in quo doctrina de supputandis deliquiis juxta Tabulas Prutendicas explicatur (Lugduni 1687. in 4. 1. Alph. 4. plag.); *Johannes Hanke*, e Societate Jesu, in Tenebris summatim illustratis, qui secundum Tabulas *Riccioli* computum instituit (Moguntiæ 1682. in 4. plag. 15.) & inprimis *Zimmermannus* modo laudatus in scripto Germanico, cui titulus: **Auf alle und jede** *Hypotheses applicable fundamental*-**Aufgaben von den Sonn- und Mond-Finsternissen** (Hamburgi. 1691. in 8. 15½. plag.) Eclipseos solaris calculum quoque bene tradidit & Logarithmos in usum Logisticæ sexagenariæ exhibuit, quales alibi non prostant. Commemorari hic quoque merentur dissertationes quædam academicæ. Nimirum calculum eclipsium solarium exemplo eclipseos anni 1715. illustravit *Johannes Bernhardus Wideburgius*, nunc Professor Mathematum Jenensis (Helmstadii 1714. in 4. plag. 12. Tab. 4.) & Eclipseos solaris anni 1723. calculum secundum methodum *Philippi de la Hire* ex ejusdem Tabulis quoad minutissima repræsentat *Georgius Matthias Bose*, nunc Physicæ Professor in Academia Wittebergensi, in Commentatione in Eclipsin Terræ Anno

Anno. 1723. d. 13. Maji (Lipsiæ An. 1723. in 4. maj. Alph. 1. Tab. 1.) Huc etiam pertinent Dissertationes de eclipsi lunari & de eclipsi solari *Christophori* **Langhansen**/ Professoris Mathematum Regiomontani, quarum primam sub præsidio *Blæsingii*, tum Mathematum Professoris, alteram ipse Præses defendit.

§. 44. Equidem Tabularum astronomicarum conditores præcepta quoque calculi iisdem præmittere solent, quod etiam fecit *Philippus de la Hire*: quoniam tamen sæpissime præcepta breviora sunt, quam ut ad omnem calculum astronomicum absolvendum tyronibus præsertim satisfaciant; ideo *Joannes Albertus Klimmius* idiomate Germanico Norimbergæ 1725. in 4. (Alph. 1. plag. 17. Tab. 16.) Tabulas *Philippi de la Hire* cum nova, completa & accurata descriptione omnis calculi astronomici in usum tyronum calculi edidit. Ad eundem finem tendit opus in hoc genere maxime commendandum, Astrosophia numerica, sive astronomica supputandi ratio *Angeli Capelli*, Canonici & Astronomiæ Professoris Parmensis, quæ duabus partibus Venetiis 1733. & 1736. in 4. prodiit (Pars I. plag. 14. Tabb. æn. 8. Pars II. Alph. 1. plag. 16.). Parte priori abunde docentur, quæ ad calculum faciunt; posteriori autem Tabulæ astronomicæ continentur.

§. 45. *Joannes Leonhardus Rostius* A. 1718. Norimbergæ in 4. (Alph. 3. Tab. 14.), edidit librum astronomicum sub Titulo: Astronomisches **Hand-Buch**, h. e. Manuale Astronomicum, in quo doctrinam sphæricam exemplis perspicuis illustrat & modum observandi declarat, ipse nimirum in observando versatissimus. Addidit deinde An. 1727 (Norimbergæ in 4. Alph. 2. plag. 5. Tab. 14.) partem alteram sub Titulo: **Aufrichtiger** Astronomus, h. e. Astronomus ingenuus. In ea plurima tradit, quæ ad doctrinam sphæricam, motus Cometarum & observationes astronomicas spectant. Inprimis autem plurima tradit, quæ ad calculum eclipsium facilitandum conducunt. Ad Astronomiam adeo practicam addiscendam utile opus.

§. 46. Quoniam in anterioribus aliquoties mentionem inje-

injecimus Operum Mathematicorum *Joannis Schoneri*, ut de iis adhuc dicamus res ipsa flagitare videtur. Ea in unum volumen congessit, & correcta & locupletata Noribergæ A. 1561. in fol. excudi curavit Autoris filius *Andreas Schonerus* (Alph. 10.). Continentur in hisce 1. Isagoge Astrologiæ judiciariæ, 2. de Judiciis Nativitatum libri tres, 3. Tabulæ resolutæ astronomicæ, 4. de usu globi cœlestis, 5. de compositione globi cœlestis, 6. de usu globi terrestris, 7. de compositione globi terrestris, 8 Libellus de distantiis locorum per numeros & instrumentum investigandis, 9. de constructione Torqueti, 10. In constructionem atque usum Rectanguli sive radii astronomici Annotationes, 11. In Fabricam & usum magnæ Regulæ *Ptolemæi* Annotationes, 12. Horarii Cylindri Canones, 13. Æquatorium astronomicum, ex quo errantium stellarum motus, luminarium configurationes & defectus colliguntur, oppositis ubique planetarum sphæris & terminorum expositionibus. 14. Planisphærium seu Metheoroscopium, in quo singula, quæ per motum primi mobilis contingunt, inveniuntur, 15. Organum Uranicum, quo facillime absque scrupulosa supputatione veri mediique planetarum motus reperiuntur, 16. Instrumentum impedimentorum Lunæ, per quod dies impediti facillime colliguntur his apprime utile, qui Almanach conscribere gestiunt. Videmus adeo in hisce operibus non contineri alia, nisi quæ ad præsens caput pertinent, quæ siderum nempe scientiam concernunt.

§. 47. Plura nobis recensenda essent scripta astronomica, si omnia promiscue in medium afferre liberet. Sed cum ea, quæ a veteribus & recentioribus usque ad Annum 1660. seculi superioris literis consignata fuere, ex *Riccioli* Almagesto facile suppleri queant, cetera ex Diariis Eruditorum, quæ hodie magno numero eduntur, peti queant; potiora a nobis commemorata esse sufficit. De *Tychonis* tantum Progymnasmatibus Astronomiæ instauratæ, aliquoties laudatis, observamus, quod pars prima equidem inscribatur de nova stella anni 1572. generaliter tamen de restitutione motu-

motuum Solis & Lunæ stellarumque inerrantium tractet (Uraniburgi & Pragæ 1610. in 4. 4. Alph. 13. plag.); altera vero de Cometa 1577. agat (Pragæ 1610. in 4. 2. Alph. 13. plag.). Tomo secundo hujus editionis adjiciuntur *Tychonis* de *Brahe* epistolæ Astronomicæ (Uraniburgi 1610. in 4. 1. Alph. 16. plag.). Sola Progymnasmata sub titulo Operum *Tychonis de Brahe* postea Francofurti ad Mœnum in 4. recusa.

§. 48. Dignum quoque est, cujus singularem mentionem injiciamus, Automatum Planetarium *Hugenii*, motus planetarum motu suo accurate indicans, descriptum sub finem posthumorum (§. 35. cap. 1.). Etsi enim ante ipsum istius modi automata construxerint alii, quorum nonnulla recenset *Schottus* in Technica curiosa: eorum tamen usus hodie nullus amplius est, postquam *Hugenianum* ad Astronomiæ recentioris perfectionem compositum.

§. 49. Præterea nobis adhuc commemoranda sunt scripta quædam recentiora, quæ silentio præteriri nefas. Nimirum An. 1697. Norimbergæ in fol. (Alph. 1. plag. 4. Tabb. 4.) *Joh. Philippus a Wurzelbau* edidit Tractatum de situ Geographico secundum latitudinem & longitudinem civitatis Norimbergensis sub titulo: *Uranies Noricæ Basis* in usum observationum suarum, quas ibidem multa solertia & instrumentis exquisitis instituebat. Sed cum in longitudine ac refractionibus aliquid immutandum esse posthac deprehenderet, ejus supplementum A. 1713. in fol. (plag. $5\frac{1}{2}$) addidit sub titulo: *Stabilimentum Baseos Uranies Noricæ Astronomicæ & Geographicæ pro deducto antehac inclytæ urbis latitudine & corrigendis longitudinum Geographicarum numeris* &c. ubi etiam de obliquitate Eclipticæ & refractione horizontali agit. Tandem A. 1719. accessit opus Motuum solarium, in qua ex solis observationibus in Meridiano Norimbergensi per tria secula habitis iidem definiuntur & eorundem Tabulæ exhibentur, sed intra dimidium seculum variabiles ob eccentricitatis, quam statuit, mutabilitatem. Prodiit Norimbergæ An. 1719. in fol. (plag. $22\frac{1}{2}$. Tab. 1.) sub titulo: *Uranies Noricæ Basis astronomica*, sive *Rationes*

tiones motus annui ex observationibus in Solem hoc nostro & seculo abhinc tertio Norimbergæ sub eodem Meridiano habitis quam plurimis deductæ & ampliter demonstratæ Operi huic solari adjicitur tractatus de situ geographico Norimbergæ & ejus supplementum, de quo ante diximus, ut adeo integrum, quale nunc in bibliopoliis prostat, constet (Alph. 2. plag. 9. Tabb. 5.).

§. 50. An. 1735. Hafniæ in 4. reg. (Alph. 1. plag. 7. Tabb. 11.) *Petrus Horrebowius*, Phil. & Med. D. in Universitate Hafniensi Astronomiæ Professor, edidit Basin Astronomiæ, sive Astronomiæ partem mechanicam, in qua describuntur observatoria atque instrumenta astronomica Rœmeriana Danica, simulque eorundem usus, sive methodi observandi Rœmerianæ in usum publicum & præsertim in gratiam una prodeuntis valde insignis atque usus amplissimi, nunquam non posteris memorandi Tridui observationum Tusculanarum Rœmeri ex fundamentis exponuntur. Dolendum vero, quod duo libri, in quo observationes suas descripserat *Ræmerus* ferali isto incendio An. 1726. quod circa finem Octobris totam fere *Havniam* vastavit, una cum observationibus *Horrebovianis* perierint.

§. 51. Multum desudavit *Ræmerus* in detegenda parallaxi orbis annui, nec sine successu hoc se præstitisse sibi videbatur. Ex ejus adeo observationibus *Horrebowius* eandem demonstandam sibi sumsit, ediditque ea fini Havniæ in 4. (plag. 8. Tab. 1.) suis sumtibus Copernicum triumphantem, sive de parallaxi orbis annui Tractatum epistolarem ad serenissimum Principem Christianum, Daniæ & Norwegiæ hæredem An. 1727., cujus pleraque exemplaria ferale istud, quod modo commemoravimus, incendium consumsit.

§. 52. Enimvero nondum triumphare Copernicum in Commentariis Bononiensis Scientiarum & Artium Instituti (§. 40. c. 1.) ostendit *Eustachius Manfredi*, cum ex observationibus Rœmerianis, quæ colligitur in fixis quoad declinationem & ascensionem rectam, mutatio parallaxi orbis annui minime consentiat. Nimirum hactenus Astro-

ſtronomi in parallaxin orbis annui inquiſituri id tantummodo agebant, ut omni circumſpectione diſpicerent, num aliqua fixarum a loco fixo aberratio annua deprehendatur, parum ſolliciti utrum præciſe talis ſit, qualem exigit motus annuus Telluris circa Solem, an vero eidem contrarietur. Saluberrimo igitur conſilio *Manfredius* Theoriam de annuis inerrantium ſtellarum aberrationibus, in Aſtronomia hactenus deſideratam condidit eamque publici juris fecit Bononiæ Anno 1729. in 4. (plag. 10. Tabb. 6.), ut juxta eam obſervationes examinari queant, ne per errorem parallaxis orbis annui inde colligatur, quæ inde colligi nequit.

§. 53. Celebratiſſimus hodie inter Aſtronomos eſt Gnomon Meridianus Bononienſis ad D. Petronii, cui Aſtronomia multa debet incrementa & cujus hiſtoriam dederunt *Joannes Dominicus Caſſini* atque *Dominicus Gulielminus*. Hujus inſtrumenti deſcriptionem & obſervationes aſtronomicas omnes eodem ab ejus conſtructione usque ad hoc tempus peractas 1736. Bononiæ in 4. reg. (Alph. 2. plag. 2.) edidit idem *Manfredius*. In hoc opere de obliquitatis eclipticæ mutatione & theoria Solis præclara leguntur, & illa inprimis extra omnem controverſiæ aleam ponitur.

§. 54. Anno 1725. *Horrebovius* edidit Havniæ in 4. (plag. 16. Tab. 1.) Clavem Aſtronomiæ, ſive Aſtronomiæ partem phyſicam, in qua potiſſimum in parallaxin Solis inquirit. Pendet autem methodus ab hypotheſi quadam phyſica. Unde ipſi poſthac conſultum viſum, ut miſſis omnibus hypotheſibus elementa Aſtronomiæ quoad refractiones, obliquitatem eclipticæ polique altitudinem nudis obſervationibus *Ræmeri* ſuperſtrueret. Eo conſilio in publicam lucem emiſit An. 1732. Havniæ in 4. (plag. 16. Tab. 1.) Atrium Aſtronomiæ, ſive de inveniendis refractionibus, obliquitate eclipticæ atque elevatione poli Tractatum. Subjunxit ſchediasma de arte interpolandi, quod jam antea ſeorſim publicatum ad ſcripta analytica referendum. Ceterum in Atrio hoc aperiendo ampliſſimum uſum oſtendit Tridui illius *Ræmeriani*, quod in Baſi Aſtronomiæ extat (§. 50.), & ſe in poſte-

ſterum uberiorem adhuc oſtenſurum pollicetur. Unde non mireris *Rœmerum* morti vicinum ejus editionem una cum deſcriptione inſtrumentorum ſuorum ſerio commendaſſe & eo fine ejus exemplar nitide deſcriptum S. R. Selandiæ Epiſcopo C. W. *Wormio* tradidiſſe.

§ 55. Ad ſcripta Aſtronomica referendæ etiam ſunt Ephemerides, in quibus loca planetarum eorumque adſpectus ad ſingulos anni dies computati una cum Eclipſium deſcriptionibus exhibentur. Juxta Tabulas Prutenicas Ephemerides ab A. 1577. ad annum 1590. conſtruxerat *Joannes Stadius.* Juxta easdem ab An. 1581. usque ad annum 1620. computatas Venetiis excudi curavit *Joannes Antonius Maginus*, Mathematum Profeſſor Bononienſis, edito opere Primi Mobilis, duodecim libris contenti, in quibus habentur Trigonometria ſphæricorum & aſtronomica, gnomonica, geographicaque problemata, magnus trigonometricus canon emendatus & auctus ac magna primi mobilis Tabula ad decades primorum ſcrupulorum ſupputata (Bononiæ 1609. in fol. Alph. 10. plag. 21.), celebris: ſed cum eas examinaret *Davides Origanus*, Mathematum Profeſſor Franc. ad Viadrum eas non ſatis accuratas deprehendit. Quamobrem ipſe 1599. Franc. ad Viadrum in 4. (4. Alph. 12. pl.) Novas edidit Ephemerides ab An. 1595. usque ad An. 1630. deinceps continuatas usque ad finem ſeculi. Præmiſſa eſt Introductio ſeu compendiaria Ephemeridum enarratio, qua non ſolum, quæ ad motum primi & ſecundorum mobilium uſumque pleniorem Ephemeridum faciunt, ſed & plurima alia chronologica & aſtrologica præcepta ea facilitate explicantur, ut inde quisque calendaria anniverſaria & nativitatum texere poſſit judicia. Hæ ephemerides ſeculo decimo ſexto celebratiſſimæ fuerunt, iisdemque uſi ſunt calendariographi. Etſi enim *Keplerus* ab An. 1617. usque ad An. 1636. ex Tabulis ſuis Rudolphinis ſupputatas Lincii in 4. (3. Alph. 17. plag.) edidiſſet, inchoatas Lincii 1616. & abſolutas Sagani Sileſiæ typis Autoris An. 1630. quibus præmittitur explicatio fundamentorum Ephemeridis & inſtructio ſuper

nova ejus forma; facile tamen apparet, cur usum Ephemeridum *Origani* impedire minime potuerint.

§. 56. Cum *Origani* Ephemerides cum seculo præcedente exspirassent, initio hujus complures de novis computandis consilia agitarunt: quo successu, nostrum jam non est enarrare. Initio hujus seculi Ephemerides dederat *Mezzavaccha*, quibus deficientibus manum eidem operi admovit Marchio *Antonius Ghislerius*, cujus Ephemerides motuum cœlestium ab A. 1721. ad An. 1740. ex Tabulis *de la Hire*, *Streetii* & *Flamstædii* ad Meridianum Bononiæ supputatæ prodierunt Bononiæ A. 1720. in 4. (Alph. 3. plag. 9½.). Anno autem 1725. ibidem lucem adspexere Novissimæ Ephemerides motuum cœlestium e Cassinianis Tabulis ad meridianum Bononiæ supputatæ, autoribus *Eustachio Manfredio* Bononiensis Scientiarum Instituti Astronomo & sociis ad usum Instituti. Tomus primus continens Ephemerides ex An. 1726. in A. 1737. constat Alph. 2. plag. 4. Tabb. 8. Tomus II. complectens Ephemerides ex A. 1738. in An. 1750. Alph. 2. plag. 6. Tabb. 7. Id singulare habet *Manfredius*, quod dederit typos eclipsium solarium, quales per totam Telluris faciem, ubi conspicuæ sunt, apparent juxta principia projectionis.

§. 57. Singulis annis Parisiis in usum anni sequentis jussu Academiæ Regiæ scientiarum ad Meridianum Parisiensem editur Ephemeris sub titulo: *Connoissance des Tempe pour l' Année* v. gr. 1739. Ephemeridi subjiciuntur Tabulæ quædam astronomicæ cum earundem explicatione & usu, una cum Catalogo singulorum membrorum Academiæ Regiæ scientiarum, qualis est mense Novembri ejus, quo editur, anni. Extant in iisdem eclipses Satellitum Jovis, cum in casum observationum astronomicarum potissimum edantur istæ ephemerides, quæ præterea usum Calendarii præstant.

§. 58. Olim usque ultra dimidium seculi superioris ad Astronomiam quoque relata fuit *Astrologia judiciaria*, ars divinandi ex astris: omnes enim & naturæ, & hominum actiones horumque fata iisdem subjecerunt

runt veteres. Magna ea fuit autoritatis, exculta & defensa a gravibus Autoribus, ita ut ipse *Ptolemæus* de eadem commentatus fuerit eamque Astronomiæ sociam fecerit (§. 10. c. 9.). Nostro autem ævo vanitate ejus agnita indigna censetur, quæ inter scientias mathematicas referatur: quæ etiam ratio est, cur nullum eidem in Elementis nostris Matheseos universæ fecerimus locum. Quodsi tamen cui volupe fuerit, Astrologiæ præcepta cognoscere, ei satisfaciet *Schonerus* in Opusculo astrologico, quod ex diversorum libris summa cura pro studiosorum utilitate collegit & Norimbergæ A. 1539. in 4. (plag. 14.) edidit. Legitur idem in Operibus, in quibus primum tenet locum (§. 46.). In his autem prolixa quoque occurrit tractatio de judiciis nativitatum, ut in hac Astrologiæ parte nihil amplius desiderari possit. Compendiosor est Tractatus astrologicus de genethliacorum thematum judiciis pro singulis nati accidentibus ex vetustis & optimis quibusque auctoribus collectus industria *Henrici Ranzovii*, Producis Cimbrici, qui Francofurti ad Mœnum A. 1633. in 8. (Alph. 1. plag. 2.) prodiit & quo in juventute usus, cum artem illam pernoscere gestirem.

§. 59. Superiori adhuc seculo Astrologiæ maxime deditus fuit *Joannes Baptista Morinus*, Medicinæ Doctor, & Parisiis Regius Mathematum Professor, cujus Astrologia Gallica principiis & rationibus propriis stabilita atque in 26 libros distributa prodiit Hagæ-Comitis 1661. in fol. cum prolixa præfatione apologetica (Alph. 6. plag. 12), qui vulgo dicitur Astrologiam demonstrasse. Sed quantum distent a veris demonstrationibus ejus probationes, haud difficulter judicabit, qui genuinæ demonstrationis formam animo concepit.

CAPUT

CAPUT. X.

DE SCRIPTIS CHRONOLOGICIS, GEOGRAPHICIS ET GNOMONICIS.

§. 1.

DOctrinam temporum primus in Scientiæ formam redegit *Josephus Scaliger*, cujus de emendatione temporum libri primum A. 1587. lucem adspexerunt, deinde quindecim annis elapsis prorsus immutati denuo prodierunt. Multa eruditione conscriptum est hoc opus; sed ad captum Tyronum minime compositum.

§. 2. Præclarum quoque in Chronologia opus est *Dionysii Petavii* doctrina Temporum, Parisiis 1627. in fol. primum edita; sed An. 1703. tribus Tomis in fol. reg. (21. Alph. 7. plag.) Antverpiæ recusa. Accessit editioni novæ integer tomus tertius, in quo continentur Uranologium sive systema variorum auctorum, qui de Sphæra ac sideribus eorumque motu Græce commentati sunt, A. 1630. seorsim editum; Libri 8. variarum Dissertationum Chronologiam illustrantium & libri tres epistolarum. Nimirum in Uranologio continentur *Gemini* Elementa Astronomiæ; *Ptolemæi* de Apparentiis inerrantium & significationibus, cui Tractatui subjungitur Calendarium vetus Romanum cum ortu occasuque stellarum ex *Ovidio*, *Columella*, *Plinio*; *Achillis Tatii* Isagoge ad *Arati* Phænomena; Ejusdem fragmenta a *Victorio* edita, quæ cum anterioribus eadem fere continent; *Hipparchi Bithyni* ad *Arati* & *Eudoxi* Phænomena Enarrationum libri tres; *Arati* Genus & Vita; *Theodori Gazæ* liber de mensibus; S. *Maximi* Martyris Computus ecclesiasticus; *Isaaci* Monachi Computus; S. *Andreæ* Hierosolymitani methodus investigandi cycli solaris & lunaris, nec non Paschatis. Ceterum paulo durius tractat *Scaligerum*, cui opus suum opposuit.

§. 3.

§. 3. Dogmata *Scaligeri* ad faciliorem intelligentiam propoſuit *Sethus Calviſius*, Cantor Lipſienſis, vir longe ultra ſortem ſui ſimilium eruditus, cujus Introductio ad Chronologiam ſæpius cum in 4. tum in folio recuſa.

§. 4. Triumviris iſtis jungi meretur *Johannes Baptiſta Ricciolus* in Chronologia Reformata, quæ Bononiæ 1669. in fol. prodiit (Alph. 11. plag. 18.).

§. 5. Tyronibus inſerviunt *Dionyſii Petavii* Rationarium temporum (Moguntiæ 1646. in 8. 2. Alph. 22. plag.), *Guilielmi Beveregii* Inſtitutiones Chronologicæ, quæ cum Arithmetica Chronologica recuſa Londini An. 1705. in 4. (1. Alph. 11. plag.) & *Ægidii Strauchii* Breviarium Chronologicum (Wittebergæ A. 1664. in 12. 2. Alph. 10. plag.)

§. 6. Ad Chronologiam Hiſtoricam ſpectat opus *Iſaaci Newtoni*, quod Londini 1728. in 4. ſub Titulo: *The Chronology of ancient Kingdoms amended* (Alph. 2. plag. 4. Tabb. 111.) prodiit, in quo agitur de Chronologia Græcorum, Ægyptiorum, Aſſyriorum, Babyloniorum & Medorum atque Perſarum. Traditur etiam in eodem deſcriptio templi *Solomonis*. Cum nobis jam ſit negotium cum Chronologia mathematica; facile patet, Chronologiam *Newtoni* non eſſe hujus loci. Ne tamen quis miretur, cur ejus nullam injecerimus mentionem, cum *Newtonus* inter Mathematicos ſummus emineat; eum ſilentio præterire noluimus. Singulares vero prorſus ſibique proprias de Chronologia antiquorum imperiorum fovet opiniones *Newtonus*, ita ut enormis detur inter ipſum & ceteros Chronologos diſſenſus. Quamobrem eodem adhuc anno *Arthurus Bedford* idiomate patrio Animadverſiones in Chronologiam *Newtoni* edebat Londini in 8. (plag. 15.) Oſtendit autem, *Newtonum* e diametro eſſe adverſum ſcriptoribus ſacris: quæ adeo ratio eſſe videtur, cur ad eum confutandum adeo properaverit.

§. 7. Ad Calendariographiam ſpectant, quæ Tomo quinto operum *Clavii* habentur (§. 24. c. 1.); *Sethi Calviſii* Elenchus Calendarii Gregoriani (Franc. ad Mœn. 1612. in 4. plag. 27.); *Franciſci Vietæ* Relatio

latio Calendarii vere Gregoriani & Calendarium Gregorianum perpetuum (§. 25. cap. 1.); *Blondelli* Historia Calendarii Romani Gallice conscripta (Paris. 1682. in 4.); *Erhardi Weigelii* **bürgerlicher Zeit-Spiegel** / seu speculum temporis civile (Jenæ A. 1664. in 4. plag. 15.); *Guilielmi Bonjour* Calendarium Romanum (Romæ An. 1701. in fol. 21. plag.) *Francisci Blanchini* Solutio Problematis paschalis (Romæ 1703. in 4. plag 13. Tabb. 5.); *Dominici Quartaironii* Responsiones ad assertiones *Dominici Cassini* pro reformatione Calendarii Gregoriani (Romæ 1703. in 4. pl. 4.); *Eustachii Manfredii* epistola ad *Quartaironium*, qua *Cassini* assertiones 16. vindicantur (Venetiis 1705. in 4. reg. plag. 8.); *Thomæ Pii Maphæi* Opus de Cyclorum Soli-Lunarium inconstantia & emendatione (Venetiis 1706. in 4. 1½. Alph.).

§. 8. Calendarium Judaicum ex Hebræorum penetralibus cum versione Latina edidit *Sebastianus Münsterus* Basileæ A. 1527. in 4. (1. Alph. 5. plag.): in quo computus Judæis usitatus exponitur. *Rabbi Ori* Calendarium Palæstinorum & universorum Judæorum ex Hebræo sermone in Latinum vertit & Francof. ad Mœnum publicavit *Jacobus Christmannus*, in Academia Heidelbergensi Professor A. 1594. in 4. (plag. 20.).

§. 9. Inter veteres Geographos eminet *Ptolemæus*, cujus Geographiæ libri octo, in quibus non modo traduntur ad Geographiam mathematicam spectantia, sed inprimis etiam quæ ad historicam faciunt, Basileæ prodiere plus simplici vice, e. gr. An. 1542. in fol. (Alph. 2. plag. 16. Tab. 48.) Inter compendia vero maxime celebre fuit *Joannis de Sacro Bosco* libellus de sphæra, sæpius recusus: in quem post alios commentatus est *Clavius* (§. 24. cap. 1.).

§. 10. Præstantissimum in hoc scientiarum genere & fere unicum est *Johannis Baptistæ Riccioli* Geographia & Hydrographia Reformata (Venetiis 1662. in fol. 7. Alph. 17. plag.), ex quo *Erhardus Weigelius* scitu præ cæteris necessaria in tyronum gratiam in compendium misit in speculo Terræ, (Erd-Spiegel), quod vocat, patrio idioma-

diomate conſcripto, (Jenæ An. 1665. in 4. 1. Alph. 3. plag.).

§. 11. Multa habet *Ricciolus*, quæ ad Geographiam proprie non ſpectant, ſed ab eo in eadem pertractantur, ne ea aliunde ſupponere habeat opus. Unde tyronum conatibus magis reſpondet Geographia, quæ in curſu Mathematico *Millieti Dechales* extat (§. 4. c. 1.).

§. 12. Cæterum applauſum eruditorum dudum quoque meruit *Bernhardi Varenii* Geographia generalis, ſæpius recuſa. Elegans eſt editio Cantabrigienſis anni 1672. in 8. (1. Alph. 9. plag. Tabb. 5.), juxta quam recuſa eſt Jenæ 1693. in 8. ſed præſtantiſſima omnium prodiit Cantabrigiæ A. 1712. in 8. reg. (1. Alph. 15. plag. 9. Tabb. 9.) cum Appendice *Jacobi Jurin*, in qua nova habentur inventa, poſt obitum ſcilicet *Varenii* demum detecta. *Varenio* autem non ſolum mathematica, verum etiam phyſica curæ cordique ſunt.

§. 13. Laudantur quoque Elementa Geographiæ generalis Cl. *J. G. Liebknecht* Prof. Gieſſ. (Franc. 1712. in 8. 1. Alph. 10. plag. fig plag. 3½.), *Leonhardus Chriſtophorus Sturmius* vero in Compendio Geographico, quod idiomate vernaculo in gratiam tyronum Francof. A. 1705. in 8. edidit (plag. 10. Tab. 5.) praxin inprimis conficiendi mappas Geographicas bene tradit, quamvis demonſtrationes omiſerit, utpote quæ non ſunt ad palatum tyronum.

§. 14. De Hydrographia ſeu arte navigandi commendatur Tractatus in Curſu Mathematico *Millieti Dechales* (§. 4. c. 1.) Data opera omnium prolixiſſime ſcripſit de eadem *Georgius Fournier* e Societate Jeſu in Hydrographia Gallice edita Pariſ. 1653. in fol. (10. Alph. 10. plag.). Habebatur pro opere præſtantiſſimo in hoc genere: verum poſtea in Anglia prodiere libri complures de arte navigandi, qui præ illo commendari merentur.

§. 15. *Jacobus Hodgſon*, Lector Matheſeos in ſchola mathematica regia orphanotrophii ad S. Salvatorem conſcripſit Theoriam navigationis demonſtratam, in uſum Navigationis docendæ. Eam deinde multo auctiorem ſub titulo: *A ſyſtem of the Mathematicks*, hoc eſt, ſyſtema Ma-

theseos, Londini A. 1723. in 4. duobus Voluminibus (Alph. 7. plag. 19½. Tabb. æn. 14. cum figuris multis ligno incisis & textui insertis) multo auctiorem recudi curavit. In hoc systemate ex Mathesi non traduntur, nisi quæ ad Navigationem rigide demonstrandam faciunt & in ea usum habent. Præmittuntur ex *Euclidis* Elementis sex prioribus, quæ ad hunc scopum conducunt una cum Trigonometria plana ex inventis recentiorum plurimum illustrata. Reperies hic porro Trigonometriam sphæricam & doctrinam de projectione sphæræ tam orthographica, quam stereographica prolixe explicatam, quarum hæc ad solvenda problemata trigonometrica & astronomica applicatur. Ex Astronomia docentur, quæcunque usui esse possunt in navigatione, veluti modus computandi appulsum Lunæ ad stellas fixas, & harum per illam occultationes, quarum in determinandis longitudinibus locorum usus est. Inseruntur novæ Tabulæ solares, quarum docetur constructio & usus. Adduntur Tabulæ aliæ, quibus opus est in navigatione. Ipsa autem praxis Navigationis omnis perspicue docetur, exemplis illustratur & Theoriæ demonstratæ superstruitur. Id nimirum egit autor, ut ex suo opere Navigationis Theoriam & praxin solide addiscere liceat & quæ ex reliqua Mathesi præsupponuntur aliunde hauriri non demum opus sit.

☞ §. 16. Anno 1715. *Henricus Wilson*, problemata nautica variis modis soluta dedit in Tractatu, quem sub titulo: *Navigation new modell'd*, hoc est, Navigatio in novam formam redacta, Londini in 8. maj. (Alph. 1. plag. 12.) publici juris fecit. Docet problemata ista solvere 1. per constructiones geometricas triangulorum, in locum solutionum Trigonometricarum surrogandas, 2. per calculum trigonometricum, & ope peculiarium Tabularum, ut calculo nullo sit opus 3. per calculum, qui canone sinuum, tangentium, secantium & Logarithmorum non habet opus, sed tantummodo paucis quibusdam numeris in Tabulam redactis; 4. ope circini & scalæ geometricæ; tandemque 5. per novam methodum a se inventam, qua prob-

problemata Trigonometriæ planæ ſine Tabulis ac inſtrumentis ſolvuntur. Navigationem primam geometricam, ſecundam trigonometricam, tertiam arithmeticam, quartam inſtrumentalem, quintam vero practicam appellat. Nullum adeo dubium eſt, quin hunc librum multo cum fructu legant, qui artem navigandi addiſcere cupiunt, modo ex ceteris partibus Matheſeos hauſta theoria fuerint inſtructi, quæ hic præſupponitur.

§. 17. Quoniam libri, qui magno numero de navigatione conſcripti ſunt, vel ſolam praxin tradunt, vel nimis diffuſi ſunt, nec levi pretio comparandi; ideo *Archibaldus Patoun* praxin navigationis ex primis principiis demonſtratam ſub titulo: *A Compleat Treatiſe of practical navigation demonſtrated from its firſt Principles*, una cum tabulis omnibus neceſſariis Londini A. 1730. in 8. maj. (Alph. 1. plag. 10. Tab. 1.) edidit. Præmittit adeo ea, quæ ex Geometria, Trigonometria plana, Geographia, aſtronomia & Chronologia perſpecta eſſe debent ei, qui artem navigandi penitus perſpicere voluerit.

§. 18. Eodem anno idiomate itidem Anglico Londini 1730. in 8. maj. (Alph. 1. plag. 9.) a *Georgio Gordonio* publicata ſunt ex MSC. originali opera poſthuma *Johannis Wardi*. In horum parte prima præmiſſis principiis Geometriæ & Trigonometriæ planæ Navigatio explicatur, ubi nova quædam methodus ſimul proponitur ab autore inventa; in parte autem ſecunda Trigonometria ſphærica traditur, ubi ſimul ſphæræ projectio tam orthographica, quam ſtereographica explicatur. Ad demonſtrationes illius facilius percipiendas ſchemata ita conſtruxit, ut caſus ſinguli in ſolido repræſentari poſſint: quo artificio etiam uſus eſt *Joannes Keill* in Trigonometria, quam *Euclidis* Elementis ex verſione *Commandini* a ſe editis ſubjunxit.

§. 19. Apud Batavos de arte navigandi Tractatum conſcripſit *Willebrordus Snellius*, qui ſub titulo: Tiphys Batavus, ſive Hiſtiodromice de navium curſibus & re navali, Lugduni Batavorum An. 1724. in 4. (Alph. 1. plag. 7.). De Loxodromia accu-

accuratas affert demonſtrationes quæ hactenus deſiderabantur. Theoriam tradit libro primo; praxin ſecundo.

§. 20. Inter problemata vexata refertur problema de invenienda longitudine maris, quod hactenus multum exercuit ingenia Mathematicorum, irritio ſucceſſu ſolutionem ejus aggreſſorum. Nimis prolixum foret recenſere tentamina, quæ publice deſcripta proſtant. Non tamen poſſumus, quin mentionem injiciamus autoris cujusdam perſonati *Dorothei Alimari*, Mathematici (ſi credimus) Veneti, cujus Methodus longitudinis aut terra, aut mari inveſtigandæ, adjectis demonſtrationibus & inſtrumentorum Iconiſmis Londini An. 1715. in 8. (plag. 13. Tabb. 4.) prodiit. Etſi enim ea non ſatisfaciat; continentur tamen in hoc Tractatu, quæ legi merentur.

§. 21. Pars nauticæ difficillima eſt manuaria nautica, quia reconditam Geometriæ ſublimioris notitiam ſuppoſit. Agit autem manuaria nautica de diſpoſitione velorum, gubernaculi & navis. Equidem Vir & generis nobilitate, & experientia maritima præſtans *Renau* A. 1689. libellum de ea ediderat; ſed mox *Hugenius* principium ejus unum, dein ex intervallo celeberrimus *Bernoullius* alterum impugnavit & theoriam aliam ſubſtituit in Tentamine novæ theoriæ nauticæ, quæ idiomate Gallico ſub titulo: *Eſſay d'une nouvelle Theorie de la Manoeuvre des Vaiſſeaux* una cum epiſtolis nonnullis de eadem materia perſcriptis Baſileæ An. 1714. in 8. reg. (plag. 15. Tabb. 10.) prodiit. Theoriam hujus artis ad praxin aptare ſtuduit *Pitotus* in libro Gallice conſcripto, qui ſub titulo: *Theorie de la Manœvre de Vaiſſeaux reduite en Pratique* Pariſiis in 4.

§. 22. Ad Geographiæ potiſſimum perfectionem tendunt obſervationes Mathematicæ & Phyſicæ in India & China factæ a R.P. *Franciſco Noël*, e Societate Jeſu ab A. 1684. usque ad An. 1708. (Pragæ 1710. in 4. plag. 17. Tabb. 2) & obſervationes argumenti ſimilis a R.P. *Franciſco Feuillée* juſſu Regis Chriſtianiſſimi in regionibus potiſſimum auſtralibus factæ de quibus ſupra (§. 9. c. 9.). Summæ harum obſervationum legun-

guntur in Actis Eruditorum Lipsiensibus.

§. 23. Commemorandi hic denique sunt Autores, qui in magnitudinem & figuram Telluris inquisiverunt. Laudandus hic nobis *Willebrordus Snellius*, cujus Eratosthenes Batavus de Terræ ambitus vera quantitate Lugduni Batavorum An. 1617. in 4. (Alph. 1. plag. 11½.) prodiit. Sed errores quosdam in metiendis angulis, tum & in calculo admisit, quos ipse agnovit: Unde observationes repetiit & in MSC. correctas reliquit. Emendationes videre licet in Differtatione de magnitudine Terræ *Petri van Musschenbroek*, Mathematum Professor in Academia Ultrajectina, quæ legitur in opere dissertationum physicarum experimentalium & geometricarum de magnete, tuborum capillarium vitreorumque speculorum attractione, magnitudine Terræ, cohærentia corporum firmorum Lugduni Batavorum An. 1729. in 4. reg. edito p. 354 & seqq.

§. 24. In Gallia feliciori successu laborem hunc exantlatus est *Picardus*, postea continuatus a *Cassino*. Mensurationem *Picardi* videre licet in Tractatu, quem ex sermone Gallico in Anglicum transtulit *Richardus Waller* & Londini sub titulo: *The Measure of the Earth* 1688. (plag. 6. Tab. 4.), edidit tum in Commentariis Academiæ Regiæ scientiarum Parisinæ ab A. 1666. usque ad A. 1699. Tom. 7. *Cassinianam* vero in Commentariis A. 1618.

§. 25. Quoniam per mensurationes *Cassinianas* alia prodibat figura Telluris, quam per demonstrationes *Newtoni* atque *Hugenii*; ideo jussu Regis Christianissimi *De Maupertuis* cum Sociis summo cum studio & plusquam Herculeo labore gradum Meridiani prope circulum polarem dimensus est aliasque observationes huic instituto inservientes instituit. Legatur Tractatus, quem Parisiis An. 1738. in 8. edidit (plag. 13. Tabb. 10.). Observationibus hisce exactissimis figura Telluris confirmatur *Newtoniana* & *Hugeniana*. Constat jussu Regis Christianissimi eodem fine missos esse Mathematicos in regnum Peruvianum, qui ubi redierint, cum publico dubio procul communica-

nicabunt absque mora suas quoque observationes.

§. 26. Theoriam atque praxin Gnomonicam more veterum rigidissime, sed adeo intricate demonstravit *Christophorus Clavius* (§. 24. c. 1.) ut vix credibile sit, ullum unquam ejus demonstrationes omnes perlegisse. Faciliores vero exhibent *Dechales* atque *Ozanam* in cursibus (§. 4. 7. c. 1.).

§. 27. Demonstrationes quoque affert *Guarinus Guarini* in parte posteriore Mathematicæ cœlestis (Mediol. 1683. in fol. 1. Alph. 3. plag.). Pars prior, quæ una cum posteriore prodiit (7. Alph. 5. plag.) integram Astronomiam complectitur.

§. 28. Novam methodum horologia solaria magna conficiendi, lineis horariis per calculum determinatis, invenit *Picardus*, quæ in Operibus Mathematicis Academicorum Gallicorum (§. 31. c. 1.) legitur. Et Cel. *Philippus de la Hire* in sua Gnomonica, quam patrio sermone Parisiis 1683. in 12. reg. publici juris fecit, methodum Geometricam exposuit, ex quibusdam punctis per observationem determinatis lineas horarias ducendi.

§. 29. Anno 1625. *Eberhardus Welperus*, Artium Magister, Argentorati propriis sumtibus typis describi curavit suum de Gnomonica tractatum vernaculum in 4. (plag. 8.), in quo ex facili fundamento horologia in planis primariis describere docet. Idem fundamentum jam antea perspicue exposuit eodemque in describendis horologiis usus est *Sebastianus Münsterus* in Rudimentis Mathematicis, quorum liber prior prima elementa Geometriæ, posterior omnigenum horologiorum genus delineare docet. (Basileæ An. 1551. in fol. 2. Alph. 20. plag.).

§. 30. *Welperi* Gnomonicam A. 1672. Norimb. in 4. (plag. 21. Fig. plag. 14½.) recudi curavit & integra parte secunda de horologiis inclinatis & declinatis ac figuris Zodiacalibus arcubusque diurnis & horis varii generis inscribendis auxit, notisque partem primam illustravit *Joh. Christophorus Sturmius*, Math. Prof. Altorfinus. Addidit A. 1681. (Norimbergæ in 4. plag. 19. Fig. plag. 9.) partem ter-

tertiam de horologiis reflexis & portatilibus. Eadem Gnomonica cum insigni augmento *Sturmiano* denuo recusa Norimbergæ An. 1708. in fol. (2. Alph. 16. plag. Tab. 35.). Accessit vero pars quarta, in qua methodi, *Picardiana & Lahiriana*, magna horologia describendi exponuntur (§. 28.). In hoc adeo opere plura continentur, quam ullibi in unum volumen congesta reperire licet, ita ut instar omnium esse possit, nisi quis demonstrationes exasciatas praxium desideret, theoriæ magis, quam praxi intentus. Appendicis quoque loco adjicitur Tractatus de horologiis automatis ex Anglico in Germanicum sermonem translatus, quemadmodum jam supra monuimus (§. 26. c. 6.).

§. 31. Commendandum hic quoque est opus de horologiis majoribus delineandis, methodo universali, quod debetur J. G. *Doppelmayero*, Matheseos Professori Norimbergensi, & sub titulo: **Neue und gründliche Anweisung, wie nach einer Universal-Methode grosse Sonnen-Uhren aus einem arithmetischen und geometrischen Fundament zu zeichnen**, Norimbergæ An. 1719 in fol. (Alph. 2. plag. 10. Tabb. 20.) prodiit. Quodsi idem cum novissima & auctiori Gnomonica *Welperiana* conjungas, vix est ut quicquam in praxi Gnomonica, sive utilitatem, sive curiositatem spectes, amplius desideres. Ceterum *Alexander* in eximio de horologiis Tractatu egregiam quoq; tradit methodum horologia majora solaria accurate in quovis pariete delineandi (§. 26. c. 6.).

§. 32. Solas praxes tradunt *Johannes Peterson* **Stengel** in Gnomonica universali, idiomate vernaculo (Ulmæ A. 1706. in 8. plag. 18. Tabb. 109.) edita, rerum varietate commendanda; *Georgius Michaelis* in Praxi Gnomonica Germanice A. 1701. Jenæ in 8. edita (12. plag. fig. æn. plag. 1½.), qui tamen tantum communiora exponit; *Joh. Ulricus* **Müller** in Indice horarum infallibili Germanice itidem Ulmæ 1702. in 8. edito (1. Alph. plag. 9. Fig. æn. plag. 9.) & *Henricus Cœtsius* in Horologiographia plana (Lugd. Bat. 1689. in 4. plag. 12. Tabb. 20.). qui tamen inscriptiones signorum & arcuum diurnorum negligit, nec ad

ad horologia portatilia descendit.

§. 33. Anno 1711. Augustæ Vindelicorum in 4. (2½. Alph. Tab. æn. 21¼. plag.) prodiit *Johannis Gauppenii* Gnomonica Mechanica universalis, sermone vernaculo in eorum gratiam conscripta, qui in theoria Mathematica parum versati. Inseruit operi suo Tractatum brevem, quem *Henricus Bierum*, Architectus militaris, A. 1676. (plag. 4.) ediderat, & ejus fundamento mechanice describendi horologia utitur. Rerum varietate commendatur iis, qui variis horologiorum solarium generibus conficiendis delectantur.

§. 34. Eodem fundamento nititur *Johannes Jacobus Scheublerus* in libro Germanico, qui sub titulo: **Neue und deutliche Anleitung zur practischen Sonnen-Uhr-Kunst** Norimbergæ 1726. in 8. reg. (plag. 14. Tab. 44.) prodiit, & ubi inter alia ornamenta, quibus horologia solaria parietibus inscripta circumscribi possunt, delineat. Alias jam initio seculi præteriti *Casparus* **Uttenhöfer**, civis Norimbergensis, Pedem Mechanicum invenit, cujus ope horologia solaria mechanice delineari possunt. Descriptionis editio altera auctior prodiit Norimbergæ A. 1620. in 4. (plag. 7).

§. 35. Horologiorum solarium omnis generis, præsertim portatilium descriptionem etiam tradit *Nicolaus Bion* in opere Gallico de constructione & præcipuis usibus instrumentorum Mathematicorum (Parisiis 1709. in 8. reg. 1. Alph. Tabb. 28), quod unicum fere in hoc genere a J. G. *Doppelmayero* Prof. Math. Noribergensi ex Gallico in Germanicum sermonem verti meruit (Noribergæ 1712. in 4. Alph. 2. plag. 5. Tabb. 28.).

§. 36. Commendari quoque merentur Machinæ duæ, quæ pro describendis horologiis solaribus publicavit aliquoties jam citatus *Ignatius Gaston. Pardies* (Hagæ Comitum 1691. in 12. 2. plag.). In hac editione tertia subjunguntur Elementis Staticæ.

§.37. Methodum trigonometricam describendi horologia solaria excoluit *Bernardus Gruber*, S. Ordinis Cisterciensis in Monasterio B. V. *Mariæ* de Alto Vado Professus, in Collegio Ar-

chi-

chiepiscopali Pragæ A. L. L. & Philosophiæ Professor, in Horographia Trigonometrica, seu Methodo accuratissima arithmetice per sinus & tangentes horologia quævis solaria in plano stabili qualitercunque situato, etiam declinante & simul inclinato, facile negotio describendi, & quædam alia, quæ vialia dicuntur, expositis eorundem fundamentis & rationibus, Vetero-Pragæ A. 1718. in 4. (Alph. 1. plag. 14. Tabb. 11.) edidit. Idem institutum fuit *Benedicti Mariæ Castronii*, Ordinis Prædicatorum ac Panormi Matheseos Professoris, qui Horographiam universalem, seu Sciatericorum omnium planorum, gnomonice nova methodo describendorum, pro quovis horologio sive astronomico, sive Italico, sive Babylonico, sive Judaico doctrinam uniformem atque universalem sola triangulorum analysi breviter expositam cum isagogicis nonnullis Mathematum & triplici Appendice de nautica scientia, de militari Architectura ac de temporum Janua Panormi A. 1728. in fol. (Alph. 4. plag. 10. Tabb. 19.) edidit. Temporum Januam vocat Calendarium quoddam perpetuum, Januæ formam præ se ferens, quod a se inventum. Tenendum hic est methodum trigonometricam, quæ & arithmetica dici solet, in Gnomonica præferendam esse geometricæ, cum hæc facilius errori obnoxia fiat, qui per illam evitari potest.

§. 38. Quoniam non cujusvis est per calculum Trigonometricum eruere numeros, quibus in describendis horologiis solaribus opus est; ideo *Joannes Ludovicus Quadri*, Academiæ Instituti scientiarum Bononiensis Adscriptus idiomate Italico Bononiæ 1733. in 4. (Alph. 1. plag. 5. Tabb. 6.) edidit Tabulas Gnomonicas delineationi Horologiorum sciatericorum inserviente, quæ consentiunt cum horologiis Italicis, sonitu campanæ pulsæ horas indicantibus: ut adeo Italorum tantummodo usui destinentur. Dederat jam ante istiusmodi Tabulas in Italia *P. Angelus Maria Colombonus* & apud Nostros *Jo. Gauppius* in Gnomonica mechanica (§. 33.) & *Bernardus Gruber* in Horographia Trigonometrica modo laudata (§. 37.). Edidit

dit quoque Tabulas Gnomonicas, sed pro horarum quovis genere sub titulo Deciliarum mathematicarum sermone patrio una cum brevi descriptione praxeos universæ Geometriæ & Trigonometriæ tam sphæricæ, quam planæ, quæstionibusque & problematibus astronomicis chronologicisque ad Calendarium ecclesiasticum pertinentibus, ope tabularum logarithmicarum facili modo solvendis, Romæ 1730. in 4. reg. (Alph. 4. plag. 2. Tabb. 14.).

§. 39. Hic denique commemorare lubet *Adriani Metii*, M. D. & Matheseos Professoris in Academia Frisiorum, Primum mobile astronomice, sciographice, Geometrice & hydrographice nova methodo explicatum. Prodiit editio nova ab innumeris mendis vendicata & instrumentis mathematicis aucta a *Guilielmo Blaeu* Amstelodami An. 1633. in 4. (Tomus I. Alph. 2. Tomus II. Alph. 1. plag. 12. Tom. III. Alph. 1. plag. 10. Tom. IV. plag. 20.) Primo exponitur doctrina sphærica, Gnomonica & Geographia; secundo continetur accurata descriptio Astrolabii utriusque & ejus usus, una cum Trigonometria sphærica; tertio solvuntur problemata primi mobilis per astrolabium, Trigonometriam sphæricam & Tabulas astronomicas; quarto denique problemata primi mobilis geometrice delineantur & arithmetice solvuntur, atque Tabulæ geographicæ & hydrographicæ describuntur & per easdem tumque per Canones ex secantibus conflatos ars navigandi absolvitur.

CAPUT. XI.

DE

ARCHITECTURA CIVILI.

§. I.

Integram Architecturam civilem tradidit *Virtuvius*, qui sub *Augusto* floruit, cui decem de Architectura libros dedicavit. Optima editio Latina prodiit Amstelodami 1649. in fol. (6. Alph.). Accessere huic editio-

editioni novæ caſtigationes & obſervationes *Guil. Philandri* integræ, *Danielis Barbari & Claudii Salmaſii* excerptæ & paſſim inſertæ. Præmittuntur Elementa Architecturæ *Henrici Wottoni*, Equitis Angli: ſubjiciuntur Lexicon Vitruvianum *Bernhardi Baldi*, ejusdem Scamilli impares Vitruviani, de pictura libri tres *Leonis Baptiſtæ de Albertis*, de ſculptura excerpta ex Dialogo *Pomponii Gaurici* & Commentarius de ſculptura & pictura *Ludovici Demontioſii*.

§. 2. Reprehendunt in egregio alias opere *Virtuviano*, quod nullum ordinem tenuerit; quod obſcure ſcripſerit, nempe judice *Leone Baptiſta de Albertis* (a) Græcis Latine & Latinis Græce; quod denique multa ſuperflua ac aliena immiſcuerit. Hinc *Perrault*, quemadmodum olim ſuaſerat *Philibertus de l' Orme*, regulas Architectonicas Vitruvianas ex opere prolixo excerpſit & in ordinem redactas ſub titulo: *Architecture generale de Vitruve reduite en Abregé* publici juris fecit. (Amſtelodami A. 1681. in 8. 16½. plag. & fig. æn. plag. 1½.). Textum obſcurum *Virtuvii* in verſione Germanica, & adjecta ſingulis capitibus paraphraſi clariorem reddidit *D. Gualt. H. Rivius*. Recuſa eſt hæc verſio Baſileæ A. 1614. in fol. (7. Alph. 2. plag.). In paraphraſi ſeu Commentario, ſi mavis, more *Vitruviano*, multa aliena admiſcuit. Magis commendanda eſt verſio Gallica, quam primum An. 1673. typis deſcribi, ſed A. 1684. auctiorem & emendatiorem recudi curavit *Perrault* adjectis notis ſelectis & figuris æri nitidiſſime inciſis (Pariſiis in fol. reg. 4. Alph. 5. plag.). Idem *Perrault* opus præclarum de Ordinibus A. 1684. in fol. addidit ſub titulo: *Ordonnance des cinq eſpeces de Colonnes ſelon la methode des anciens*, in quo præjudicia Architectorum refellit & quod inſtar ſupplementi Architecturæ *Vitruvii* haberi poteſt, qui doctrinam de Ordinibus imperfectam tradidit.

§. 3. Poſt *Vitruvium* libros decem de re ædificatoria edidit *Leo Baptiſta de Albertis* aliquoties recuſos & ex idiomate Latino

(a) lib. 6. c. 1. de re ædificatoria p. 80. & ſeq.

tino in varias Linguas translatos. Prodiit Latine Parisiis An. 1512. in 4. (2. Alph.) & Florentiæ A. 1585. Italice lucem adspexit Venetiis A. 1546. in 8. (1. Alph. 9½. plag.); Gallice An. 1553. Multa habet utilia; sed *Vitruvio*, quemadmodum intenderat, palmam præripere non potuit. Doctrinam de Ordinibus non satis perfectam tradidit.

§. 4. Mox secuti sunt *Sebastianus Serlius & Andreas Palladius* coëtanei, quorum ille septem, hic quatuor de Architectura libros composuit. Architecturæ *Serlianæ* libri quinque Italice Venetiis An. 1602. in fol. Germanice Basileæ An. 1609. in fol. (4. Alph. 13. plag.) prodiere. Quinque tantum ordines cum variis ædificiorum generibus describit; regulas ex *Vitruvio* supponit, a quibus recedere religioni duxit. Vid. lib. 3. f. 46. edit. Venetæ. Liber sextus de ædificiis privatis in publicum nondum prodiit; Septimum de ædificiis publicis *Jacobus Strada* Latine & gallice Francofurti A. 1575. in fol. imprimi curavit.

§. 5. *Palladius* hanc laudem meruit, quod splendorem ordinibus ac operibus suis conciliaverit. Libro primo regulas fundamentales Architecturæ tradidit; reliquis varia ædificiorum & operum architectonicorum genera delineavit. Commendatur Architecturæ purioris studiosis. Prodiere libri omnes Italice A. 1575. in fol. recusi anno superiore An. 1714. Venetiis in fol. adjecto ipsius de Antiquitatibus Romanis tractatu. Libros duos priores *Georgius Andreas* Böckler / Germanice vertit & multis annotationibus auxit (Norimbergæ 1689. in fol. 1. Alph. 3. plag. Tabb. 88.). Idem *Palladius* scripsit de Templis Romanis (A. 1554. in 8.).

§. 6. *Philibertus de Lorme*, Caroli IX. Consiliarius, Eleemosinarius & Architectus A. 1567. Parisiis in fol. edidit novem de Architectura libros idiomate vernaculo. Architecturæ peritia adeo celebris erat, ut ad excitanda palatia Principum ex Gallia in exteras regiones evocaretur.

§. 7. *Jacobus Barozzius Vignola* A. 1631. Italice de quinque ordinibus scripsit, cujus liber in varias linguas translatus. Utor

ego

ego editione Gallica, quæ sub titulo: *Regles des Cinq ordres d' Architecture d. J. B. de Vignole avec plusieurs augmentations de Michel Ange Buonaroti* cura *Duræi de Champdoré* Lugduni Batavorum A. 1712. in 8. prodiit (plag. 9½.). Eundem prolixis additamentis locupletavit *Daviler* & idiomate Gallico Parisiis in 4. edidit cum Lexico Architectonico. Mox recusum est opus sub titulo: *Cours d' Architecture, qui comprend les Ordres de Vignole avec des Commentaires, les figures & descriptions des plus beaux batimens & de ceux de Michel Ange &c.* Amstelodami An. 1694. in 4. (3. Alph. 20. plag. Tabb. 103. magnam partem textui insertæ). *Leonhardus Christophorus Sturmius* Germanice vertit & notis quibusdam auctum, omisso Lexico, Amstelodami 1699. in 4. (2. Alph.) edidit, figuram plagulis 3½. adjectis ultra eas, quæ in editione Gallica habentur. Prodiit nuper nova editio Gallica Parisiis in 4. auctior. Laudatur ob facilitatem & perspicuitatem. Unde omnibus fere sese probavit, qui praxi operam dant.

§. 8. *Vincentius Scamozzi* A. 1615. Venetiis sermone patrio edidit librum primum, secundum, tertium, sextum & septimum Ideæ Architecturæ universalis in fol. Præstantissima editio est, quæ idiomate Gallico Lugd. Bat. An. 1713. in fol. reg. (3. Alph. 5. plag. Tabb. 105. quorum 84. textui insertæ) sub titulo: *Oeuvres d' Architecture de Vincent Scamozzi* prodiit. Liber sextus & tertius Germanice versus sub titulo: **Klärliche Beschreibung der fünf Säulen-Ordnungen und der ganzen Bau-Kunst.** Norimbergæ An. 1697. in fol. (2. Alph. 6. plag. Tabb. 85.) lucem adspexit. Laudatur, quod Symmetriam unus omnium optime excoluerit, sed intricate scribit.

§. 9. *Carolus Philippus Dieussart* in Theatro Architecturæ Civilis, quod vernaculo sermone Bambergæ 1697. in fol. reg. (1. Alph. 3. plag. Tabb. 95.) prodiit, non modo regulas Architectonicas explicavit, verum etiam Ordinis juxta institutum *Palladii*, *Vignolæ*, *Scamozzi*, *Petri Catanei*, *Sebastiani Serlii* & *Brancæ* inter se comparavit: quod idem executus est ante ipsum

ipsum *Rol. Freard. de Chambray* in Parallelismo Architectonico Gallice Parisiis A. 1650. in fol. publicato. Et postea idem fecit *le Blond* in Libro sub titulo: *Parallele des V. Ordre d' Architecture* Parisiis 1710. in 4. edito. Plurium quoque Architectorum Ordines inter se confert *Johannes Christianus* **Seyler** / in Parallelismo Architectonico Germanice Lipsiæ in fol. edito.

§. 10. *Franciscus Blondel* in Cursu Architecturæ Gallico (Parisiis A. 1698. in fol. reg. 8. Alph. 14. plag. Tabb. 24. cum figuris plurimis textui insertis) parte prima Ordines *Vitruvii*, *Vignolæ*, *Palladii* & *Scamozzi* explicat; in cœteris quatuor ex omnium Architectorum celebrium scriptis congessit, quicquid circa ordinum usum notatu dignum occurrit. Habentur etiam in eodem alia nonnulla ad Architecturam spectantia, v. gr. de fenestris & scalis. Cursus hjus aliquid jam 1675. prodierat. Ea potissimum explicare intendit, quæ ad ornatum ædificiorum faciunt.

§. 11. *Nicolaus Goldmannus*, Vratislaviensis, in Tractatu de Stylomètris (Lugd. Bat. 1661. fol. Lat. & Germ. 9. plag. Tab. 40) ostendit, quomodo Ordines Architectonici ab ipso ad majorem perfectionis gradum deducti ope peculiarium quorundam instrumentorum facile delineari possint: quorum & constructionem, & usum docet, textui Latino ad latus adjecta versione Germanica. In opere vero Architectonico, quod *Leonhardus Christophorus Sturmius* sub titulo: **Vollständige Anweisung zu der** *Civil*-**Bau-Kunst** (Guelpherbyti 1696. in fol. reg. 2. Alph. 4. plag. Tabb. 74.) publici juris fecit, præter Ordinum doctrinam magna dexteritate tradidit, quicquid in *Vitruvii*, & Architectorum Italorum scriptis atque *Vilalpandi* Commentario in Prophetam Ezechielem, ex quo se plura didicisse ait, quam ex Architectorum ceterorum omnium scriptis, boni continetur: ita ut hoc opus cœteris omnibus præferatur. Cl. Editor A. 1699. Appendicem sub titulo: **Ausübung der** *Civil*-**Bau-Kunst des Goldmanns** / in fol. (1. Alph. 14. plag. Tabb. 19.) adjecit, in quibus ex aliis supplet, quæ in eo scitu necessaria desiderantur.

Ordi-

Ordinem quoque sextum, quem Germanicum appellat, proponit; sed hactenus in usum non receptum. Fallitur autem plurimum editor, dum sibi aliisque persuadere vult, *Goldmannum* regulas Architecturæ demonstrasse & eam in formam scientiæ redegisse. Plura ad operis hujus illustrationem posthac edidit *Sturmius*, qui Architecturæ totus erat deditus. Sed de his dicemus mox apertius.

§. 12. *Dominicus de Rossi* in Studio Architecturæ civilis in ornamentis portarum & fenestrarum, delineatis ex insignioribus Romæ ædificiis A. 1702. seu potius 1712. Romæ in fol. reg. edito figuris æneis 143. celeberrimorum Architectorum monumenta circa ornatum portarum & fenestrarum repræsentat. Augustæ Vindelicorum figuris ad minorem modulum reductis recusum est hoc opus, ut facilius & minori sumtu comparari possit. Plurima tamen habet, quæ imitari non licet, nisi a puritate Architecturæ Græcorum recedere velis.

§. 13. Ad eam perspiciendam inservit opus, quod *Antonius Desgodetz*, qui ædificia antiqua Romæ ex ruderibus nitidissime delineavit, sub Titulo: *Edifices antiques de Rome* (Parisiis 1697. in fol. (3. Alph. 17. plag.) edidit.

§. 14. *Johannes Balthasar* **Lauterbach** in Compendio Architecturæ (Amstelodami A. 1699. in 8. Gall. 2. plag. Tabb. 18.) ordines Architectonicos delineandi methodum facillimam proponit.

§. 15. In Gallia A. 1728. in 4. reg. (Alph. 1. plag. 19½. Tabb. 150.) prodiit opus architectonicum sub titulo: *Architecture moderne, ou l' Art de bien batir pour toutes sortes de Personnes, tant pour les Maisons des particulieres, que pour les Palais.* Explicantur satis perspicue omnia, quæ ad exstructionem ædificiorum omnis generis scitu necessaria, excepta doctrina de Ordinibus, quæ aliunde nota supponitur. Maximam operis partem complent omnis generis ædificiorum delineationes, quibus doctrina de distributione ædificiorum illustratur, vulgo vel neglecta, vel saltem nonnisi levi brachio pertractata. Commendatur etiam Tractatus de Architectura, quem *Muet* in 4. edidit, invention-

tiones quasdam novas continens; ſed nobis non viſus.

§. 16. Ædificia magnifica cura *Petri Poſt*, Architecti inſignis, paſſim per Bataviam exſtructa accurate deſcribuntur tum quoad ichnographiam, tum quoad orthographiam cum externam, tum internam in opere ſplendido, quod ſub titulo: *Les Oeuvres d' Architecture de Pierre Poſt* Lugduni Batavorum An. 1715. in fol. reg. (plag. 22. Tab. 75.) prodiit. Orthographiæ externæ & inchnographiæ ædificiorum, quæ in Batavia extruxit *Philippus Vingboon*, Architectus Amſtelodamenſis, exhibentur in alio opere, quod ſub titulo: *Les nouvelles oeuvres d' Architecture de Philippe Vingboons* Lugduni Batavorum An. 1715. in fol. reg. (plag. 11. Tab. 80.) lucem adſpexit.

§. 17. Villas veterum, in quibus deſcribendis admodum parcus eſt *Vitruvius*, idiomate Anglico plenius deſcripſit *Robertus Caſtellus* & ſub titulo: *The Villa's of the ancients illuſtrated* Londini ſuis ſumtibus in fol. (Alph. 1. plag. 12. Tabb. 11.) edidit. De Amphitheatris vero & præcipue Veronenſi libros duos idiomate Italico Veronæ 1718. in 12. (plag. 15. Fig. æn. 15.) edidit *Scipio Maffejus*, in quo non minus ea, quæ ad hiſtoriam, quam architecturam eorundem pertinent, exponuntur. Formam minorem elegit autor ob commodiorem uſum in ruderibus eorundem perluſtrandis.

§. 18. Anno 1721. Viennæ Auſtriæ in fol. reg. (Alph. 1. plag. 21. Tabb. 93.) prodiit opus ſplendidiſſimum *Johannis Bernhardi Fiſcheri ab Erlachen*, S. Cæſareæ Majeſtatis Architecti primarii, ſub titulo: **Entwurff einer hiſtoriſchen** Architectur, hoc eſt, ſpeciminis Architecturæ hiſtoricæ, ſumtibus Autoris, in quo varia exhibentur ædificia, quæ ab antiquis hiſtoricis celebrantur, vel hodienum apud exteras gentes conſpiciuntur, æri nitidiſſime inſculpta. Textui Germanico adjicitur verſio Gallica, ut exterorum quoque uſui inſerviat.

§. 19. In opere architectonico *Franciſci Borromini*, Patrum Congregationis Oratorii, quod Romæ eſt, Architecti, deſcribuntur Oratorium ædesque Romanæ P. P. Congregationis Oratorii S. *Philippi Neri*. Prodiit

Romæ

Romæ An. 1725. in fol. (plag. 8. Tabb. 67.).

§. 20. In Schola vero civili Architecturæ, quam *Ferdinandus Ruggieri*, Architectus Italus, idiomate patrio Florentiæ An. 1722. in fol. reg. (Tabb. 80.) edidit, præmissa præfatione & dedicatione cum indice contentorum, exhibentur ornamenta januarum & fenestrarum cum mensuris, ichnographia, orthographia & sectionibus verticalibus e potioribus Florentiæ ædificiis desumta, quæ a celeberrimis Italiæ Architectis extructa esse constat, ita ut nulla per totam Italiam occurrat urbs, quæ ædificiis se magis commendet Florentia.

§. 21. Non exiguus est numerus illorum scriptorum, quæ illustrandæ Architecturæ *Goldmanniæ* causa reliquit *Leonhardus Christophorus Sturmius* & quæ post fata ipsius Augustæ Vindelicorum impensis Chalcographi Augustani *Jeremiæ Wolfii* lucem adspexerunt. Eorum argumentum ex ipso titulo comparet, quos hic ex Germanico in Latinum versos exhibere lubet. Nimirum A. 1718. in fol. (plag. 8. Tabb. 11.) lucem adspexerunt Idea & compendium Architecturæ Civilis, explicationem terminorum technicorum & præcipuarum regularum exhibens; An. 1717. (plag. 17. Tabb. 17.) officina ornatus anhitectonici perfecta, in qua ordines architectonici juxta *Goldmannum*, cujus insignia in hoc genere merita, describuntur; An. 1730. (plag. 4½. Tabb. 10.) Regulæ symmetriæ, eæque in Architectura templi Solomonæi conspicuæ & ab eodem mutuo in nostra opera transsumtæ; An. 1718. (plag. 4½. Tabb. 9.) tractatio de arcuationibus architectonicis triumphalibusque arcubus rite designandis; An. 1720. (plag. 3. Tabb. 17.) institutio de interioribus ædificiorum rite ordinandis & disponendis, ubi etiam de aperturis fenestrarum & januarum, & de caminis, scalis, cœlis conclavium, aulis subdialibus præcepta reperiuntur. A. eodem (plag. 4½. Tabb. 5.) institutio *Goldmanniana* de ornatu architectonio extraordinario, veluti picturis, quibus ædificia exornantur, statuis & sculpturis, obeliscis, encarpis, cornibus A-

malthea &c. A. 1715. (plag. 4. Tabb. 15.) institutio de commoda dispositione ædium privatarum & civilium; A. eodem (plag. 5. Tabb. 8.) de suburbanis & nobilium ædibus in agris; A. 1718. (plag. 21. Tabb. 35.) de construendis palatiis Principum ad Architecturæ regulas & genium seculi nostri; A. eodem (plag. 6. Tabb. 13.) de ædificiis ad conventus publicos Provinciæ rectorum, magistratuum, mercatorum &c. instituendos aptis; A. eodem (plag. 8. Tabb. 22.) de templis varii generis bene construendis; A. 1720. (plag. 6½. Tabb. 15.) de ædificiis publicis, quæ curæ orphanorum, liberalibus studiis erudiendorum, ob flagitia castigandorum, senum, ægrotorum, peregrinorum & vinctorum custodiæ destinantur, rite parandis; A. eodem (plag. 2. Tabb. 5.) de monumentis defunctorum, cenotaphiis, castris doloris &c. A. eodem (plag. 4½. Tabb. 10.) de machinis hydraulicis, aquæ ductibus, fontibus & cisternis publicis & tandem A. 1721. (plag. 2½. Tabb. 4.) de Navium armamentariis & stationibus, itemque partibus rite parandis. Ceterum huc etiam pertinet Prodromus Architecturæ Goldmannianæ editioni novæ & auctiori præmissus, qui sub titulo: Vorbereitung zu einer neuen und vermehrten Edition der vollständigen Anweisung zur Civil-Bau-Kunst, Augustæ Vindelicorum A. 1714. in fol. reg. (plag. 10. Tabb. 29.) prodiit. In eo de cognitione Architecto necessaria agit, consilium impertitur, quomodo Princeps efficere possit, ut omnis materia sufficienti copia in promtu habeatur, ædificium publicum describit, in quo materiæ cum machinis & instrumentis asserventur, & denique specimina quædam Architecturæ exhibet, veluti ideam palatii principalis, domus suburbanæ Ducis Megapolitani & turris alicujus prægrandis.

§. 22. In Anglia *Guilielmus Halfpenny* Londini A. 1728. in 4. (plag. 3. Tabb. 15.) edidit libellum sub titulo: Magnum in parvo, seu the Marrow of Architecture, hoc est, Medulla Architecturæ. In eo ordines architectonicos juxta *Palladium* una cum arcubus delineare docet.

§. 23.

§. 23. Artem tignariam illustrant *Dechales* in cursu (§. 4. c. 1.) *Johannes* Wilhelm in Architectura civili idiomate Germanico edita Norimbergæ in fol. (5. plag. Tabb. 74.) & *Johannes* Vogel in Architectura moderna Germanico itidem idiomate conscripta (Hamburgi A. 1707. in fol. 3. plag. Tab. 36.). In Anglia *Jacobus Smith* edidit Tractatum de Arte tignaria Londini An. 1733. in 8. maj. (plag. 2. Tabb. 41.) sub titulo: *The Carpenters Companion*, h. e. Fabrorum lignariorum Comes. Sed non alia habet quam *Wilhelmus*, nisi quod appendicem de ordinibus delineandis adjecerit.

§. 24. Artem secandi lapides in usum architectonicum, quam primus dedisse creditur *Philibertus de Lorme* in Architectura (§. 6.), docent *Dechales* in cursu (§. 4. c. 1.), qui sua ex opere, quod *P. Deran* 1643. publicavit, præstantissimum in hoc genere, descripsit & *des Argues*, cujus liber ex Gallico in Germanicum versus sub titulo: Kunstrichtige und probmäßige Zeichnung zum Steinhauen in der Bau-Kunst / Norimbergæ A. 1699. in 8. (15. plag. Tabb. 154.) prodiit.

§. 25. Quoniam vero Autores isti, si P. *Dechales* excipias, omissis demonstrationibus, tantummodo praxin inculcant, neque etiam hic perfectam dedit Theoriam; ideo hunc defectum supplere conatus est *Frezier* in Theoria & Praxi de Sectione Lapidum, seu Tractatu de Stereotomia, sermone Gallico duobus Tomis Argentorati 1737. & 1738. in 4. maj. edito (Tomus I. Alph. 2. plag. 14. Tabb. 27. Tom. II. Alph. 2. plag. 19½. Tabb. 69.). In usum eorum, qui praxi operam navant, ex Tomo secundo excerpi poterant, quæ huc faciunt, aut opus insigne *P. Deran* in Linguam Germanicam verti mereretur.

§. 26. Ad architecturam aquarum spectant libri Italici sequentes: 1. *Jo. Baptistæ Barat-teri* Architectura d'Acque (Piacenza 1656. in fol. 3. Alph. 6. plag.) 2. *Cornelii Meyeri*, Batavi, L'Arte di restituire a Roma la tralasciata navigatione del suo Tevere (Romæ 1675. in fol. 2. Alph. 3. plag. cum multis fi-

guris textui insertis) & ejusdem Nuovi ritrovamenti (Romæ A. 1689. in fol. plag. 8. & 1696. in fol. plag. 12. cum figuris plurimis) 3. *Dominici Guielmini* della natura de fiumi Trattato (Bononiæ 1697. in 4. 2. Alph. 2. plag. 15. Tabb.). Ex *Meyeri* libro insigni plagio sua omnia descripsit Anonymus Gallus in libello Amstelodami A. 1696. in reg. 8. edito (6. plag. Tab. 12.) sub titulo: Traité des moyens de rendre les Rivieres navigables. Quoniam vero Theoriæ loco est, quod ab Italis præsertim de motu aquarum traditum; ideo non alienum a scopo præsente est injicere mentionem sylloges scriptorum de motu aquarum, quæ sub titulo: *Raccolta d' Autori, che trattano del moto dell' Aque* Tomis tribus in 4. maj. Florentiæ 1723. (Alph. 9. plag. 6. Tabb. 44. cum multis figuris textui insertis) prodiit.

§. 27. Ad Architecturam aquarum referri quoque potest Tractatus de pontibus & aggeribus & dissertatio de erismatis, fornicibus pilis & anteridibus pontium *Henrici Gautier*, Architecti & Inspectoris viarum regiarum, pontium & aggerum in Gallia. Prodiit ille sub titulo: *Traité des ponts & chaussées* Parisiis 1716. in 8. (plag. 14. Tabb. 26.); hæc vero sub titulo: *Dissertation sur les Culées voussoirs, piles & poussées des Ponts.* Habemus ab eodem autore Tractatum de viis muniendis sub titulo: *Traité de la Construction des Chemins* Parisiis A. 1716. in 8. (plag. 8. Tabb. 5.) editum.

§. 28. De Architectura navali sermone Anglico commentatus est *Wilhelmus Sutherland*, cujus quinque tentamina huc spectantia sub titulo: *The ship-builders Assistant, or Some Essays towards compleating the Art of Marine Architecture* Londini A. 1711. in 4. (Alph. 1. Tabb. 13.) lucem adspexerunt. Inprimis autem hanc Architecturæ partem tradidit Anonymus in Arte extruendi naves & earum constructionem perficiendi, quæ Amstelodami sub titulo: *L' Art de batir les vaisseaux* in 4. (Alph. 1. plag. $5\frac{1}{2}$. Tabb. 147. quarum 35. textui inseruntur) edita.

§. 29. Geometriam practicam ad Architecturam civilem applicatam addiscere licet ex opere Ang-

Anglico, quod sub titulo: *Practical Geomotry applied to the usefull Arts of Building, Surveying, Gardenig and mensuration* Londini 1726. in fol. (Alph. 1. plag. 11. Tabb. 40.) edidit *Batty Langley.* Eodem instituto inservit *Architectura practica*, quam *Bullet*, Architectus Regius, 1691. in 8. maj. (Alph. 4. pl. 4.) Paris. publici juris fecit.

§. 30. In Dictionario Architectonico, quod Londini 1734. in 8. reg. (Alph. 2. plag. 18. Tabb. 33.) sub titulo: *The Builder's Dictionary* prodiit, non modo termini explicantur, verum etiam ex Architectorum celebrium scriptis excerpuntur, quæ res ipsas vocabulis denotatas concernunt. Unde non modo usui est Anglis, verum etiam exteris usui esse potest. Ceterum nullam hic mentionem facimus scientiæ Architectorum militarium de *Belidor*, in qua multa habentur ad Architecturam spectantia singularia, quæ alibi frustra quæsiveris, quia de hoc libro dicemus capite 13.

CAPUT XII.
DE
PYROTECHNIA.

§. 1.

INter nostros, qui pyrotechniæ operam dant, maximi fiunt *Casimirus Simienowitz*, Polonus, *Johannes Sigismundus Buchnerus* & *Ernestus Braunius*. Illius opus a *Thoma Leonhardo* **Beeren** ex Latino idiomate in Germanicum translatum & a *Daniele* **Elrich** integra parte secunda auctum prodiit Francofurti ad Mœnum A. 1676. in fol. sub titulo: **Vollkommene Büchsen-Meisterey-Kunst.** Ex eo sua plerumque descripsit *Dechales* in Cursu (§. 4. c. 1.). Istius Theoria & praxis Artilleriæ Germanico idiomate Norimbergæ 1685. in fol. (2. Alph. 18. plag. Tabb. 53.) hujus denique Novissimum Fundamentum & Praxis Artilleriæ eodem sermone conscriptum Dantisci 1687. in fol. (2. Alph. 16. plag. Tabb. 60.) lucem adspexit. Ceterum Autores isti non tantum de iis agunt, quæ in bello usui sunt, sed ignium quoque festivorum rationem exponunt.

§. 2.

§. 2. *Michaël* **Mieth** in Artilleriæ recentiori praxi lingua nobis vernacula conscripta (Francof. 1684. in fol. 3. Alph. 10. plag. Tabb. 60.) tormentorum & mortariorum descriptionem omnium exactissimam dedit & ignium nocivorum rationem declaravit, festivis omissis. Atque hi Autores abunde satisfaciunt iis ipsis, qui Pyrotechniæ data opera incumbunt.

§. 3. Inter Gallos eminet *Surirœus de S. Remigio*, cujus Commentarii Pyrotechnici (*Memoires d' Artillerie*) accuratam descriptionem continent omnium machinarum & instrumentorum bellicorum hodie usitatorum, una cum rebus aliis eo pertinentibus. Optima editio est Parisiensis An. 1707. in reg. 4. (4. Alph. 17. plag. Tabb. 196), quæ cœteris quoque longe auctior.

§. 4. Ob peritiam bellicam celeberrimus *Cœhornius* sermone Batavo de Artilleria libellum brevem, sed autore suo dignum, conscripsit, qui suppresso ejus nomine in Germanicum translatus sub titulo: **Der gründliche Unterricht von der Artillerie**, Hamburgi 1699. in 8. (10. plag. Tabb. 23.) prodiit.

§. 5. Tyronum usui servit Fabrica *Vulcani*, quam *Eques de S. Juliano* (*Chevalier de Saint Julien*) Hagæ 1706. in reg. 8. (10. plag.) edidit. Titulus libri: *La Forge de Vulcain, ou l' Appareil des Machines de Guerre.*

§. 6. An. 1713. idiomate vernaculo prodiit Compendium pyrotechnicum, Pyrotechniæ studiosis commendandum, sub titulo: **Gründlicher Unterricht von der** *Theoria* **und** *Praxi* **der heutigen Büchsenmeisterey /** Francofurti 1713. in 8. (2. Alph. 4. plag. 29. Tabb.). Si titulo fidem habemus, lingua Gallica ipsum conscripsit *Eques de S. Juliano* modo laudatus, & inde in Germanicam transtulit *Augustinus* **Brand**. Sed diversum non modo est a Fabrica *Vulcani* paulo ante laudata; verum etiam partem primam integram verbotenus ex *Miethii* Artilleria descriptam reperio, quod quomodo in versinone libri a Gallo Gallice conscripti accidere potuerit, non satis apparet.

§. 7. Aliud compendium, sed minoris pretii, ante dedit *Georgius*

gius *Andreas* Böckler Tom. III. & IV. Manualis Architecturæ militaris (Francof. & Lipf. A. 1689. in 16. Tom. III. 4. plag. Tabb. XI. & Tom. IV. 10. plag. Tabb. 34.). Cum tamen *Cæhornius*, *Eques de S. Juliano & Brandiis* tantum tradant, quæ usui bellico inserviunt; *Bœcklerus* quoque de ignibus festivis tractat.

§. 8. Cæterum huc etiam referri debet *Blondelli* Tractatus de bombis jaciendis, qui sub titulo: *L' Art de jetter les Bombes* Parisiis 1683. in 4. prodiit & in Germanicam linguam translatus *Sulzbaci* 1686. in 8. recusus. Scriptum Mathematico dignum. Huic affine est scriptum, quod sub titulo: *Le Bombardier Francois*, *de Belidor* Parisiis edidit, Amstelodami recusum 1734. in 4 reg. (Alph. 2. plag. 11. Tabb. 8.), in quo simul praxis Pyrotechniæ concinna perspicuitate exponitur. Pertinet huc etiam F. E. Comitis *de Herberstein* Cyclodiatomia, qua pro rei tormentariæ incremento motum ac tempus projectorum mensurat & demonstrat (Pragæ A. 1716. in 8. Alph. 1. Tabb. 20.)

CAPUT XIII.

De ARCHITECTURA MILITARI.

§. 1.

Qui de Architectura militari commentati sunt, vel formas muniendi proprias, vel alienas exponunt.

§. 2. Primum forma muniendi Belgica admodum celebris extitit, de qua scripsit *Adamus* Freytag/ Polonus, cujus Architectura militaris Germanice prodiit Amstelodami An. 1665. (*Wolfii Matheſis. Tomus V.*) in fol. (2. Alph. 9. plag. Tabb. 1½. Alph.). Eandem in numeris tantum immutavit *Gerhardus* Melder/ cujus Praxis fortificatoria Francofurti 1666. in fol. lucem adspexit (plag. 36. Tabb. 8.).

§. 3. Minori autem in pretio statim haberi cœpit, cum An. 1645. Comes *de Pagan* suam muniendi formam publicaret

Parisiis in fol. (1. Alph. 6. plag. Tab. II.) sub titulo: *Les Fortifications de Comte de Pagan*, postea in sermonem Germanicum translatam. Cum eo in multis convenit *Henricus Rufius Baro de Rusenstein*, cujus muniendi forma cum *Melderiana* prodiit (§. 2.).

§. 4. Eidem quoque agnata est, magis tamen quam *Rusiana* ab eadem dissidet, quam *Blondellus* sub titulo: *Nouvelle maniere de fortifier les places*, Parisiis 1686. in 12. reg. (5. plag. Tab. XII.) in lucem emisit, recusam Hagæ Comitum (A. 1686. in 8.) bonam quidem, sed sumtuosam nimis.

§. 5. Comes de *Vauban* duas muniendi formas invenit & secundum eas celebria munimenta exstruxit; sed neutram ipsemet descripsit. Priorem optime delineavit Abbas *du Fay*, qui eam sub titulo: *La veritable maniere de bien fortifier de M. Vauban* in lucem publicam emisit. (Amstelod. A. 1692. in 12. plag. 9.). Posteriorem primus descripsit Autor Anonymus in libro Gallico, cujus titulus: *L'Ingenieur François* (Paris. 1691. in 8. reg. 13½ plag. Tab. 33.). Utramque *Sturmius*, aliquoties jam laudatus, in libro Gallico sub titulo: *Le Veritable Vauban* explanavit (Hagæ Comitum 1709. in reg. 8. plag. 14. Tabb. 31.). Recenset idem regulas Architecturæ militaris fundamentales & principia Arithmeticæ ac Geometriæ practicæ more communi præmittit, ut adeo tyronum instituto inserviat hic liber.

§. 6. *Cœhornius* suam muniendi methodum primum sermone Batavo edidit Leeuwardiæ 1685. in fol. (45. plag. Tab. 14.). Postea in sermonem Gallicum translatus prodiit Hagæ Comitum An. 1706. in reg. 8. (19. plag. Tabb. 14.) sub titulo: *Nouvelle Fortification tant pour un terrain bas & humide, que sec & elevé.*

§. 7. Singulares muniendi formas, a reliquis prorsus dissidentes apud Italos dedere *Alexander de Grotte* & *Donatus Rosetti*. Prior prodiit Italice Venetiis A. 1617. (3. Alph. in fol.) anno sequente Monachii Germanice recusa: posterior itidem Italice Augustæ Taurinorum 1678. in fol. (Alph. 2. plag. 5.)

§. 8.

§. 8. Similiter apud nostros inusitatam reliquis formam dedit *Bernhardus* **Scheiter** in libro Germanico, cui titulus: **Neu vermehrte und verstärckte Vestungs-Bau- u. Kriegs-Schule** (Brunswigæ 1672. in fol. 11. Alph. 7. plag. Tabb. 24). Eam cum anno sequente oppugnaret *Christianus* **Neubauer** eidemque aliam suam opponeret in libro Germanico, cui titulus: **Wohlmeinende Gedancken / oder** *Discurs* **über ausgegange** *Fortification* **des** Tit. **Herrn Joh. Bernhard Scheiters** (Coloniæ ad Spream in 8.); *Scheiterus* A. 1677. Argentorati in fol. (1. Alph. 2. plag. Tabb. 8.) Examen fortificatorium in lucem publicam emisit, in quo *Neubauerianam* oppugnat, suam defendit, aliamque novam superaddit. *Neubauerus* autem A. 1679. suam in vera praxi Architecturæ militaris (Stargardiæ An. 1679. in fol. plag. 19. Tabb. 8.) uberius exposuit.

§. 9. *Ernestus Fridericus de Borgsdorf* novas muniendi methodos publicavit cum in Munimento inexpugnabil, cui titulus: **Unüberwindliche Festung** (Ulmæ 1682. in 8. plag. 7. Tab. 8.), tum in scripto altero, cui titulus: **Die befestigte Stütze eines Fürstenthums / oder neu erfundene** *Defension* **wieder das sonst Welt bezwingende Canoniren / Bombardiren und Miniren.** (Norimbergæ 1687. in 8. cum aliquot figuris.).

§. 10. *Georgius Rimplerus* in libello Germanico, cui titulus: **Die befestigte Festung** (Francofurti 1674. in 12. plag. 16.) hactenus usitatas muniendi formas omnes rejicit, tanquam principiis spuriis nitentes, & axiomata prorsus nova substituit: quibus tamen convenientem muniendi formam ipse non delineat. Nemo autem magis in ea delineanda desudavit, quam Cl. *Sturmius* in libello, cui titulus: **Entdeckung der unstreitig allerbesten Manier zu befestigen** (Francof. ad Oderam 1704. in 8. plag. 12. Tabb. 9.). Alias quoque eandem operam sumsit *Daniel* **Suttinger** in scripto Germanico Dresdæ in fol. edito (plag. 14. & 9½ plag. fig.).

§. 11. Scripta *Rimpleri* admodum rara annotationibus & sche-

schematismis, quæ desiderabantur, illustrata, additis nonnullis aliis, Dresdæ in 4. A. 1724. (Alph. 3. plag. 9. Tabb. 10.) recudi curavit *Ludovicus Andreas* Herlin / qui *Sturmii* de *Rimpleri* inventis judicium parum probat.

§. 12. *Rimpleri* principia probat J. H. *Landsbergius*, Germanus, Statuum Belgii fœderati Architectus militaris primarius, & iisdem consonam muniendi formam delineat, cum tamen non ex asse ipsi satisfaciat, novam quandam aliam substituit, in libro Gallico, cui titulus: *Nouvelle maniere de fortifier les places* (Hagæ Comitum, An. 1712. in 4. plag. 11. Tabb. 8.).

§. 13. Idem laudatus *Landsbergius* una cum aliis Architectis militaribus peritis valde probat Architecturam militarem, quam *Daniel Speckle*, Architectus Argentoratensis, jam 1589. in fol. (2. Alph. 10. plag. Tabb. 36.) publici juris fecit. Hinc etiam factum est, ut praclarum in hoc genere opus Dresdæ 1705. in fol. fuerit recusum (2. Alph. 12. plag. Tabb. 24.).

§. 14. Sunt vero adhuc plures inter nostros, qui singulares muniendi formas dedere, attentione Architectorum militarium non indignas. Huc refero *Johannem Franciscum Griendel ab Aach*, qui septem muniendi formis, utut eidem fundamento superstructis, inclaruit (Norimbergæ A. 1683. in fol. plag. 14. Fig. plag. 15.), *Christophorum* Heer /, qui in Theoria & praxi Artis muniendi (Francof. 1689. in 4. plag. 16. Tabb. 30.) elegantes dedit sibique proprias constructiones; in Speculo vero Artis muniendi (Lipsiæ 1694. in 4. plag. 17. Tabb. 31.) præterea varia munimenta celebria Europæ describit, & *Christophorum* Heidenmann / cujus Architectura militaris una prodiit Monachii A. 1664. in fol. (1. Alph. 22. pl. 27.), & fig. plag. altera ibidem 1673. in fol. (plag. 10. & Fig plag. 14).

§. 15. Nec forte e re esset *Wilhelmi Dilichii Peribologiam* (Francofurti A. 1640. in fol. 2. Alph. 2. plag. Tabb. 409. seu 9. Alph. 11. plag.) in scenam adducere, quoniam Architecturæ militaris periti multa ad praxin proficua in ea reperient. Immo si verum fateri fas est, in hoc

hoc autore occurrunt, quæ dudum posthac in Gallia tanquam nova inventa prodita fuerunt. Unde melius de eo judicium ferendum, quam tulit *Dechales* in Tractatu de illustribus Mathematicis Tomo I. Mundi Mathematici (§. 4. c. 1.). Idem quoque edidit Scholam militarem (Francof. ad Mœn. 1689. in fol. 10. Alph. 13. plag. cum ingenti numero figurarum partim æri, partim ligno incisarum), in qua omnia ad bellum tam veterum, quam nostris moribus necessaria describuntur & illustrantur.

§. 16. In eadem scena mimi vices adimplebit *Wendelinus* Schildknecht/ qui muniendi formam Batavam stylo histrionico describit (Stetini 1652. in fol. plag. 129. & fig. plag. 20½.)

§. 17. Eclecticam quandam muniendi formam ex *Antonii de Ville*, *Comitum de Pagan* & *Vauban* methodis deductam proposuit Autor Anonymus in libro, cui titulus: *Nouvelle maniere de fortifier les places, tirée des methodes du chevalier de Ville &c.* (Amstelodami 1689. in reg. 12. plag. 10. Tab. 15.), qui regulas Architecturæ militaris bene explicat, simulque ideam exhibet, quomodo diversorum Architectorum muniendi formas una ad praxin transferre liceat. *Antonii de Ville* Ars muniendi prodiit Amstelodami 1675. recusa juxta editionem Parisinam A. 1672. in 8. (1. Alph. 3. plag. cum figuris multis partim textui insertis, partim seorsim excusis). Multa hic distincte exponuntur, quæ alibi vel omittuntur, vel strictim proponuntur.

§. 18. *Matthias Dœgen* in Architectura militari moderna, quæ A. 1647. in fol. (Alph. 5. plag. 13. Tabb. 78.), Latina lingua prodiit, formam equidem muniendi Batavam nonnisi describit, quæ illo tempore usitatissima erat; multa tamen lectu digna habet iis præsertim, qui in extructione munimentorum scitu necessaria nosse desiderant. Regulas, quas tradit, exemplis veris celebrium tunc temporis per Europam munimentorum illustrat, calculos, ubi iis opus est, perspicue explicat, de figurarum irregularium fortificatione experientia confirmata tradit, modumque munimenta oppugnandi & defendendi declarat.

Singula variis historiis tam veteribus, quam novis confirmat. Partem Architecturæ militaris, quæ de locis muniendis agit, *Hercotectonice*; alteram vero, quæ de munimentis oppugnandis & defendendis tractat, *Arcotectonicen* vocat. Et hujus partem oppugnatoriam *Poliorceticen*; repugnatoriam vero *Antipoliorceticen* appellat.

§. 19. *Bonajutus Lorinus*, Nobilis Florentinus, cujus de Architectura militari Libri quinque a *Davide* **Wormbser** ex Italico in Germanicum versi Francofurti ad Mœnum 1607. in fol. prodierunt, multa habet, quæ etiam in Architectura civili usui sunt, & libro quinto Mechanicam practicam tradit, variaque instrumenta & machinas varias describit.

§. 20. *Donatum Rosetti* singularem quandam muniendi methodum invenisse, quæ a ceteris prorsus diffidet, eandemque sub titulo: *Fortificazione à Rovescio* sermone patrio edidisse, supra jam meminimus (§.7.). Ejus ideo mentionem injicere lubet, quia peritis viam ad ulteriora sternit. Unde eidem multum tribuit *Alexander Christianus le Maitre* in Troja vetere & nova 1684. in 8. (Alph. 1. plag. 7 Tabb. 14.), ob principia utilia lectu dignissimus.

§. 21. Nec minus singularis ea est, quam pro inexpugnabili venditat *Jacobus de la Vergne*, Architectus militaris Cæsareus primarius, cujus *Nouvelle Fortification imprenable par force d' Armes*, lucem adspexit Viennæ Austriæ A. 1700. in 4. (plag. 17. Tab. 1.). Ostendit idem, quomodo munimenta ordinaria ad novam istam formam reduci queant. Edidit idem ibidem A. 1798. duos Tractatus alios in 4. quorum unus inscribitur. *De l' utilité d'avoir un bon Ingenieur ou Directeur general des Fortifications dans un etat &c.* alter vero: *Nouveau exercice du Gabion & de la Fascine.* Constat ille plag. 11. hic itidem plag. 11. & Tabb. 3. Quemadmodum vero illi jungit Tractatum de officiis Architectorum militarium, qui subsunt Directori generali; ita in altero quoque agit de modo oppugnandi munimenti satis perspicue.

§. 22.

§. 22. Hactenus recensitas muniendi formas omnes, sola Landsbergiana excepta, una cum aliis a nobis brevitatis studio prætermissis atque propriis breviter describit & ad examen revocat, vir in hoc studiorum genere probe versatus sæpiusque jam nobis laudatus *Sturmius* in Architectura militari hypothetica & eclectica (Norimbergæ 1702. in 8. plag. 10. & fig. plag. 6.), ex quo adeo libro brevi temporis spatio cognoscere licet, quæ alias ex vastis voluminibus cum multo sumtuum & temporis dispendio forent conquirenda. In prima editione desideratur orthographia munimentorum. Hic vero defectus suppletur in altera, quæ multo auctior Norimbergæ 1719. in 4. (Alph. 1. Tabb. 41.) prodiit.

§. 23. Novam quoque muniendi methodum dedit ***Rozard***, Architectus militaris Electoris Bavariæ, quam in libro sub titulo: *Nouvelle Fortification Françoise* Norimbergæ in 4. reg. A. 1731. (Alph. 1. Tabb. 42.) edito describit. In parte altera desiderio aliorum satisfacturus adjecit explicationem trium systematum Comitis *de Vauban*, qualem ex ipsis munimentis ab eodem extructis hausit, una cum omni praxi offensiva & defensiva, ubi etiam præliorum rationem habet addens ubivis observationes, quas experientia domestica suggerebat.

§. 24. Restat ut de iis Autoribus dicamus, qui in gratiam Architecturæ militaris studiosorum libros ediderunt. Commendandi hic nobis sunt ***Don Sebastian Fernandez de Medrano*** in Architectura militari, quæ sub titulo ***Ingenieur pratique*** Bruxellis 1696. in 8. (1. Alph. Tabb. 35.) lucem adspexit; Cl. ***Ozanam***, cujus Tractatus de Architectura militari (Traité de Fortification) Parisiis 1694. in 8. reg. (17. plag. Tabb. 44.) prodiit; ***Eques de S. Juliano*** supra laudatus, cujus Architectura militaris publicata est sermone Gallico, Hagæ Comitum An. 1705. in 8. (plag. 11. Tab. 25.). In eundem censum venit Anonymi Architectus militaris Gallicus supra laudatus (§. 5.).

§. 25.

§. 25. In vernacula nostra notissimi sunt libri sequentes: 1. *George Conrad Martii* **Europäischer** *Ingenieur* (Norimbergæ 1696. in 8. 2. Alph. 16. plag. Tabb. 60.), qui præter Architecturam militarem etiam Arithmeticam & Geometriam practicam prolixe tradit: 2. *Joh. Heinrici* **Behrs aufs neu verschantzter Turenne oder gründlich-alt u. neue Kriegs-Bau-Kunst** (Francofurti 1690. in 8. 1. Alph. 16. plag. Tabb. 32.): 3. **Johann Sebastian Grubers Friedens- u. Krieges-Schule** (Norimbergæ A. 1697. in 8. 2. Alph. 11½. plag.): 4. Ejusdem Examen Fortificatorium (Lipsiæ 1703. in 8. 1. Alph. 22. plag. Tab. 19.): 5. ejusdem **neuer und gründlicher Unterricht von der heutigen** *Fortification* **und** *Artillerie* (Norimb. 1700. in 8. 1. Alph. 17. plag. 16. Tabb.) aliique.

§. 26. Anno 1722. Bruxellis prodiere Principia Architecturæ militaris modernæ (*Les Principes de la Fortification moderne.*) Directoris Academiæ militaris cæsareæ, quæ Bruxellis est, *Hartmanni* in 8. reg. (plag. 19. Tabb. 9.). Explicat principia *Comitis de Vauban* & *Cœhornii*, ac multus inprimis est in uberius explicanda munimentorum oppugnatione & defensione, quam ab aliis factum: ut hinc addiscere liceat, quomodo munimentorum forma ad examen revocanda, ubi quidem rectum de iis judicium ferre velis.

§. 27. Inprimis autem commendari meretur Anonymi Institutio Architecturæ militaris, quam sub titulo: *Le parfait Ingenieur François* Amstelodami 1734. in 4. (Alph. 1. plag. 22. Tabb. 42.) edidit. Omnem enim artem muniendi secundum triplicem non modo methodum Comitis *de Vauban*, verum etiam *Errardi*, *Sardii*, *Equitis de Ville*, *Equitis de S. Juliano*, *Maroloisii*, *Bombelli*, *Blondelli*, Comitis *de Pagan*, *Cœhornii*, *Scheiteri*, *Sturmii* aliorumque anonymorum explicat, artem muniendi irregularem reformat, & praxin offensivam ac defensivam consummatam tradit. De *Sturmii* cogitatis parum honorifice sentit, quantuscunque sibi visus fuerit Apollo.

§. 28. Antea celebrabatur liber Gallicus, quem secunda vice multo

multo auctiorem sub titulo: *Les Travaux de Mars ou l' Art de la Guerre*, seu Artis militaris, Parisiis 1685. in 8. reg. ediderat *Allain Manesson Mallet* tribus tomis. Tomus I. constat Alph. 1. plag. 2. Tabb. 152. Tomus II. plag. 22. Tabb. 111. Tomus III. Alph. 1. plag. 3. Figuræ ipsi textui insertæ sunt & ornatus gratia multa adjiciuntur, quæ ad rem non faciunt, quemadmodum fecit in Geometria practica supra laudata (§. 30. cap. 3.). Etsi autem ab eo tempore Architectura militaris multum subierit mutationis; in primo tamen præsertim ac tertio tomo habentur, quæ non sine fructu leguntur. Editionis primæ versionem Germanicam dedit A. 1672. Amstelodami in 8. reg. excusam sub titulo: *Manesson Mallet* **Kriegs-Arbeit**, qui puritatem linguæ Germanicæ ridicule affectabat *Philippus a Zesen*, sed ob insuetum dicendi genus nullius momenti.

§. 29. Regulas fundamentales Architecturæ militaris qui cognoscere avent, iis abunde satisfaciet *Johan. Jacobus* **Wertmüller** in Theatro regularum fundamentalium Architecturæ militaris tam veterum, quam recentiorum, **Schauplatz der alten und neuen** *Fortifications*-**Maximen** Francof. ad Mœn. 1691. in 8. 1. Alph. 20. plag. Tab. 12.) & in Lapide Lydio Architectorum militarium **Probier-Stein der** *Ingenieur* 1685. in 8. 16. plag. Tabb. 4.), tum etiam in Apologia fortificatoria, in qua Belgicam muniendi formam defendit, quamvis eam aliqua emendatione indigere fateatur (Francof. 1691. in fol. 1. Aph. 15. plag. & Fig. plag. 16.)

§. 30. Quæ in excitatione munimentorum observari merentur, docent *Johannes* **Faulhaber** in Schola Architectorum militarium (Norimbergæ 1637. in 4.) & **Heer** in Praxi Artis muniendi (§. 14.) præter alios, quos antea laudavimus. Inprimis hic commemorari meretur *Lambertus Lambion* in Praxi Architectonica [**der Bau**-*Practica*] (Viennæ 1696. in 8. plag. 16. & Fig. plag. 1½.), ubi multa singularia occurrunt præsertim de cuniculis subterraneis, nisi quod linguæ Germanicæ non satis peritus male scripserit, ut adeo libellus Germanice scriptus in

idioma Germanicum verti mereretur.

§. 31. De praxi militari tam offensiva, quam defensiva data opera scripsit *Goulon* in libello Gallico, cui titulus: *Memoires pour l'Attaque & pour la defense d'une Place* (Hagæ Comitum 1706. in 8. plag. 13. Tab. 4.) & qui eodem adhuc anno recusus Weselii in 8. reg. (plag. 5. Tab. 4.), postea in Germanicum idioma translatus (Norimb. 1709. in 8. plag. 5½. Tab. 4.).

§. 32. Etsi autem multa utilia dederit, quæ domestica experientia ipsum docuit, non tamen dedit, quæ sufficiunt. Anno autem superiori 1737. Hagæ Comitum in 4. reg. (Alph. 1. plag. 5½. Tabb. 33.) prodiit *Comitis de Vauban* de praxi offensiva & defensiva opus posthumum, sub titulo: *De l'attaque & de la defense des places*, quod observationibus ultra dimidium seculum a se continuatis superstruitur. Composuerat idem in usum Ducis Burgundiæ, cui MSC. dederat, non ea intentione, ut publici juris fieret; sed ut arcani instar asservaretur. Neque adeo facile erat MSC. istud describi, propter Tabulas majores, in quibus Shemata nitidissime delineata erant. Cum in eo candide de singulis mentem suam aperuerit; nullum superesse potest dubium, quin insigni cum fructu legatur ab iis, qui castra sequuntur, vel de praxi offensiva & defensiva judicium sibi sumunt.

§. 33. *Johannes Teyler* in Architectura militari (Rot. 1697. in 4. plag. 8. Tab. 41.) ad Architecturam militarem Algebram applicare cœpit, quoad calculum inprimis probabilium, spem feriendi planum sclopeto, vel tormento ad mensuram revocaturus. Aliud vero Specimen Algebræ ad Artem Fortificatoriam applicatæ, diversum prorsus a *Teyleriano*, etiam dedit *Joh. Matthias Hasius*, nunc Mathematum Professor Wittebergensis, (Lipsiæ 1707. in 4. plag. 3½. Tab. 1.).

§. 34. Tandem hic commemorandum est opus, quod in usum Architectorum militarium, conscripsit *Belidor*, Commissarius ordinarius Artilleriæ, Professor Mathematum Regius in Scholis eidem destinatis, editum Parisiis, mox vero Hagæ Comitum recusum A. 1734. in 4.

reg.

reg. (Alph. 2. plag. 10. Tabb. maj. 53.) sub titulo: *La science des Ingenieurs dans la Conduite des Travaux, de Fortification & d' Architecture civile.* In eo Autor, qui omni studio id agit, ut ad solidam scientiam Architectos militares perducat, eoque fine in eorum gratiam Cursum mathematicum jam ante edidit, recusum Parisiis An. 1725. in 4. reg. cum 24. Tabulis figuras nitidissime æri incisas exhibentibus, in quo ea inprimis docentur, quæ iisdem scitu necessaria sunt ad finem istum consequendum, non modo ea tradit, quæ ex Architectura militari, verum etiam quæ ex civili iisdem perspecta esse debent. Traditur hic theoria multorum, quæ hactenus in utraque Architectura nudæ experientiæ fuere superstructa. Videre hoc est ex libro primo atque secundo, quorum isto quæ ad muros, hoc autem quæ ad fornices pertinent, ex principiis geometricis & mechanicis demonstrat, usus hinc inde demonstrationibus algebraicis. Usui esse potest hoc opus iis, qui ad formam scientiæ vere mathematicæ utramque Architecturam reducere voluerint ea demonstraturi, quæ hactenus experientiæ fide sumuntur nondum satis limata. Opus hoc etiam in censum scriptorum de Architectura civili referendum, inter quæ eminet, quatenus viam ad ulteriora sternit.

§. 35. Non silentio prætereundus est libellus Germanicus, quem *Johannes Christophorus Glaserus* Halæ Saxonum A. 1728. in 4. (Alph. 1. plag. 2. Tabb. 6.) sub titulo: **Vernünfftige Gedancken von der Kriegs-Bau-Kunst erste Probe** edidit, in quo ostendit in omnibus muniendi formis, quæ hactenus prostant, deficere defensionem fossæ sufficientem, novamque proponit, qua huic defectui succurritur. Addit adhuc aliam per Algebram erutam. Plura dare constituerat specimina Architecturæ militaris perficiendæ: sed nescio qui factum, ut a proposito suo destiterit.

§. 36. Artem militarem universam describit *Georgius Andreas* **Böckler** in Schola militari moderna: **Neu vermehrte Kriegs-Schule,** quæ Francofurti ad Mœnum A. 1635. in 8. (Alph. 2. pl. 8. cum figuris, multis æri incisis) prodiit. Tradit autor

ea omnia, quæ in bello usui esse possunt, ita ut etiam jus militare Cæsareum, Suecicum & Batavum libro suo inseruerit, & sub finem in Appendice varia arcana doceat, quæ militibus scitu necessaria.

§. 37. Huc etiam pertinet *Joannis Friderici a Flemming*, Regis Poloniarum & Electoris Saxoniæ Tribuni militum pedestrium, Miles Germanus perfectus, **der vollkommene Deutsche Soldat**, qui Lipsiæ 1726. in fol. (Alph. 9. plag. 8. Tabb. 64.) prodiit, in quo autor omnem scientiam militarem, inprimis quæ ad militem pedestrem spectant, dilucide exponit. In eundem quoque censum referri potest liber Gallice conscriptus, quem sub titulo: *Les Fonctions du Capitaine de Cavalerie & les principales de ses Officiers subalternes* multo auctiorem Parisiis edidit *de Birac*, recusum Hagæ An. 1693. in 8. (Alph. 1. plag. 2. Tabb. 14.). Optandum vero foret, ut quis rei militaris peritus, in Mathesi versatus & methodi gnarus artem militarem in eam formam redigeret, qua nos Pyrotechniam, Architecturam militarem & civilem repræsentavimus, iis simul perlustratis, quæ Autores modo laudati tradiderunt, & ex Autoribus superioribus aliisque peti possunt.

FINIS

Commentationis de præcipuis scriptis mathematicis.



Com-

COMMENTATIO
DE
STUDIO MATHEMATICO
RECTE
INSTITUENDO.



PRÆFATIO.



Ui Matheſi addiſcendæ operam navant, non eundem ſibi ſcopum præfigunt. Elementa noſtra Matheſeos univerſæ ita conſcripſimus, ut pro multiplici diſcentium ſcopo ſatisfaciant omnibus. Quoniam vero non omnes eadem induſtria eidem incumbere tenentur, nec omnia addiſcenda omnibus; igitur nobis propoſitum eſt docere, quid unicuique conveniat. Multum omnino intereſt, ut ſtudium Matheſeos rite tractetur, ſiquidem ſine moleſtia ac temporis

poris

poris diſpendio feliciter progredi volueris. Quamobrem noſtrum eſſe duximus, monſtrare viam, qua ſit eundum, ne ad devia declinemus: id quod facillime accidit. Eam igitur, quam in nos ſuſcepimus, de ſtudio mathematico rite inſtituendo tractationem utilitate ſua non deſtitutum iri confidimus. Quamobrem ſuademus, ut omni attentione eandem legat & relegat, qui Matheſeos addiſcendæ animo ad Elementa noſtra legenda accedit. Quodſi quis ſtudioſe obſervet, quæ præcipimus, eum participem futurum fructus, quem eidem pollicemur, nulli dubitamus. Inſignem vero percipiet voluptatem, ubi ſenſerit voto reſpondere eventum: quem ubi prævidet, eo ipſo accendetur ardor majore induſtria Matheſeos ſtudium continuandi, quam qua idem inchoavit. Noſtrum inprimis eſt amplificare Matheſeos ſtudium, nunquam ſatis commendandum, nunquam pro dignitate deprædicandum. Nihil igitur omittendum, quod huc quomodocunque facit. Alienam felicitatem qui noſtram exiſtimamus, id unice intendimus, ut dicamus, ut ſcribamus, quæ proſunt aliis. Quamobrem nec quicquam magis in votis habemus, quam ut omnes, qui ad Matheſin addiſcendam animum appellunt, participes fiant ejus fructus, qui ex ſtudio mathematico percipi poteſt.

COM-

COMMENTATIO
DE
STUDIO MATHESEOS
RECTE INSTITUENDO.

CAPUT. I.
DE
Diverſis cognitionis gradibus & quomodo iidem acquirantur.

§. 1.

TRes dantur gradus cognitionis humanæ in omni veritatis genere, quos recto facultatum cognoſcendi uſu acquirere licet. Aut enim in eo acquieſcimus, quod veritatem ab aliis propoſitam intelligamus, aut ulterius progreſſi id agimus, ut ejusdem etiam convincamur, aut denique operam damus, ut ex iis, quæ cognovimus, alia adhuc nobis incognita proprio Marte eruere valeamus.

§. 2. Primus gradus acquiſitu omnium facillimus & a ceteris præſupponitur: neque enim veritatis niſi intellectæ convincitur animus, ſive eum a priori, ſive a poſteriori convincere volueris, multo minus autem ex iis, quæ cognoviſti, alia incognita deducere potueris, niſi ea, quæ cognoviſti, ſatis intellexeris. Gradus ſecundus difficilius comparatur primo, cum multo ampliorem requirat facultatum uſum, nec ad tertium adſpirandum, niſi ubi ad ſecundum aſcenderis. Tertium denique omnium difficillime conſequi licet, cum ampliſſimum omnium exigat facultatum uſum. Qui in Logica & Pſycho-

logia satis fuerint versati veritatem dictorum abunde perspicient: ceteris satisfaciet experientia domestica, ubi diversis hisce gradibus acquirendis non sine successu operam dederint. Elucescet quoque quodammodo veritas ex iis, quæ mox de illis uberius dicentur.

§. 3. Cognitionem gradus primi acquisiturus, definitiones, theoremata & problematum resolutiones sibi perspecta reddere tenetur, omissis demonstrationibus. Cognitionis secundi gradus compos futurus addere debet demonstrationes. Ad cognitionnm tandem tertii gradus perventurus, in rem præsentem veniat necesse est, & ex iis, quæ ipsi cognita & perspecta sunt, acquisito cum secundo gradu facultatum usu eruere studeat opus est sibi nondum nota: quod quomodo fiat, postac inindgitabimus, quantum præsentis instituti ratio permittit. Neque enim nobis jam propositum est explicare Artem inveniendi, quæ legitimum facultatum usum in eliciendis incognitis ex cognitis distincte docet.

§. 4. Theoremata & problemata eorumque resolutiones non intelliguntur nisi per definitiones terminorum, qui in iisdem occurrunt. Incipiendum igitur est a definitionibus, quæ ideo propositionibus præmittuntur, vel omnes simul, quemadmodum in Arithmetica & Geometria fecimus; vel eo saltem loco, ubi occurrunt propositiones, quæ per eas intelligendæ, quemadmodnm in reliquis Matheseos partibus non sine ratione factum esse apparet.

§. 5. Ad definitiones intelligendas afferenda est attentio, sub initium præsertim molesta, adeoque omni modo excitanda & fovenda. Conducit huc, si definitiones exemplis, veluti in Arithmetica numeris illustrentur, & in Geometria ad figuram oculis præsentem applicentur. Ita enim facilius intelliguntur, ut molestia vanescat, quæ attentionis conservandæ difficultatem parit. Ita definitio similitudinis illustratur exemplis duorum horologiorum, & duorum ædificiorum, quæ in scholio definitioni adjecto in medium attulimus (§. 27. *Arith.*). Definitionem partis aliquotæ illustramus exemplo lineæ in quatuor partes æquales divisæ, cum

enim

en m pars una quater sumta line m integram adæquet, erit ea pars aliquota (§. 30. *Arithm.*). Ita in ipsa Arithmetica definitionem numeri quadrati & radicis quadratæ numeris adjectis illustravimus, ut tali exemplo non sit opus. Cum definitiones in Geometria retulerimus ad figuras; me tacente apparet, quomodo ad eas applicari possint, veluti dicendo in definitione trianguli æquilateri (§. 88. *Geom.*), quod sit AB=BC=CA (*Tab. I. Fig.* 16), perinde ac si ratiocinio ostendi deberet, figuram, quæ oculis subjicitur, esse triangulum æquicrurum. Sensus nimirum aut imaginatio, quæ sensu antea percepta denuo præsentia sistit, attentionem in objectum trahit, cujus idea exhibet, quæ in definitione continentur: quo ipso & attentio excitatur & conservatur, cumque definitionem a nobis intelligi nobis jam conscii simus, molestia evanescit, quam termini non satis intellecti primum nobis objiciebat, immo in voluptatem abit, quæ ardorem dicendi accendit & inflammat, prout casus tulerit.

§. 6. Definitiones eo ordine collocantur, ut termini in anterioribus jam fuerint definiti, qui datam ingrediuntur. Ex. gr. Commensurabilia definiuntur, quod partem aliquotam communem habent, vel eorum unum sit pars aliquota alterius (§. 31. *Arithm.*). Pars vero aliquota jam fuit definita (§. 30. *Arith.*), immo pars in genere (§. 9. *Arith.*). Similiter Quadratum definitur per figuram quadrilateram, æquilateram, rectangulam (§. 98. *Geom.*). Sed figura jam ante (§. 34. *Geom*), figura quadrilatera (§. 97. *Geom.*), figura æquilatera (§. 88. *Geom.*), figura rectangula (§. 97. *Geom.*) fuit definita. Unde consequitur, definitiones legendas esse eo ordine, quo in singulis disciplinis numerantur, & definitiones terminorum esse repetendas, qui datam ingrediuntur. Ita nimirum obtinetur, ut quælibet earum penitus intelligatur, & animo ingenerentur notiones adæquatæ, in quibus nihil latet obscuri, ut intellectus plena luce perfruatur. E. gr. ubi definitionem commensurabilium expendere volueris, illustranda primum est exemplis (§. 5.), utrumque ejus casum re-

repræsentando in numeris atque lineis. Ad exempla tam arithmetica, quam geometrica applicanda est definitio, ita ut primum contentus sis notionibus confusis, quas conspectus numerorum & figurarum suggerit. Deinde applicandæ ad eadem exempla sunt definitiones partis & partis aliquotæ, ita enim futurum, ut definitionem commensurabilium in utroque quantitatum genere penitus intelligas, nec quicquam relinquatur obscuri, ubi eadem industria in definitionibus anterioribus fueris versatus. Sint Ex. gr. duo numeri 3 & 12. Quoniam 3. sive ternarius quater sumtus numerum 12 sive duodenarium adæquat, erit ille hujus pars aliquota (§. 30. *Arithm.*); adeoque numerus unus est pars aliquota alterius. Numeri igitur hi 3 & 12 commensurabiles sunt. Et quoniam 3, 3, 3 & 3 simul conficiunt unum numerum, nempe 12 sive duodenarium, adeoque idem sunt cum duodenario, 12 est totum, 3, 3, 3 & 3 sunt ejus partes, consequenter 3 pars una (§. 9. *Arith.*). Similiter sint duo numeri alii 6 & 8, quorum primus componitur ex 2, 2, & 2, seu binario ter sumto, alter ex 2, 2, 2 & 2 seu binario quater sumto. Habent igitur partem aliquotam communem 2 (§. 30 *Arithm.*), adeoque commensurabiles sunt. Et quia 2, 2 & 2 simul sumti idem sunt cum 6, & 2, 2, 2 & 2 simul sumti idem cum 8; in genere etiam patet, esse 2 sive binarium partem ipsorum 6 & 8 (§. 9. *Arithm.*), adeoque communem. Idem etiam in lineis repræsentatur, si linea AB quater transferatur in CD, ita ut sit CE = EF = FD = AB. Erit enim AB pars aliquota ipsius CD (§. 30 *Arithm.*). Unde lineæ AB & CD commensurabiles sunt, & CE = AB intelligitur pars ipsius CD (§. 9. *Arithm.*). Eodem modo patet casus alter, si recta AB concipitur divisa in tres partes æquales, ut sit AC = CD = DB, & EF in quatuor partes æquales EG, GH, HI & IF, ut sit EG = GH = HI = IF ac præterea EG = AC. Erit enim AC pars aliquota communis (§. 30 *Arithm.*), & eadem AC pars utriusque lineæ AB & EF intelligitur, quia AC + CD + DB & recta AB, itemque EG + GH + HI + IF & recta

Tab. I. Fig. 1.

Tab. I. Fig. 2.

recta EF sunt una eademque linea (§. 9. *Arithm.*). Unde lineas AB & EF commensurabiles esse liquet.

§. 7. Ne evidentiæ quid desit, probe observandum est, intellectum lucem fœnerari debere a sensu, quatenus huic obvia sunt, quæ ille concipere debet ut, dum sensus suo munere fungitur, intellectus suo veluti sponte fungatur itidem suo, atque ad cooperandum leniter trahatur, quatenus fieri nequit, ut operationes intellectus cessent, dum sensus facit quod suum est, & attentione in hunc conversa illarum ne quidem conscius esse videaris, operationibus intellectum cum sensuum actionibus perceptione confusa in unum confusis. Eo ipso obtinetur, ut ad rectum intellectus seu facultatis cognoscendi superioris usum adducaris, dum sensu tantummodo, concurrentibus ceteris sua veluti sponte facultatibus cognoscendi inferioribus, imaginatione scilicet atque memoria, tibi uti videris: id quod mirifice conducit tyronibus, ut usui intellectus recto absque ulla molestia adsuefiant. Tyrones enim non adsueti sunt nisi sensuum, imaginationis atque memoriæ usui, quatenus is hasce indivulsas comites habet. Eum vero, qui requiritur, intellectus usum hactenus non fecerunt. Quamobrem molestum accidit, si a sensu ad operationes intellectus per saltum adducantur.

§. 8. Quamvis adeo levia ac puerilia videantur, quæ de definitionibus rite expendendis inculcavimus (§. 6), ut eædem penitus intelligantur & notiones adæquatæ ab omni obscuritate liberatæ animo insinuentur; principiorum tamen psychologicorum gnarus, quæ in Psychologia præsertim empirica explicavimus ex indubia experientia derivata, profunditatem in obviis non sine voluptate deprehendet. Et ubi attenta mente perlegerit, quæ de usu facultatum in parte altera Philosophiæ practicæ universalis ad recte vivendum requisito demonstravimus, fructum inde sperandum facile prævidebit: qui quod quantivis pretii sit, in dubium minime revocabit. Qui vero Logicam nostram perlustravit & inprimis sibi cognitum atque perspectum reddidit, quod de

praxi ejus docetur; is abunde intelliget quam necessarius sit hic intellectus usus, de quo in præsenti nobis sermo est. Quodsi ergo in Philosophia veriori hospites contemnant, quæ nos maximi facimus, & ambages inutiles pronuncient, per quas incedere volumus animum ad Mathemata discenda appellentes; ii haud ægre ferant contradictionem, cum nos æquo animo, non indignabundo feramus contemtum.

§. 9. Quamobrem non piget exemplo etiam geometrico docere, quomodo in perpendendis definitionibus sit procedendum. Sumamus v. gr. definitionem rhombi, quem difinimus (§. 99. *Geom.*), quod sit figura quadrilatera, æquilatera, obliquangula. Ut cum idea rhombi notio

Tab. I. Fig. 3. distincta animo insinuetur, nec quicquam in ea relinquatur obscuri; oculos convertamus necesse est in figuram LMNO. Numerentur latera LM, MN, NO & LO, quæ numero quatuor deprehenduntur, unde liquet figuram hanc esse quadrilateram (§. 97. *Geom.*). Circino capiatur intervallum LM, idemque successive transferatur ex M in N, ex N in O atque ex O in L. quo ipso patet, latera omnia esse inter se æqualia, atque hinc colligitur, figuram hanc esse æquilateram (§ 88. *Geom.*). Contemplemur jam angulos L, M, N & O, quos obliquos esse patet (§. 66. *Geom.*): unde infertur, figuram eandem esse obliquangulam (97 *Geom.*). Sola attentio ad ea, quæ oculis usurpamus, omnem ex idea rhombi arcet obscuritatem, nec quicquam in notione distincta relinquit obscuri, quo minus penitus intelligatur. Quodsi definitiones anteriores, in quas definitio rhombi resolvitur, rite applices; iis suppositis familiaribus notio evadit adæquata.

§. 10. Non ignoro in figuris non requiri veritatem, sed sufficere ea sumi, quæ per definitionem inesse debent, ut definitio intelligatur. Neque enim demonstrandum esse, quod in nostro exemplo figura LMNO sit rhombus; sed docendum potius, qualis esse debeat, ut rhombus dici possit, ubi non intenditur, nisi ut definitio intelligatur. Ita in casu nostro sufficit dicere, si figura esse debeat rhombus, requiri ut latera LM, MN, NO & LO, quibus

bus terminatur, sint numero quatuor, ut sit LM=MN=NO=LO, seu ut latera hæc singula sint inter se æqualia, ut denique anguli L, M, N & O sint obliqui. Hoc pacto enim constat, quænam figuræ cuidam datæ inesse debeant, ut rhombi nomen eidem tribui possit: id quod sufficit ad definitionem intelligendam. Et ubi hæc noveris atque memoriæ mandaveris, verendum non est, ne rhombum appelles figuram tibi obviam, quæ hoc nomen non meretur: quo sane fine definitio præmittitur. Immo patet, quænam de rhombo sumenda sint, aut sumere liceat, ubi alia de eodem demonstranda, quando ex definitione rhombi deducere volueris, quæ eidem conveniunt: quem alterum esse definitionum finem, non minus ex Logica, quam Geometrarum & recta methodo philosophantium praxi constat. Ipsa etiam definitionum nominalium natura aliud non requirere videtur, quam ut intelligatur, quænam in ea sumantur de definito, cum nondum quæratur, utrum definitio sit possibilis, nec ne; seu utrum detur istiusmodi ens, cui ea insint, quæ in definitione sumuntur; sed de eo tantum quæstio sit, qualia requiramus, ut insint, siquidem id nominis convenire debeat, seu quidnam hoc nomine insignire velimus. Enimvero cum in Mathesi non proponantur definitiones, nisi quæ veræ sunt; ubi sensuum ope operationes intellectus elicere & eorundem beneficio eidem lucem affundere atque ad rectam definitionum applicationem tyronem manuducere volueris, nil obstat, quo minus tacite supponas, quod deinceps demonstrandum, definitionibus inesse veritatem, hoc est, dari istiusmodi entia, quibus insunt, quæ in definitione nominali sumuntur. Absit itaque, ut tibi persuadeas, nos eorum, quæ in Logica docemus & in philosophando, non tantummodo in universa Mathesi sancte observamus, oblitos tradere, quæ iisdem contraria sunt. Ecquis vero adeo vesanus erit, qui reprehendat, quod utilitatis insignis gratia absque ullo præjudicio veritatis tacite sumatur, quod verum est, immo quod sumi necesse est, ubi in primo gradu cognitionis humanæ pedem sistere

ſtere, nec ulterius progredi volueris (§. 1.).

§. 11. Etſi itaque præcepta verioris Logicæ, quæ nos tradidiſſe certi ſumus, inviolabilia exſtimemus, & methodi adeo ſimus tenaces, ut ab iis recedere nefas reputemus; tanta tamen religio minime obſtat, quo minus in favorem ejus faciamus, quod eidem promovendæ conducit. Quamobrem ut finem tam præclarum ex aſſe conſequamur, quem intendimus (§. 7.) & ſenſus omnes ferant ſuppetias intellectui, quæ ab eodem expectari poſſunt; id adhuc monendum eſſe duximus, in exemplis Arithmeticis non arbitrarium eſſe, quocunque modo numeri ſcribantur, quibus definitionem illuſtrare volueris, ſed eos potius ita ſcribendos eſſe, ut ſenſui ſubjiciantur, quæ intellectus concipere tenetur, ut omnis arceatur obſcuritas & notio evadat tam adæquata, quantum per anteriores definitiones permittitur. Dedimus in ſuperioribus exempla, quibus definitionem commenſurabilium illuſtravimus (§. 6.). Duo ſunt commenſurabilium caſus. Aut enim numerus minor eſt pars aliquota majoris, aut uterque numerus partem aliquotam communem habet (§. 31. *Arith.*). Exemplum caſus primi præbent numeri 3 & 12, quorum prior quater ſumtus poſteriori fit æqualis. Repreſentandus igitur eſt ternarius tanquam pars duodenarii definitioni partis convenienter (§. 9. *Arithm.*) & tanquam pars aliquota ejusdem definitioni partis aliquotæ conformiter (§. 30. *Arithm.*). Quamobrem non ſufficit, duodenarium ſive 12 reſolvere in 3, 3, 3, & 3, ſed ipſis etiam oculis quaſi ſpectandum exhiberi debet, quod ternarius ſit pars duodenarii & hic conſideretur tanquam pars aliquota ejusdem, quatenus ea oculis uſurpare licet, quæ definitiones partis atque partis aliquotæ tamquam notas continent. Exhibetur autem 3 tanquam pars ternarii, ſi ſcribatur 3 + 3 + 3 + 3 12; etenim ſignum + oſtendit quatuor iſtos ternarios ſimul ſumtos conſtituere duodenarium, ſeu numerum, qui idem eſt cum duodenario. Unde unus intelligitur pars duodenarii (§. 9. *Arithm.*). Et dum appatet, eundem numerum 3 aliquoties, nimi-

nimirum quater repetitum, numerum 12 adæquare, illum hujus partem aliquotam esse perspicitur (§. 30 *Arithm.*). Nimirum hoc modo ipsis oculis exhibetur, quod plura, scilicet 3, 3, 3 & 3 sint idem cum uno, scilicet 12, & pars una 3 aliquoties, scilicet hic quater sumta, adæquet totum, quemadmodum voluut definitiones partis atque totius & partis aliquotæ. Sola igitur hac scriptione in conspectum adducuntur, quæ in oculos per se minime incurrunt & definitiones partis atque totius & partis aliquotæ instar rei visibilis exhibentur. Dum vero ternarius sive 3 etiam solitarie scribitur, juxta duodenarium in partes suas aliquotas resolutum, quemadmodum hic factum esse apparet

$$3 \qquad 3+3+3+3=12,$$

tum ipsis oculis exhibentur 3 & 12 tanquam duo numeri, qui ad se invicem referuntur, & primus 3 repræsentatur tanquam pars aliquota alterius 12, ut nihil insit in definitione commensurabilium quoad casum primum, quod non pateat conspectui. Immo hac ipsa scriptione non minus manifestum est, quomodo dato quocunque numero prodeat alius ipsi commensurabilis, nimirum si numerus quidam semel positus, deinceps ponatur aliquoties, quoties nempe visum fuerit, & iterato positi sumantur simul tanquam unum: id quod clarius perspicitur, si duo vel tria exempla sibi invicem subscribantur, quamadmodum hic factum vides.

3	3+3=6
3	3+3+3=9
3	3+3+3+3=12
&c.	&c. in infinitum.

Ad illustrandum casum alterum, qui in definitione commensurabilium continetur, adduximus exemplum numerorum 6 & 8, qui partem aliquotam communem 2 habent. Quodsi ergo singula ut ante repræsentare volueris, numeri ita scribendi sunt

$$2+2+2=6 \qquad 2+2+2+2=8$$
$$2+2+2+2+2=10 \qquad 2+2+2+2+2+2+2=14$$

&c.	&c.
in infinitum	in infinitum

Ita nimirum etiam conspicitur, quomodo numeri commensurabiles in altero casu procreentur, nimi-

nimirum si idem quicunque numerus, veluti hic 2, ponitur toties, quoties libuerit, veluti hic ter, quinquies &c. & deinceps adhuc pluries, veluti hic quater, septies &c. ac iterato positi sumantur simul tanquam unum. Hoc pacto definitio commensurabilium nominalis reducitur ad geneticam, adeoque realem: id quod multiplicem habet usum. Quodsi numeris subjiciantur lineæ in tot partes æquales divisæ, quoties idem numerus repetitur ad constituendum numerum eundem, in continuo jam magis claret, quænam sit vis signi +, quo indigitatur plura coalescere in unum, ut unum sit idem cum multis, quemadmodum vult definitio partium atque totius (§. 9. *Arithm.*).

§. 12. Quoniam in definitionibus partis atque totius relativis, quarum una absque altera intelligi nequit, diversa utique sunt pluralitas eorum, quæ ad totum constituendum concurrunt, plurium concretio, qua fit unum, seu totum constituitur, & inde resultans identitas plurium cum uno, adeoque ubi definitionem penitus intelligere volueris, notionem distinctam formaturus opus habes totidem actibus intellectus, quibus pars & totum concipitur, quot definitioni diversa nsunt tanquam totidem notæ. Siquidem sensus suppetias ferre debet intellectui, singulis intellectus operationibus respondere debent singuli actus externi, qui in sensus incurrunt & illas individuas comites habent: id quod in dato casu obtinetur, si numeri, quibus simul sumtis efficitur totum, primum scribantur juxta se invicem absque ullo signo interposito, deinde autem signum + interponatur, tandemque iisdem hoc signo inter se connexis adjiciatur signum æqualitatis = cum nota numerica, qua indigitatur numerus ex iisdem coalescens, veluti in exemplo primo 12, qui ex 3, 3, 3 & 3 in unum coalescentibus resultat. Hac enim successiva scriptione eo, quem diximus, ordine facta actu scriptionis primo determinatur intellectus ad concipiendam pluralitatem ad totum constituendum concurrentium, actu secundo exhibetur concretio in unum, quam cogi-

cogitare tenemur, & tertio denique repræsentatur plurium cum uno identitas, in quam aciem mentis intendi necesse est. Hoc pacto efficitur, ut nihil sit in intellectu, quod non etiam sit in sensu, & sensus intellectum blande trahit ad cooperandum, dum operationes intellectus per actus in sensum incurrentes determinantur, adeoque cum actibus sensus una ponuntur, modo animo præsens sis attentione allata ad singula, quæ fiunt. Quodsi ergo in illustrandis definitionibus eam, quam monstramus, viam ingredi volueris; sensus suppetias omnes ferent intellectui, quas ab eo expectare licet.

§. 13. Simile quid obtinet in exemplis geometricis, si singulas determinationes, quæ definitionem ingrediuntur, ita scribere volueris, ut ad figuram oculis subjectam referantur signa, quibus repræsentatur. Dedimus in superioribus exemplum rhombi, qui per definitionem est figura quadrilatera, æquilatera, obliquangula. Quamobrem si scribas, quemadmodum hic factum esse vides,

Tab. I. Fig. 3.

LM+MN+NO+LO=4
LM=MN=NO=LO
L, M, N, O } angulus obliquus

LMNO rhombus;

ipsi sensui obvium est, quomodo ex determinationibus definitionem ingredientibus, seu notis in eadem contentis colligatur, figuram datam esse rhombum. Etenim LM+MN+NO+LO=4 indigitat, figuram datam LMNO quatuor habere latera, adeoque æquilateram esse; LM=MN=NO=LO significat, latera omnia esse inter se æqualia, consequenter figuram datam LMNO esse æquilateram: denique

L, M, N, O } angulus obliquus

indigitat singulos figuræ datæ LMNO angulos esse obliquos, consequenter figuram ipsam obliquangulam. Linea his subducta signum est, quo indigitatur, id quod eidem subscribitur, inde inferri, seu per supra scripta de-

terminari, nimirum quod figura oculis subjecta LM NO sit rhombus. Evidens adeo est, ad quænam successive promovenda sit attentio, ubi rhombum agnoscere atque ab aliis figuris distinguere volueris. Hoc pacto sensus distinguit, quæ intellectus distinguere tenetur, dum distincte rhombum concipit.

§. 14. Repræsentatio definitionum symbolica, qua oculis conspicienda exhibentur, quæ ab intellectu concipiuntur, eo quidem ordine, quo operationes intellectus eliciuntur, convenit regulis artis characteristicæ, cujus theoria hactenus desiderata partem quandam artis inveniendi absolvit, propterea quod in inveniendo usum multiplicem habet, quemadmodum suo tempore ostendemus, ubi philosophia ad umbilicnm perducta artem inveniendi ad eam formam redigemus, qua Logicam exhibuimus. Major enim est artis characteristicæ usus, quam vulgo creditur, ut adeo consultum sit, quasi aliud agendo mature eidem adsuescere. Non loquimur nisi experta, & quæ ex ipsa animæ humanæ natura a priori demonstrare valemus, etsi a præsenti loco alienum sit ipsas demonstrationes afferri ex principiis nostris psychologicis haud difficulter contexendas, sed arti inveniendi reservandas.

§. 15. Unicum est, quod hic monuisse sufficiat, silentio minime preterundem, scilicet quod ista definitionum symbolica repræsentatio mirifice conducat ad facilitandam repetitionem, qua eædem memoriæ absque ulla molestia & mora infiguntur & memoria retinentur. Distincte nimirum oculis exhibentur, quæ intellectus distinguere tenetur in definito sibi repræsentando, & eo ordine, quo actus intellectus sese invicem excipere debent. Cognitio non modo symbolica ad intuitivam reducitur, sed ipsa etiam symbolica intuitivæ assimilatur. Nemo autem est qui nesciat, sensu percepta facilius & tenacius memoria retineri, quam quæ sola vi intellectus concipiuntur. Et convenit omnino omnem facere facultatum usum, qui natura nobis concessus est, ac mature adsuefieri juvat, ut eundem ubivis constanter faciamus. Quamobrem & nos per studium mathe-

mathematicum plura intendimus, quam ut Mathesis sibi sola discatur, quemadmodum faciunt illi, qui contenti sunt ea, quæ docentur in Mathesi, cognita atque perspecta sibi habere.

§. 16. Erit forsan acutior, qui reprehendet, quod in illustrandis definitionibus in methodi leges injurii simus, quod in illustrandis definitionibus anterioribus præsupponamus, quæ demum per sequentes patent. Objiciet v. gr. nos in symbolica partis aliquotæ repræsentatione, veluti quod $3+3+3+3=12$, supponere, quod perspectæ sint notæ numericæ, quod notum sit signum additionis, quod ipsam additionis notionem habeamus, cum tamen definitio partis aliquotæ præcedat (§. 30. *Arithm.*), definitio additionis demum sequatur (§. 61. *Arith.*) & notæ numericæ in sequentibus demum (§. 49. *Arithm.*) cum signo additionis (§. 63. *Arithm.*) explicentur. Immo forsan arguet ipsam additionem præsupponi, quæ demum docetur multo post (§. 96. *Arith.*). Enimvero quicquid est hujus difficultatis, id protinus omne evanescit, modo attentionem nostram desiderari non patiamur. Etenim nemo ad studium Matheseos, præsertim ad legenda Arithmeticæ nostra Elementa Latina, accedit adeo rudis, ut notæ numericæ nondum ipsi sint perspectæ, & numerare nesciat. Neque lex numerandi & notæ numericæ explicantur eo fine, ut numerare discamus & notas numericas cognoscamus; sed ut appareat, cur ea numerandi lex sanciatur & cur notis istis utamur, cum etiam quia hypothesibus istis opus habemus tanquam principiis ad demonstrandum ea, quæ sequuntur. Signum additionis quodnam sit, anticipando doceri potest, ubi ejus usus requiritur. Neque hic opus est, ut notio additionis una explicetur: sufficit enim moneri, hoc signo indigitari, numeros simul sumi debere, ut constituatur per eos unus. Multo minus autem præsupponenda est additio, cum nemo numerandi peritus nesciat, quomodo numeros exiguos sive digitos in unitates, siquidem opus est, resolutos connumerare debeat. Accedit, quod nemo facile ad Matheseos studium,

dium, præſertim ad Elementa noſtra Latina legenda ſeſe conferat, qui Algorithmum numerorum integrorum, ſaltem additionem & ſubtractionem, non didicerit. Abunde igitur patet, non præſupponi quæ nondum cognita ſunt, ſed ex inferius traditis demum haurienda, in definitionibus illuſtrandis.

§. 17. Propoſitiones, ſive theoremata fuerint, ſive problemata, primum exponuntur, dum in Arithmetica ad numeros, in Geometria ad figuras delineatas applicantur: id quod ἔκθεσιν, ſive expoſitionem appellarunt veteres, quam propoſitionibus ſubjecerunt. Sit ex. gr. Theorema 21 Arithmeticæ (§. 181.) exponendum, quod ita ſeſe habet. Si quantitates quaſcunque per eandem tertiam dividas; quoti ſunt inter ſe ut quantitates, quæ dividuntur. Theorematis hujus expoſitio hæc eſt: ſint duo numeri 24 & qui dividuntur, per eundem tertium 3; erunt quoti 8 & 4. Dico eſſe 8 ad 4 ut 24. ad 12, Continet enim 8 bis 4, & 24 itidem bis 12, adeoque numeri proportionales ſunt (§. 155. *Arithm.*). Similiter ſit pars prima theorematis 37 in Geometria (§. 233) exponenda, quæ ita ſe habet: Si duas lineas parallelas ſecet tranſverſa, erunt anguli alterni æquales. Expoſitio talis eſt: ſint AB & CD duæ lineæ rectæ, ſitque AB parallela ipſi CD; erunt anguli *y* & *u* alterni (§. 68. *Geom.*). Dico angulum *y* eſſe æqualem angulo *u*. Eodem modo exponuntur problemata. Sit ex. gr. problema 20 Geometriæ (§. 258) cujus hic eſt tenor: Per datum punctum parallelam rectæ datæ ducere. Expoſitio hæc erit: ſit data linea recta RS, ſitque datum punctum V ubicunque extra eandem lineam. Ducenda eſt recta quædam alia, quæ tranſit per punctum V, ſitque rectæ alteri RS parallela.

Tab. I. Fig. 4.

Tab. I. Fig. 5.

§. 18. Nos brevitatis gratia in Arithmetica theoremata ita enunciavimus, ut expoſitionem una contineant, dum quantitates deſignavimus literis majoribus, tanquam numeros indeterminatos (§. 13. *Arithm.*), in quorum locum facile ſurrogantur numeri determinati notis numericis expreſſi, quales etiam hinc inde exhibemus ad latus demonſtrationis. Ita theorema

21,

21, de quo modo diximus (§. 17.), hoc modo proponitur (§. 181. *Arithm.*). Si quantitates quascunque A & B per eandem tertiam C dividas, quoti F & G sunt inter se ut A & B. Constat ex paragrapho præcedente theorema hoc pure sic enunciari: si duas quantitates quascunque per eandem tertiam dividas, quoti per divisionem prodeuntes erunt inter se, ut quantitates, quæ dividuntur. Atque adeo liquet, literas majores A, B, C, F, G nonnisi expositionis gratia esse adjectas, quæ ita sese habet: Sint duæ quantitates quæcunque A & B, dividatur quantitas A per quantitatem C, & prodeat quotus F, Dividatur etiam quantitas B per eandem quantitatem C, & prodeat quotus G. Dico esse quotum F ad quotum G ut quantitatem A ad quantitatem B. Quodsi jam pro literis substituantur numeri; nimirum 24 pro A, 12 pro B, 3 pro C, 8 pro F & denique 4 pro G; habebis expositionem in numeris, quam ante dedimus (§. 17).

§. 19. Similiter in Geometria propositiones retulimus ad figuras [illegible] incisas, ut expositionem una contineant. Ita theorematis 37 pars prima, quam exempli loco adduximus (§. 17), hoc modo proponitur in Geometria (§. 233.). Si duas parallelas AB & CD secet transversa EF in G & H, erunt anguli alterni *y* & *u* æquales. Tab. I. Fig. 1. Quodsi literas omittas, habebis theorema pure enunciatum. Ubi vero oculis in figuram iisdem subjectam convertens idem ad eandem applices, adhibitis literis, quibus lineæ & anguli in schemate designantur, quemadmodum paulo ante factum est (§. 17); habebis expositionem. Similiter problema 20 (§. 258. *Geom*) ita enunciatur: Per datum punctum V parallelam rectæ RS ducere. Omissis literis V & RS prodit propositio pure enunciata; quæ ad schema applicata, ut ante fecimus (§. 17), dat expositionem.

§. 20. Veteres Geometræ propositionem ab expositione tanquam duo diversa a se invicem distinxerunt, atque adeo illam pure enunciarunt, hanc eidem subjecerunt. Hunc morem secutus est *Clavius* in Elementis *Euclidis*. Nos expositionem cum propositione conjunximus, non

non quod in unum confundi velimus, quæ diversa sunt; quam ut brevitatis gratia, quemadmodum jam monuimus (§. 18. 19.), una exhiberemus, quæ a lectore separanda sunt, ne in nimiam molem excresceret opus ac præter necessitatem evaderet sumtuosius.

§. 21. Necesse autem est propositionem pure enunciari, remotis iis, quæ ad expositionem spectant, cum pure enunciata in usum futurum memoriæ sit mandanda, expositio autem adhibenda, ut claritas affundatur notioni complexæ, quæ propositioni respondet, sine qua intelligi nequit, aut saltem non satis intelligitur, quemadmodum nil videmus absque lumine, aut absque lumine sufficiente non satis clare videmus visibile. Non tamen opus est expositionem una memoriæ mandari, cum in applicatione ratiocinando facta ejus nullam habeamus rationem, sed sufficiat propositioni per expositionem satis intellectæ adhærere per naturam animæ sensum claritatis, quatenus fieri potest, ut expositionem addamus, quando exigitur, vel e re esse videtur, qua actu affunditur claritas, cujus dum nunc obscure percipitur, antea clare perceptæ memoriam habemus.

§.22 Resolutiones problematum arithmeticæ ad exempla, geometricæ ad figurarum constructiones statim sunt transferendæ. Singula, quæ fieri præcipiuntur, suis numeris distinximus. Numerantur autem eo ordine singula, quo fieri debent. Quamobrem cum quælibet resolutio tot contineat regulas, quot sunt numeri; lecta prima statim faciendum, quod eadem præcipitur, & progressus ordine fieri debet ad sequentes. Ita nimirum absque ullo negotio facies, quod fuerat faciendum, & dum hoc facis regulis affundetur claritas, quæ ad totam resolutionem intelligendam sufficit. Quoniam vero in resolutionibus problematum sequentium præcipiuntur, quæ quomodo fieri debeant, docetur in anterioribus; igitur necesse est, ut eo ordine problematum resolutiones tibi familiares reddas, quo numerantur, ne facturus ea, quæ præcipiuntur, incidas in talia, quæ modo fieri debeant nondum nosti, nec unquam antea fecisti.

Non

Non eſt, quod excipias, citari in reſolutionibus ea, quæ ex anterioribus præſupponuntur, veluti in reſolutione problematis de linea alteri parallela per datum punctum ducenda prima, quod paulo ante exempli loco adduximus (§. 19), problema 17 (§. 216. *Geom.*) de linea perpendiculari ex dato puncto in eam demittenda & problema 16 (§. 212. *Geom.*) de linea perpendiculari ex dato in linea data puncto ad eandem erigenda: ita enim labor multiplicatus difficilis redditur & moleſtiam parit, quæ ſublata difficultate prorſus nulla eſt, ubi jam noveris, quomodo ex puncto dato ad lineam datam perpendicularis ſit demittenda & ex puncto in eadem dato perpendicularis excitanda, ac utrumque facere valeas.

§. 23. Quoniam vero non ſufficit problematum reſolutiones intelligere, verum etiam habitus comparandus eſt ea faciendi, quæ fieri debent, habitus autem omnis nonniſi exercitio, adeoque idem iterato agendo comporatur; a problemate uno non progrediendum ad alterum, niſi ubi ea, quæ in reſolutione præcipiuntur, prompte facere potueris. Hoc enim pacto nullam ſenties in difficilioribus difficultatem, nec verendum eſt, ne moleſtia faſtidium creet, nec progreſſus deſtituetur voluptate individua comite, quæ ardorem continuo progrediendi ulterius accendit, alit & auget. Merentur ea, quæ hic dicuntur, attentionem, hoc enim modo acquiruntur ſingulares animi dotes ad præclara nitenti mirifice profuturæ. Sed de his dicemus nonnulla in ſequentibus.

§. 24. Enimvero ſi quis omnem uſum Matheſeos facere velit, quem poteſt, eumque magis præclarum, quam qui in cognitione veritatum mathematicarum conſiſtit, in iis perſiſtere non debet, quæ hactenus docuimus. Superſunt alia adhuc obſervanda, de quibus ut dicamus, inſtituti noſtri ratio poſtulat. Nimirum primum in ſymbolica repræſentatione theorematis, ſicuti in repræſentatione definitionum (§. 11.), non perinde eſt, quocunque modo id fiat, ſed id omnino agendum

eſt, ut ſenſui tanquam diverſa exhibeantur, quæ intellectus a ſe invicem diſtinguere tenetur, & ut ſingula ipſa ſcriptione a ſe invicem diſtinguantur, quæ in notione propoſitioni reſpondente diſtinguenda veniunt. Omne theorema in duas reſolvitur partes, hypotheſin atque theſin, quarum iſta exhibentur, quæ de ſubjecto ſumuntur, hac vero exhibetur prædicatum, quod vi illorum, quæ ſumuntur, de eodem enunciandum, ſeu propter ea, quæ ſumuntur, ponendum. In ſymbolica igitur repræſentatione theorematis hypotheſis ſcribenda eſt a ſiniſtra, theſis vero a dextra. Quodſi hypotheſis plura continet, ſingula, quæ ſumuntur, ſigillatim ſcribi, & eo, quo ſequuntur, ordine ſibi invicem ſubſcribi debent, ita ut ipſa ſcriptione exprimantur eorum ad ſe invicem relationes, quæ ſupponuntur. Et idem obſervandum eſt in theſi, ſiquidem plura continet. Exemplis manifeſtum reddetur, quod obſcurius dictum videri poterat, deficiente idea, a qua claritatem ſuam haurit notio. Sit exempli loco theorema, ad quod ante provocavimus (§. 18). Si duæ quantitates quæcunque per eandem tertiam dividas; quoti ſunt inter ſe ut quantitates diviſæ. Hypotheſis theorematis eſt, quod duæ dentur quantitates, quod eædem dividantur per eandem tertiam, quo facto prodeunt duo Quoti; theſis vero, quod hi ipſi quoti eam inter ſe habeant rationem, quam habent quantitates diviſæ. Quodſi (quemadmodum ſupra fecimus) quantitates dividendæ exponantur per A & B, dividens per C, quoti vero per F & G, theorema ita repræſentabitur.

Hypotheſis	Theſis
A & B quantitates dividendæ	F : G = A : B.
C dividens communis.	
F & G quoti ex divis. prodeuntes	

Idem obſervandum eſt in numeris, per quos theorema exponitur.

24 & 12 Num. divid.	8 : 4 = 24 : 12
3 Diviſor commun.	
8 & 4 Quoti ex div. prodeuntes.	

Immo

immo si ab expressione generali obscuritatem arcere volueris, quæ per naturam suam eidem inhæret, non tollendam nisi claritate, quam affundunt singularia; numeros literis, quibus quantitates, numeri indeterminati (§. 13 *Arithm.*), designantur, subscribi oportet eo, quo hic factum esse vides, modo.

A & B Quant.		F:G=A:B
24 12 divid.		8:4=24:12
C Dividens		
3 comm.		
F & G Quoti ex		
8 4 div. prod.		

Quodsi meris signis repræsentatio symbolica theorematis constare debeat; hoc modo quod intendis assequeris.

A (F 24 (8 F:G=A:B
C 3
B (G 12 (4 8:4=24:12
C 3

Idem fiet hoc modo:

$\frac{A}{C}=F$ $\frac{24}{3}=8$ F:G=A:B

$\frac{B}{C}=G$ $\frac{12}{3}=4$ 8:4=24:12

§. 25. Demus etiam exemplum unum alterumve geometricum. Theorema 37 (§. 233. *Geom.*) hoc est: Si duas parallelas secet transversa, qui prodeunt 1. anguli alterni æquales sunt, 2. angulus externus æquatur interno opposito, 3. duo interni oppositi sunt æquales duobus rectis. Hypothesis hæc est, quod duæ lineæ sint parallelæ, & quod eædem secentur linea alia transversa: Thesis autem, quod anguli alterni sint æquales, quod angulus oppositus externus æquetur interno opposito, quod denique duo oppositi interni sint æquales duobus rectis. Illa adeo duas habet partes, quæ junctim sumtæ eandem constituunt; hæc autem tria membra, quæ singula ex eadem hypothesi sequuntur, ita ut propositio sit composita ex tribus eandem hypothesin habentibus, & ad tres hasce categoricas revocetur: 1. Anguli alterni intra lineas parallelas sunt æquales; 2. Angulus externus ex lineis parallelis per transversam sectis ortus æqualis est opposito interno; 3. Duo anguli intra lineas parallelas transversa sectas orti sunt æquales duobus rectis. Quodsi hoc theorema eo, quem supra diximus (§. 19), modo explices; symbolice distincte ita repræsentatur:

Tab. I. Fig. 4

Hypothesis	Thesis.
AB parall. CD	1. $y = u$
EF sec. AB & CD	2. $x = u$
in G & H	3. $l + u = 2R$.

Theorema 18. (§. 179.) pure ita enunciatur: Si in duobus triangulis fuerit angulus unus unius æqualis angulo uni alterius, & duo latera comprehendentia angulum in uno triangulo fuerint sigillatim æqualia duobus lateribus comprehendentibus angulum in altero triangulo; erit etiam latus tertium unius æquale lateri tertio alterius, & duo ad idem anguli reliqui in uno erunt sigillatim æquales duobus ad idem angulis reliquis in altero triangulo, tota triangula æqualia & similia erunt. Hypothesis hæc est, accedente expositione, quod in duobus triangulis ACB & *acb* angulus unus unius A sit æqualis angulo uni alterius *a*, quod duo latera AC & AB comprehendentia angulum A in uno triangulo sint sigillatim æqualia duobus lateribus *ac* & *ab* comprehendentibus angulum *a* in altero triangulo; thesis vero, quod 1 latus tertium BC unius sit æquale lateri tertio *bc* alterius, 2. quod angulus C in uno sit æqualis angulo *c* in altero, 3. quod angulus B in uno sit æqualis angulo *b* in altero, 4. quod triangulum ACB sit æquale & simile triangulo *acb*. Propositio adeo denuo composita est, in qua eidem subjecto sub eadem conditione tribuitur multiplex prædicatum. Quodsi theorema hoc symbolice repræsentare volueris, ita distincte exhibetur scriptum:

Tab. I. Fig. 6.

Hypothesis	Thesis.
ang. A = a	1. BC = bc
AB = ab	2. ang. C = c
AC = ac	3. B = b
	4. △ ACB ≅ △ acb

Hoc nimirum pacto distincte exhibentur singula, quæ in hypothesi sumuntur, ut sensus præsto sit in formanda notione distincta intellectui, quæ eidem respondet, nec minus distincte in sensum incurrunt singula, quæ istis positis una ponuntur: id quod egregium habet usum, sive in primo gradu cognitionis subsistere, sive ad secundum progredi volueris, quemadmodum ex deinceps dicendis plenius constabit. Quodsi ars characteristica foret satis exculta, ab omnibus vocabulis in symbolica re-

præ-

præsentatione theorematum abstinere poteramus. Quoniam tamen signorum numerus multiplicaretur, quorum usus tyronibus molestior; consultius est ut paucis simus contenti & subinde vocabulis nonnullis abbreviata scriptione locum concedamus.

Tab. I. Fig. 5. §. 26. In problematis quædam dantur, quædam fieri vel inveniri jubentur. Ita in problemate 20 (§. 258. *Geom.*), ad quod supra provocavimus (§. 19), datur recta RS, & punctum extra eam V, jubemur autem per punctum V ducere lineam rectam, quæ sit ipsi RS parallela. Quodsi ergo problema distincte concipere volueris, quæ dantur ab eo, quod quæritur, hoc est, quod vel fieri, vel inveniri jubetur distinguenda consequenter ubi problema sensui distincte repræsentare volueris, versus sinistram scribenda sunt data eo modo, quo singulæ determinationes in hypothesi theorematis exprimuntur, versus dextram vero quæsitum, quemadmodum hic factum esse apparet:

Data	*Quæsitum*
Recta AB,	Recta transiens
punctum V extra eam	per V & paral. ipsi AB.

Ita nimirum non modo quæsitum a datis separatur; verum etiam data singula distincte exhibentur non minus, quam singulæ determinationes quæsiti, consequenter si hæc figuræ subscribantur, idea singula a se invicem separata exhibet, quæ in notione problemati respondente totidem operationibus intellectus discernenda sunt, ut notio evadat distincta.

§. 27. Simile quid imitari licet in ipsa resolutione: id quod inprimis usui est, ubi ad ad gradum secundum cognitionis progredi, nec in primo acquiescere volueris. Exempli loco sit resolutio prima problematis 20. Geometriæ, cum quo nobis jam negotium est (§. 26). Ea nimirum ita repræsentatur:

VK perpendicularis ad RS.
T punctum pro arbitrio assumtum
TA perpendicularis ad RS.
TA = VK
MN per V & A transiens.

MN parallela RS.

Notandum vero in denominandis rectis præponi literam, quæ designat terminum a quo, unde ducenda est recta, quam ducere jubet resolutio, & singula fieri

debere eo ordine, quo sibi invicem subscribuntur. Ita VK indigitat, perpendicularem VK ad RS duci ex puncto V, consequenter ad rectam RS ex puncto V demitti, TA vero indicat, perpendicularem TA ad RS ducendam esse ex puncto T tanquam termino a quo. TA=VK significat, perpendicularem TA æqualem fieri debere antea ductæ VK. Denique MN per VA indicat, rectam MN ducendam esse per puncta V & A, quibus datis determinatur situs rectæ MN per superius in Geometria ostensa. Linea recta separat ea, quæ fieri præcipiuntur, ab iis determinationibus, quas quæsitum habere debet, & quæ infra lineam exhibentur, scilicet quod hic linea MN sit datæ RS parallela. Quod enim transeat per punctum V, per se manifestum est, aut si mavis per ea, quæ vi resolutionis facta sunt, attenta mente considerata. Ubi nimirum ad secundum cognitionis gradum progredi libuerit, ea, quæ ex resolutione problematis per se manifesta sunt quoad quæsitum, probe distinguenda ab iis, quæ esse dicuntur.

§. 28. Non nego, si quis idem facere velit in aliis problematis, quod hic præstitimus in uno eorum eoque haud difficili, ut facilius intelligeretur; eidem plura notanda esse, quam quæ hic docemus: sed instituti nostri ratio non fert, ut simus prolixiores. Sufficit generalem quandam ideam eorum, quæ facienda sunt, insinuasse animo lectoris. Quodsi enim hæc probe perpenderit, quæ hic inculcantur; plura suo Marte assequetur, quæ hinc inde præterea requiruntur. Et sicubi subinde cespitat, in progressu ipsemet errores a se admissos, & quæ melius fieri poterant, animadvertet. Quamobrem diutius hisce non immoramur.

§. 29. In resolutionibus numericis problematum typus calculi ad figuram relatus exhibendus est, qui problema cum resolutione distincte repræsentat & ideam operatricem animo insinuat, quæ firmior eidem inhæret, quam resolutio memoriæ mandata, ita ut hæc non tam facile te fallat. Immo si hæc eidem nondum fuerit infixa, ubi ad librum recurrendum, quando resolutione

ista

iſta in praxi opus habes, in typum ſolum exempli oculos convertere ſufficit, quod vi ideæ operatricis, quam repræſentat, totam operationem docet ac dirigit. Quoniam in ipſis Elementis noſtris exempla hoc modo exhibuimus, non opus eſt, niſi ut unum lucis affundendæ gratia huc tranſcribamus. Siſtimus adeo illud, quod ad illuſtrandum problema 13 Trigonometriæ planæ (§. 36. *Trigon.*) in medium adduximus. Problema hoc eſt: Datis duobus angulis una cum latere uni eorum oppoſito invenire latus alteri oppoſitum. Typus vero exempli problema cum reſolutione repræſentans talis eſt:

Tab. I. Fig. 6.

Data	*Quæſitum.*
$C = 48^\circ\ 35'$	BC
$A = 57^\circ\ 28'$	
$AB = 74'$	

calculus.

Log. ſin. C	9.8750142
Log. AB	1.8692317
Log. ſin. A	9.9258681
Log. AB + Log. ſin. A	11.7950998
Log. BC = Log. AB + Log. ſin. A − Log. ſin. C	1.9200856

Quodſi enim oculos in exemplum hoc modo repræſentatum convertas, ſtatim liquet dari duos angulos A & C una cum latere AB uni eorum C oppoſito & quæri latus BC, quod opponitur alteri A. Typus calculi oſtendit, ex tabulis excerpendos eſſe logarithmos ſinus anguli C, lateris AB & ſinus anguli A. Logarithmos lateris AB & ſinus anguli A addendos & a ſumma ſubtrahendum eſſe logarithmum ſinus anguli C, ut relinquatur logarithmus lateris quæſiti BC in Canone Logarithmorum evolvendus, ut pateat numerus lateri quæſito reſpondens.

§. 30. Abunde hactenus docuimus, quomodo ad gradum primum cognitionis perveniatur, ut nihil ſuperſit in notionibus obſcuri, ſed omnia penitus intelligantur. Agedum itaque! progrediamur ad ſecundum, cui acquirendo inſerviunt demonſtrationes. Quoniam ad demonſtrationem accedere non licet, niſi propoſitione rite intellecta, gradus ſecundus primum ſupponit, conſequenter quæ in antecedentibus præcepimus, ea ante fieri debent, quam

quam ad demonstrationem distincte percipiendam animum appellas. Quamobrem qui utrumque gradum una eademque opera acquirere studet, & ea observare tenetur, quæ de primo inculcavimus, & facere ea, quæ de secundo jam addemus,

§. 31. Demonstrationes ex ratiociniis contextæ sunt eo modo inter se concatenatis, quem in Logica (§. 551. & seqq.) satis perspicue explicavimus & mox uberius dicenda reddent manifestum. Ratiocinatio, tertia mentis seu intellectus operatio, involvit duas priores, primam atque secundam, notionem scilicet atque judicium, una cum usu facultatum inferiorum, sensus scilicet, imaginationis atque memoriæ, & iis animæ actibus, per quos fit transitus ab usu facultatum inferiorum ad usum superiorum, attentione nimirum atque reflexione: quæ denuo parumper attentis ad sequentia manifesta evadent, modo facultatum animæ notiones ex Psychologia habuerint perspectas. Quodsi ergo a primo cognitionis gradu ad secundum per saltum ascendere nolueris; demonstrationibus ante utendum est mechanicis, quam ad eas progrediaris, quæ vi intellectus concipiuntur, seu ejus operationibus absolvuntur.

§. 32. Quid sit demonstratio mechanica, in Lexico Mathematica docuimus. Nimirum juxta hypothesin theorematis construuntur figuræ, quo facto ea una determinantur, quæ in thesi continentur, seu vi illorum, quæ in hypothesi sumuntur de subjecto, eidem attribuuntur. Quamobrem num ea, quæ una determinantur, talia sint, ope instrumentorum examinanda. Sit exempli loco theorema 18. Geometriæ (§. 179. *Geom.*), ad quod supra provocavimus (§. 25.), scilicet si angulus unus trianguli unius sit æqualis angulo uni trianguli alterius & latera comprehendentia angulum istum in uno triangulo sint sigillatim æqualia lateribus comprehendentibus angulum in altero triangulo, quod etiam latus tertium unius trianguli sit æquale lateri tertio alterius, quod duo anguli reliqui unius sint sigillatim æquales duobus angulis alterius, quod tota triangula æqua-

æqualia & denique similia sint. Tab. I. Fig. 6. Construe triangulum ABC, prout visum fuerit, deinde ducatur recta *ab*, & ex *a* in *b* transferatur intervallum AB, in *a* excitetur angulus ipsi A æqualis, & in crus *ac* transferatur intervallum AC. Quodsi jam puncta *c* & *b* connectantur recta *bc*, prodit triangulum alterum *abc*. Jam ubi circino capis intervallum BC, & circini crus unum colloces in *b*, crus alterum attinget punctum *c*. Vides itaque latus trianguli *abc* tertium *bc* esse æquale lateri tertio BC alterius trianguli ABC. Ex punctis C, B, *c* & *b* arbitraria circini apertura, sed eadem describantur arcus, angulorum istorum mensuræ (§. 57. *Geom.*). Quodsi ope circini examines arcus ex centris C & *c*, itemque ex centris B & *b* descriptos; bini singuli deprehenduntur æquales (289 *Geom.*), atque hinc angulorum C & *c*, itemque B & *b* æqualitas colligitur (§. 141 *Geom.*). Exscindantur ex charta, in qua delineata sunt, triangula ACB & *acb*, & triangulum *acb* ponatur super altero ACB, ea quidem lege, ut punctum *a* in A & recta *ab* super AB cadat; videbis triangulum *acb* coincidere cum triangulo ACB, seu illud huic congruere (§. 3. *Geom.*). Atque ex congruentia triangula ACB & *acb* æqualia esse intelliguntur (§. 161 *Geom.*), vi notionis etiam communis: communiter enim ex congruentia æqualitatem æstimant omnes. Immo quia non minus laterum *bc* & BC, itemque angulorum *b* & B, *c* & C congruentia oculis obvia est, vi notionis etiam communis colligitur eorundem æqualitas, nempe quod sit $bc = BC$, $b = B$ & $c = C$, ita ut examinibus anterioribus ope circini factis non sit opus. Denique ubi ad animum revocas, esse $a = A$, $ab = AB$ & $ac = AC$ per hypothesin, ast $b = B$, $c = C$ & $bc = BC$ per examen, quod instituisti, cum præter angulos & latera nihil reperias in triangulis istis, per quæ a se invicem discerni possint, eadem quoque triangula *acb* & ACB similia deprehendis (§. 24. *Arithm.*). Similiter ubi theorema 37 (§. 233 *Geom.*) demonstrare volueris: Si duas parallelas secet transversa, erunt anguli alterni æquales, angulus externus æquatur interno oppo- Tab. I. Fig. 8.

sito

situ & duo interni oppositi sunt æquales duobus rectis; ducenda est 1. linea CD, deinde 2. altera AB eidem parallela, ad quamcunque distantiam, cum ea non determinetur in hypothesi, & 3. pro arbitrio recta EF, quæ oblique secat parallelam utramque in G & H. 4. Ex puncto intersectionis G ducatum arcus intra crura ipsius anguli *y* & eodem radio ex puncto intersectionis altero arcus intra crura anguli *u*, quo facto ut ante ex æqualitate mensurarum colligis æqualitatem angulorum. Quodsi 5. ex centro G eodem radio ducas arcum intra crura anguli *x*, ex æqualitate mensurarum anguli *x* & *u* colligis æqualitatem horum angulorum. Denique 6. duc etiam ex centro G eodem adhuc radio anguli *o* mensuram, videbisque mensuras angulorum *o* & *u*, quarum hæc eadem deprehenditur cum mensura anguli *x*, semicirculum complere: unde colligis eos esse duobus rectis æquales.

§. 33. Absit autem, ut tibi persuadeas, demonstrationes hasce mechanicas in locum ceterarum surrogari posse, quas scientificas appellare libet in oppositione ad mechanicas. Etenim quod per mechanicas patet, nonnisi verum esse intelligitur de figura, quam descripsisti & præ manibus habes, adeoque theorematis veritas perspicitur nonnisi in casu singulari. Enimvero demonstratio ex hypothesi theorematis ratiocinando veritatem theorematis manifestat universaliter. Demonstratio tamen mechanica universalitatem loquitur, quatenus patet, ea, quæ ex assumtis inferuntur in theoremate, per constructionem semper talia determinari debere. Nolo tamen de his dicere disertius, propterea quod vix conveniunt illorum captui, quibus demonstrationes mechanicæ satisfaciunt. Consultum etiam est, ut demonstrationes mechanicæ ad formam scientificarum reducantur, quantum datur, ut ad hasce quasi manuducant. Sed talia relinquenda sunt circumspectioni illorum, qui erudiendis aliis præficiuntur. Ceterum exemplum præbet demonstratio theorematis geometrici mechanica de congruentia triangulorum, quam modo dedimus (§. 31), ubi ex congruentia laterum *bc* & BC, angulorum *b* & B, itemque *c* & C, atque triangulorum *acb* & ACB col-

colligitur eorundem æqualitas, quemadmodum in demonſtratione ſcientifica.

§. 34 Demonſtrationes mechanicæ æquipollent exemplis numericis, quæ veritatem theorematum & problematum in caſu ſingulari perſpiciendam præbent. Atque adeo facile patet, quid fieri debeat, ſi ſimile quid circa theoremata arithmetica tentes. Quod vero etiam hic formæ demonſtrationis ſcientificæ ratio haberi poſſit, manifeſtis ſpeciminibus docuimus in Arithmetica de geneſi numerorum quadratorum (§. 262. *Arithm.*), de geneſi numerorum cubicorum (§. 277. 280. *Arithmet.*), de numeris æqui differentibus ((§. 327. 329. *Arithm.*). Quoniam vero hiſce ſpeciminibus profundiora inſunt, quæ ad tertium cognitionis gradum viam ſternunt; de iis plura nobis dicenda ſunt in ſequentibus. Diximus iſtiusmodi demonſtrationes in Arithmetica oculares, quia oculis conſpicienda ſiſtunt, quæ in ſcientifica intellectus concipere debet. Et loquuntur univerſalitatem ex eadem ratione, quam modo dedimus de mechanicis theorematum geometricorum demonſtrationibus (§. 32). Vix tamen ratio ſatis manifeſta erit iis, qui in Ontologia nondum verſati non capiunt, quomodo poſitis determinantibus ponatur determinatum. Sane memini, Mathematicos primi ordinis hæſitaſſe in talibus, quæ principio iſti ſuperſtruuntur. Nec mirum: ignoratis enim, vel ſaltem non diſtincte expenſis principiis, a quibus principiata pendent, horum veritas non perſpicitur.

§. 35. Exempla, quibus veritas propoſitionis perſpicitur in numeris, qualia ſunt, quæ in Arithmetica ſubinde adduximus, & quibus propoſitiones illuſtrari debere ſupra præcepimus (§. 17), ſi coacerventur, pluribus in medium allatis, parere inductionem, quam dicunt Logici (§. 478 *Log.*), nemo eſt qui neſciat. Quoniam figuræ in charta delineatæ non minus ſingularia repræſentant, quam notæ numericæ; quilibet concedere tenetur, ſi demonſtratio mechanica in pluribus figuris inſtituatur, ſimiliter prodire inductionem In utroque igitur caſu certitudo major non eſt,

 quam

quam quæ ab inductione expectari poteſt. Non eſt quod excipias, hoc pacto etiam in demonſtrationibus ſcientificis, a ſingulari ad univerſale argumentari, cum eædem ad figuras in charta delneatas referantur. Etenim quod demonſtratur, non de figura in charta delineata demonſtratur; ſed ex aſſumtis univerſaliter ratiocinando colligitur, quod erat demonſtrandum: demonſtratio autem refertur ad figuram in charta delineatam, ut notionibus affundatur claritas, ne in demonſtratione intelligenda hæſitemus. Inde eſt, quod ſchematiſmorum in Geometria non requiratur veritas, quæ in uſum demonſtrationum delineantur: ſufficit enim talia ſupponi, qualia in hypotheſi ſumuntur, neque enim ex iis, quæ figuræ delineatæ revera inſunt, ſed potius ex illis, quæ in hypotheſi ſumuntur & figuræ ineſſe ſupponuntur, procedit ratiocinatio.

§. 36. Demonſtrationes iſtæ mechanicæ ſatisfaciunt iis, qui in primo cognitionis gradu acquieſcunt. Faciunt enim ad perſpiciendum veritatem in ſingulari. Eo autem contenti ſunt, qui ulterius progredi nolunt, utpote nullum habentes ſenſum ejus convictionis, qui per demonſtrationes genuinas, quas ſcientificas dicere libuit, demum producitur. Non tamen nullius prorſus uſus ſunt ceteris. Quoniam enim veritatem in ſingulari perſpiciendam præbent, ad nexum prædicati cum ſubjecto, ſeu ejus, quod ex aſſumtis in hypotheſi colligendum, cum iisdem pervidendum conducunt, ut clarius intelligatur, quid demonſtrari debeat, ſeu quomodo theſis ab hypotheſi pendeat. Immo cum veritas, quamprimum perſpicitur, delectet; voluptate quadam perfunditur animus tyronis, ubi videt poſita hypotheſi poni theſin, ſeu per aſſumta determinari, quæ de ſubjecto prædicanda ſunt. Hac voluptate non modo tollitur tædium ex prævisa difficultate percipiendæ demonſtrationis ſive vera, ſive imaginaria oriundum; verum etiam ardor accenditur demonſtrationis percipiendæ, & ad eam percipiendam animus redditur attentus. Novi equidem exercitatioribus moleſtum accidere, ubi animum ante ad demonſtratio-

nem

nem mechanicam advertere jubentur, quam ad ſcientificam accedant, & hac moleſtia effici impatientes, quod per inutiles ambages incedere debeant: id quod inprimis accidit iis, qui animum ſciendi cupidum poſſident. Enimvero quæ initio ſtudii mathematici commendantur, ea in progreſſu prætermittuntur, quando iisdem non amplius opus habemus. A ſyllabizatione incipimus, quando legere diſcimus: ab ea abſtinemus, quamprimum eadem non amplius habemus opus. Ecquis vero damnet ſyllabizationem, quod exercitatiores eadem in legendo non habent opus? Quamobrem velim ut de iis, quæ hic inculcantur, non feratur judicium, niſi ſingulis rite expenſis. Notandum quoque non omnia ingenia eſſe velocia; ſed dari etiam tarda & tarda effici ſtudii utiliſſimi deſertores, niſi moleſtiæ, qua deterrentur, tempeſtive afferatur medela. Sunt vero ſubinde tarda ingenia optima, quando nimirum naturali quodam veritatis intime perſpiciendæ impetu feruntur, ut alia taceamus.

§. 37. Demonſtrationes continua ratiocinatione abſolvuntur & ex aſſumtis procedunt. Aſſumta continentur in hypotheſi, quæ ſingula demonſtrationem ingredi debent. Ab his igitur exordinendum, redigendo in propoſitiones aſſumta, & ex anterioribus ſumendo principia, quæ vel in definitionum, vel axiomatum & poſtulatorum, vel propoſitionum jam demonſtratarum numero ſunt terminum communem cum iſtis habentia, qui ipſe principium iſtud velu ti ſponte ſua in memoriam revocat, ubi anteriora eidem firmiter infixa tenueris. Quæ prodeunt concluſiones ſumuntur deinceps eodem modo, quo ea, quæ hypotheſis continebat, eodemque modo ratiocinando progrediendum, donec inferantur ea, quæ theſis ſiſtit. Unde facile apparet, apprime opus eſſe, ut concluſiones per ſingula ratiocinia elicitæ probe notentur & ad tollendam omnem moleſtiam oculis ſubjiciantur: id quod ope ſymbolicæ repræſentationis fieri poſſe dudum docuimus non minus in Ratione Prælectionum Sect. 1. c. 2. §. 38. 50, quam in Logica tam minori c. §. quam majori (*not.* §. 551. *&* *ſeqq.*). Conſultum

vero eſt, ut hic exemplo uno alteroque illuſtrentur, quæ modo diximus, cum ampliſſimum habeant uſum deinceps diſertius exponendum. Hic tantum modo obſervamus, quod neglecta hac demonſtrationum reſolutione & ſymbolica earundem repræſentatione ſtudium mathematicum reddatur difficile & plurimis idem deferendi cauſa detur.

§. 38. Exemplum facillimum præbet theorema ſextum Geometriæ (§. 156. *Geom*), cujus hic eſt tenor: Si recta quædam ſecet rectam aliam, anguli verticales ad punctum interſectionis æquales ſunt. Theorema hoc ſymbolice ita repræſentatur:

Tab. I. Fig. 9.

Hypotheſis.	*Theſis.*
CD recta data	$o = x$
AB recta eam ſecans;	
E punctum interſectionis, adeoque	
o & x anguli verticales (§. 67. *Geom.*).	

Patet itaque æqualitatem angulorum verticalium o & x demonſtrandam eſſe ex eo, quod oriantur interſectione rectarum CD & AB ad punctum interſectionis E. Quodſi ergo omnia minutiſſime perſequi volueris, convenienter definitionibus, quæ in Elementis noſtris præmiſimus, ut in tota demonſtratione nihil admittatur, quod confuſe ſaltem percipitur, ratiocinatio ita inſtituenda. In hypotheſin ad figuram oculis præſentem relatam, qualem exhibet ſymbolica ejus repræſentatio eidem ſubjicienda, non minus oculos conjicens, quam animum advertens vides CD eſſe rectam, quam in E ſecat recta alia AB, adeoque angulos o & y habere crus unum AE commune & crus alterum CE anguli o in directum ſitum eſſe cruri alteri ED anguli y, adeoque definitio nominalis angulorum deinceps poſitorum, quam ex reali inſtar corollarii deduximus (§. 63. *Geom.*), tibi ſuggerit hoc principium: Anguli, qui crus unum commune habent & quorum duo crura reliqua in directum jacent, ſunt anguli deinceps poſiti. Unde infertur: Angulos o & y eſſe deinceps poſitos. Quodſi primam hanc concluſionem ſumas tanquam præmiſſam ſyllogiſmi, & tam ſubjectum, quam prædicatum perpen-

pendis, memoriam ſubit theorema Geometriæ quintum (§. 147. *Geom.*). Duo anguli deinceps poſiti ſunt æquales duobus rectis, quod præbet majorem novi ſyllogiſmi. Ex his præmiſſis colligis concluſionem: Ergo anguli o & y ſunt æquales duobus rectis, quæ probe notanda in uſum ſequentem. Quodſi jam porro oculos in hypotheſin ad figuram oculis præſentem conjicis & animum ad eandem advertis; denuo vides, AB eſſe rectam, quæ ſecat alteram CD, adeoque angulos y & x habere crus commune ED & crura reliqua AE & EB in directum ſita eſſe, atque hoc formas judicium intuitivum: Anguli y & x habent crus commune & eorum crura reliqua in directum jacent. Ad hoc ſi animum attendis, memoria ſuggerit denuo definitionem nominalem angulorum deinceps poſitorum, quam corollarii inſtar ex reali deduximus (§. 63. *Geom.*) & hoc ſuppeditat principium, quod ad concluſionem modo elicitam tanquam præmiſſam novi ſyllogiſmi aſſumtum vicem alterius præmiſſæ tuetur: Anguli, qui crus unum commune habent &, quorum crura reliqua in directum jacent, ſunt anguli deinceps poſiti. Ex his igitur præmiſſis infers concluſionem: Anguli y & x ſunt anguli deinceps poſiti. Quodſi porro hanc concluſionem ſumas præmiſſam ſyllogiſmi novi, animum ad eam advertenti ſuccurrit theorema (§. 147 *Geom.*): Anguli deinceps poſiti ſunt æquales duobus rectis. Ex his itaque præmiſſis infers concluſionem: Ergo anguli y & x ſunt æquales duobus rectis. Quodſi jam in duas concluſiones, o & y ſunt æquales duobus rectis, x & y ſunt æquales duobus rectis, oculos conjicis & ſuper iisdem reflectis; attendenti manifeſtum eſt: angulos y & x atque angulos o & y eſſe duo æqualia eidem tertio, quod hic ſunt duo recti. Quamobrem ſi judicium hoc quaſi intuitivum ſumas inſtar præmiſſæ novi ſyllogiſmi; memoria ſuggerit principium, quod antea didiciſti (§. 87. *Arithm.*). Æqualia eidem tertio ſunt æqualia inter ſe. Ex his adeo præmiſſis infers: Anguli o & y ſimul ſumti ſunt æquales angulis y & x ſimul ſumtis. Enimvero theſis, ubi in eam oculos conjicis, attendenti loqui-

loquitur demonstrandum esse, quod angulus o sit æqualis angulo x. Quamobrem vides angulum y utrinque esse auferendum, ut anguli o & x relinquantur: quod dum fieri supponitur, patet, quod idem ab æqualibus auferatur. Hoc igitur si sumis, succurrit denuo principium, quod in Arithmetica didicisti (§. 91 *Arith.*): si æqualia ab æqualibus auferas vel idem ab æqualibus, quæ relinquuntur æqualia sunt. Unde porro concludis: Anguli o & x, qui hic relinquuntur, æquales sunt. Atque sic patet, demonstratum esse, quod demonstrandum fuisse thesis insinuat.

§. 39. Distinctissime adeo docuimus, quomodo concipienda sit demonstratio, ut omnem consequatur evidentiam, quam habere potest. Quodsi jam eandem symbolice repræsentare volueris, ut omnem quoque consequatur claritatem, quam habere potest, omnisque in ea concipienda tollatur difficultas, hoc modo ipsum fieri debet:

I.

AE crus commune ang. o & y.
CE in directum situm ipsi ED

---

o & y anguli deinceps positi

---

1. $o + y = 2$ R.

II.

ED crus commune ang. y & x
AE in directum situm ipsi EB

---

y & x anguli deinceps positi

---

2. $y + x = 2$ R.

III.

$o + y = 2$ R. *vi num.* 1.
$y + x = 2$ R. *vi num.* 2.

$y + \ = \ + x$

$o = x$ *Q. e. d.*

Notandum hic, lineam a se invicem separare, quæ sumuntur & quod ex iis concluditur. Illa supra lineam collocantur, hoc infra eandem constituitur. Quod intra duas lineas deprehenditur, duplici modo considerari, nimirum 1. tanquam conclusionem, quæ ex assumtis colligitur, & 2. tanquam assumtum, unde ulterius infertur, quod infra lineam alteram scribitur. Vides autem porro, primo loco *num. I.* & *num. II.* assumta ex hypothesi peti, ac inde duplici ratiocinio elici conclusionem *num.* 1. & alteram *num.* 2. Exhausta sic hypothesi *num. III.* summuntur conclusiones *num.* 1. & 2 ex hypothesi elicitæ, ac inde

inde porro duplici ratiocinio tandem elicitur, quod in thesi continetur, esse $o = x$, seu angulos verticales esse æquales. Repræsentatio hæc demonstrationis symbolica tantummodo propositionem minorem & conclusionem uniuscujusque syllogismi exhibet, qui demonstrationem ingreditur, adeoque syllogismos ad enthymemata reducit, omissis principiis, quæ unicuique syllogismo majorem præbent, ac facile supplentur ex regulis logicis, immo sua veluti sponte memoriam subeunt, ubi ea familiaria experiris, vel per citationem in contextu positam reperiri possunt, ubi memoriæ nondum fuerint infixa. Atque adeo abunde patet, nihil hic desiderari, quod ad demonstrationem distincte concipiendam requiritur & non minus ad evidentiam quoad illationem demonstrationi conciliandam, quam ad claritatem omnem eidem affundendam, ne quicquam obscuri supersit, sed ut penitus intelligatur, desideratur.

§. 40. Demus adhuc exemplum aliud. Sit demonstrandum theorema 18. Geometriæ, de quo diximus superius (§. 25). Si duo triangula habuerint angulum unum æqualem & latera eundem comprehendentia sigillatim æqualia, erit etiam latus tertium unius æquale lateri tertio alterius, duo anguli reliqui erunt sigillatim æquales & tota triangula æqualia atque similia. Quoniam ex hypothesi ratiocinatio nondum procedit, quemadmodum in casu anteriore (§. 38. 39.); præterea in usum demonstrationis quædam adhuc alia sumuntur, quæ sumi posse patet. Ubi vero hoc fieri solet, tum quæ ulterius supponuntur, præparationem constituere dicuntur. Est itaque hoc in casu, ubi æqualitatem & similitudinem ex principio congruentiæ demonstraturi sumus, præparatio hæc (§. 3. *Geom.*). Triangulum unum ponatur super altero, ita ut vertex angulorum æqualium unius ponatur super vertice alterius & crus illius unum cadat super crure uno alterius. Quæ in præparatione sumuntur, ea tanquam ad hypothesin spectantia considerantur, nullo inter hypothesin & præparationem quoad usum as-

ſumtorum in demonſtrando facto diſcrimine. Dico quoad uſum aſſumtorum in demonſtrando: alias enim manifeſtum eſt diſcrimen inter ea, quæ in hypotheſi, & ea, quæ in præparatione ſumuntur. Etenim per ea ſola, quæ in hypotheſi ſumuntur, determinantur ea, quæ ſubjecto tribuenda & de eodem adeo demonſtranda veniunt: quæ vero in præparatione ſumuntur, non alium habent uſum, quam ut ex ſumtis in hypotheſi procedat ratiocinatio. Nimirum quæ in præparatione ſumuntur, per ea, quæ ſumuntur, in hypotheſi non determinantur, alias enim ratiocinando ex iisdem colligi poterant, nec ulla foret ratio, cur ſumerentur. Sumi autem poſſunt non invito principio contradictionis, quatenus hypotheſi non repugnant, ſed cum iis, quæ in eadem continentur, una conſiſtunt. Abſoluta itaque præparatione demonſtratio ordine naturali, qualem requirit uſus facultatum animæ, ita procedit.

Tab. I. §. 41. Vertex anguli *a* cadit in verticem anguli A & crus illius *a b* in crus alterius AB *per præparationem*, eſtque angulus *a* æqualis ipſi *A per hypotheſin*. Fig. 6. Hæc ubi perpendis, ſuccurrit *theorema* 12 (§. 166. *Geom.*). Si fuerint duo anguli æquales & vertex unius ponatur ſuper verticem alterius ac præterea crus unum illius ſuper crure uno hujus, etiam crus alterum illius ſuper crus alterum hujus cadit. Unde infertur: 1. crus *a c* anguli *a* ſuper crure AC anguli A cadit. Jam porro *a* cadit in A & *a b* ſuper AB *per præparationem* & *a b* = AB *hypotheſin*. Ad hæc animum advertenti ſuccurrit: Si recta quædam alteri æqualis ita applicetur, ut terminus ejus unus cadat ſuper terminum unum alterius ac ipſa cadat in alteram, etiam alter ejus terminus in terminum alterum alterius cadit (§. 169. *Geom.*). Unde infertur 2. rectæ *a b* punctum *b* cadere in punctum B rectæ alterius AB. Similiter punctum *a* cadit in A *per præparationem* & *a c* ſuper AC per *demonſtrata num.* 1. eſtque *a c* = AC *per hypotheſin*. Succurrit igitur denuo principium modo commemoratum, indeque

que infertur: 3. punctum *c* cadere in C. Atque hæc sunt, quæ ex hypothesi accedente præparatione ratiocinando colliguntur. Enimvero quoniam in hisce conclusionibus nondum continentur, quæ demonstranda loquitur thesis; hæc ex illis continuata ratiocinatione colligenda. Ad conclusiones modo elicitas perspicienti manifestum est, quod punctum *c* in C *per demonstrata num.* 3. & punctum *b* in B *per demonstrata num.* 2. cadere, unde formatur hoc judicium quasi intiuitivum: Rectæ *b c* & BC intra eosdem terminos continentur (§. 11. *Geom.*). Vi definitionis congruentiæ (§. 3. *Geom.*), memoria suggerit hoc principium: Quæ intra eosdem terminos continentur, ea sibi mutuo congruunt. Hinc infertur conclusio: Recta *b c* congruit rectæ BC. Hanc conclusionem si sumas instar præmissæ novi syllogismi, memoria suggerit hoc principium (§. 161 *Geom.*): Quæ sibi mutuo congruunt, ea sunt æqualia. Unde infertur: I. recta *b c* æqualis est recta BC, quod erat primum, eorum scilicet, quæ vi theseos demonstranda. Porro *b* cadit in B *per demonstrata num.* 2. *b a* in BA, *per præparationem*, & *b c* in BC *per demonstrata num.* 2. *& n.* 3. *atque* §. 170. *Geom.* Habemus adeo duos angulos *b* & B, quorum vertices *b* & B atque crura *b c* & BC, itemque *b a* & BA coincidunt. Enimvero si vertex & crura angulorum duorum conincidunt, anguli æquales sunt (§. 167 *Geom.*). Ergo II. angulus *b* æqualis est ipsi B, quod erat secundum, eorum scilicet, quæ vi theseos demonstranda. Similiter punctum *c* in C cadit *per demonstrata n.* 3. & *c a* in CA *per demonstrata num.* 1. item *c b* in CB *per demonstrata num.* 2. *& num.* 3. *atque* §. 170. *Geom.* Habemus igitur denuo duos angulos *c* & C, quorum vertices & crura coincidunt. Denuo ad hoc animum advertenti succurrit principium: si duorum angulorum vertices & crura coincidunt, anguli æquales sunt. Unde infertur conclusio III. anguli *c* & C æquales sunt, quod erat tertium. Denique *a* cadit in A, *per præparationem*, *b* in B *per demonstrata num.* 2. & *c* in C *per demonstrata* num. 3, adeoque patet triangula *a c b* & ACB

intra eosdem terminos contineri (§. 11. 170. *Geom.*). Hoc ipsum perpendenti succurrit; quæ intra eosdem terminos continentur, ea sibi mutuo congruunt (§. 3. *Geom.*). Unde colligitur: Triangula *acb* & ACB sibi muto congruunt. Quodsi hanc conclusionem sumas tanquam præmissam novi syllogismi, memoriam subit principium (§. 161. *Geom.*): Quæ sibi muto congruunt, ea & æqualia, & similia sunt. Unde infertur IV. triangula *acb* & ACB æqualia & similia sunt: quod erat quartum. Integram adeo demonstrationem absolvimus, cum vi theseos nihil amplius demonstrandum restet.

§. 42. Quodsi symbolicam demonstrationis hujus repræsentationem desideres, qua singula veluti oculis conspicienda exhibentur; ea ita sese habet:

Tab. I. Fig. 6.

Hypothesis	*Thesis.*
ang. *a*=A	I. *bc* = BC
ab=AB	II. ang. *b*=B
ac=AC	III. *c*=C
	IV. △ *acb* ∾ △ ACB

Præparatio.

a cadit in A
ab cadit in AB

Demonstratio.

I.

a cadit in A *per præparat.*
ab cadit in AB *per eandem.*
a = A *per hypoth.*

1. *ac* cadit in AC

II.

ab = AB *per hypoth.*
a cadit in A *per præparat.*
ab cadit in AB *per eandem.*

2. *b* cadit in B

III.

a cadit in A *per præparat.*
ac cadit in AC *per demonstr. n.* 1.
ac = AC *per hypoth.*

3. *c* cadit in C

IV.

c cadit in C *per demonstr. n.* 3.
b cadit in B *per demonstr. n.* 2.
adeoque
bc & BC intra eosdem terminos continentur.

Recta *bc* congruit ipsi BC.

I. *bc* = BC

V.

b cadit in B *per demonstr. n.* 2.
ba cadit in BA *per præparat.*
bc cadit in BC *per demonstr. n.* 2. & *n.* 3 & §. 170. *Geom.*

II. angulus *b* = B

VI.

VI.
c cadit in C *per demonstr. n.* 3.
ca cadit in CA *per demonstr. n.* 1.
cb cadit in CB *per demonstr. n.* 2. *& n.* 3. *&* §. 170. *Geom.*

III. angulus $c = C$.

VII.
a cadit in A *per præparat.*
b cadit in B *per demonstr. n.* 2.
c cadit in C *per demonstr. n.* 3.
adeoque
△ △ acb & ACB intra eosdem terminos continentur (§. 11. 170. *Geom.*)

△ acb congruit △ ACB

IV. △ $acb \cong$ △ ACB.

§. 43. Atque ita totam demonstrationem in sua prima principia resolvimus, ex quibus facultatum nostrarum usu deducitur, non admissis notionibus confusis, quæ obscuritatem quandam relinquere poterant, & ratiociniis distincte atque naturali ordine expressis, ac inter se concatenatis, ut nihil desit evidentiæ (§. 41). Singula hæc ipsis oculis spectanda exhibet repræsentatio demonstrationis resolutæ symbolica (§. 42.). Etenim conspicitur, quomodo demonstratio ex hypothesi & præparatione tanquam ex assumtis procedat, quemnam utriusque usum faciamus in demonstrando & cur præparatione opus sit, nec non quomodo sese habeant ea, quæ præparatio superaddit, ad ea quæ in hypothesi continentur. Videmus porro, quomodo omnes determinationes in hypothesi contentæ invehantur in demonstrationem, ut tandem ex omnibus simul sumtis concludatur unumquodque eorum, quod in thesi continetur, tanquam determinatum ex determinantibus. Videmus quoque, quomodo ratiocinia concatenentur, introductis conclusionibus præcedentium in sequentia. Videmus denique, quomodo ratiocinia ultima terminentur in iis, quæ demonstranda loquitur thesis, ut manifestum sit demonstrationem esse absolutam.

§. 44. Habet autem repræsentatio demonstrationis symbolica hunc usum, ut eandem faciliter & omnem difficultatem arceat. Oritur difficultas ex ratiociniorum continuandorum longa serie, & conclusiones, quæ in præcedentibus ratioci-

niis fuerant elicitæ, memoria retinendæ, ut eas introducere liceat in ſequentes per modum præmiſſarum, ubi non ſtatim, quando illatæ fuerunt, in locum præmiſſæ aſſumuntur in ſyllogismo proxime ſequente, quemadmodum in exemplo primo factum eſſe apparet *num.* I. & II. (§. 39.) & in præſenti *num.* IV. & VII. Enimvero ſi demonſtratio ſymbolice repræſentetur, gradum ſiſtere licet in ſingulis, quæ ſigillatim expreſſa exhibentur, & quacunque mora interpoſita redeunti progredi datur, ac ſi nulla interpoſita fuiſſet. Quantacunque igitur fuerit ratiociniorum eo usque continuandorum ſeries, donec perveniatur ad ea, quæ demonſtranda fuerant; non tamen defatigabitur animus ratiocinationi in longa ſerie continuandæ minus adſuetus. Nec diſtrahitur animus, quocunque durante illa, quam interponere viſum eſt, mora cogitationes tuas convertas. Non interrumpitur eadem attentio, quæ ad demonſtrationem afferenda, ne deſit ſenſus evidentiæ ad convictionem plenariam requiſitus. Immo dum omnia, ad quæ animus advertendus, oculis ſpectanda ſubjicit, attentionem mirifice juvat, ſive ea excitanda, ſive conſervanda fuerit. Neque defatigatur imaginatio atque memoria, quatenus concluſiones ſyllogismorum anteriorum retinendæ, ut earum prompte meminerimus, dum in ſyllogismos ſequentes introducendæ, cum oculis in ea, quæ diſtincte ſcripta cernuntur, converſis ſua ſeſe ſponte ſiſtant, quamprimum earundem meminiſſe debemus. Neque etiam hæſitas in eo, quomodo progrediendum ſit in demonſtratione, donec abſolvatur. Etenim clariſſime vides, primum formari propoſitiones ex iis, quæ in hypotheſi &, ubi ea non ſufficit ſola, in præparatione ſumuntur, ut adſcitis principiis ex anterioribus inferantur concluſiones, donec hypotheſis & præparatio fuerit exhauſta. In locum hypotheſeos & præparationis deinde ſuccedunt concluſiones hoc pacto elicitæ, & quomodo introducendæ ſint in novos ſyllogismos, tum theſis, quæ demonſtranda oculis objicit, tum memoria principiorum, quæ conſpectus concluſionum & in theſi con-

tentorum offert, ostendit. Quodsi adeo principia anteriora familiaria experiris, in distincte concipienda demonstratione nihil prorsus difficultatis percipitur. Redduntur autem familiaria, si eo, quem præscripsimus, modo expendantur, & symbolicæ repræsentationes, quas explicavimus, aliquoties animo recolantur.

§. 45. Qui principia, quibus opus habet, nondum adeo familiaria experitur, ut sponte sua memoriam subeant, quoties iisdem opus est; ei inserviunt citationes demonstrationibus in contextu insertæ. Hæ enim ostendunt paragraphum, in quo principium continetur, quod ad propositionem vel ex hypothesi ac præparatione formatam, vel ex conclusionibus jam elicitis assumtam aut derivatam applicatum conclusioni eliciendæ inservit. Patebit hoc demonstrationis symbolicam repræsentationem cum contextu conferenti, ut adeo opus non sit plura in hanc rem afferri.

§. 46. Notandum nimirum, in contextu demonstrationem concisius proponi, quantum sufficit, ut singula suggerantur, quæ animum subire debent, ubi illam distincte concipere volueris. Quodsi tamen contextum cum resolutione, qualem hic præcepimus, & repræsentatione symbolica, qualem exhibuimus, conferre volueris; facile observabis, demonstrationem in contextu positam esse utriusque directorium, ne hæsites in eo, quid fieri debeat. Facile adeo animadvertes, demonstrationes ita a nobis fuisse expressas, ut huic instituto maxime conveniant. Disces etiam, resolvendo demonstrationes eo, quem præcepimus, modo, & symbolice repræsentando easdem minime effici prolixiores: cum supplendo ea, quæ conspectus schematismi suggerit & quæ citationes insinuant, eodem prorsus ordine prodeant singula ratiocinia, quo eadem posuimus. Immo si sufficiente attentione uti volueris, in te ipso experieris, deesse adhuc aliquid sensui evidentiæ, quamdiu singula ratiocinia non formaveris, præsertim ubi uno vel altero exemplo eundem acquisiveris, ut ne ignores differentiam, quæ inter distinctam & confusam perceptionem intercedit.

dit. Absit itaque ut tibi persuadeas, hic a nobis præcipi, quæ a contextu abhorrent, ac per inutiles ambages ad scopum tendi.

§. 47. Enimvero non inconsultum esse videtur, ut exemplum quoque demonstrationis theorematis arithmetici in medium afferamus. Sumamus itaque theorema 21. (§. 181. *Arithm.*), quo superius usi sumus (§. 24.) & quod ita habet: Si duas quascunque quantitates per eandem tertiam dividas; quoti sunt inter se ut quantitates divisæ. Theorema hoc symbolice ita repræsentatur:

Hypothesis.	*Thesis.*
∵ A & B quantiates dividendæ	F:G=A:B.
C dividens comunis	
F & G quoti ex divis. prodeuntes	

Patet itaque demonstrandum esse, quotos F & G esse quantitatibus A & B proportionales, ex eo, quod prodeant ex divisione quantitatum A & B per eandem tertiam C. Quodsi ergo ex hypothesi sumis: Quotus F prodit ex divisione quantitatis A per quantitatem C; ex anterioribus (§. 174. *Arithm.*) succurrit principium. In divisione unitas est ad divisorem, ut quotus ad dividendum. Unde infertur: 1. sive unitas est ad C ut F ad A. Quodsi porro ex hypothesi sumis: Quotus G prodit ex divisione quantitatis B per quantitatem C; vi ejusdem principii infertur: unitas sive 1 est ad C ut G ad B. Exhausta hypothesi, ut inde nihil amplius concludi possit, ubi conclusiones modo elicitas inter se confers, patebit rationem F ad A & G ad B esse duas rationes eidem tertiæ 1 ad C æquales. Succurrit itaque theorema (§.167. *Arithm.*): Rationes æquales eidem tertiæ sunt æquales inter se. Atque hinc infertur: Rationes F ad A & G ad B esse æquales, seu esse F:A=G:B. Enimvero thesis ostendit, quæri quomodo sese habeat A ad B. Huc si animum advertas, succurrit theorema 18. (§. 173 *Arithm.*): Quantitates proportionales etiam alternando proportionales sunt. Atque adeo tandem infertur, esse F:G=A:B, quod erat demonstrandum.

§. 48. Symbolica demonstrationis hujus repræsentatio hæc est:

Hy-

Hypothesis.

$\frac{A}{C} = F$

$\frac{B}{C} = G$

Thesis.

$F:G = A:B$

Demonstratio.

I.

$\frac{A}{C} = F$ *per hypothesin.*

1. $1:C = F:A$

II.

$\frac{B}{C} = G$ *per hypothesin.*

2. $1:C = G:B$

III.

$1:C = F:A$ *per demonstrata n.* 1

$1:C = G:B$ *per demonstrata n.* 2

$F:A = G:B$

$F:G = A:B$ *q. e. d.*

Nulla hic opus est præparatione, cum sola hypothesis ea contineat, unde vi principiorum anteriorum tandem infertur conclusio, quæ vi theseos inde elicienda. Quodsi majoris perspicuitatis gratia in numeris demonstrationem repræsentare volueris, non alia re opus est, quam ut literis substituantur numeri eo modo, quo hic factum esse vides:

Hypothesis.

$\frac{24}{3} = 8$

$\frac{12}{3} = 4$

Thesis.

$8:4 = 24:12$

Demonstratio.

I.

$\frac{24}{3} = 8$ *per hypothesin.*

1. $1:3 = 8:24$

II.

$\frac{12}{3} = 4$ *per hypothesin.*

2. $1:3 = 4:12$

III.

$1:3 = 8:24$ *per demonstrata n.* 1

$1:3 = 4:12$ *per demonstrata n.* 2

$8:24 = 4:12$

$8:4 = 24:12$ *q.e.d.*

Possunt etiam numeri quantitatibus per literas designatis subscribi, vel ad latus adjici, prout supra factum esse apparet (§. 24.), ut claritate sua dispellant obscuritatem, quæ signis istis uni-

verſalibus adhærere videtur, quamdiu iisdem nondum ſatis fueris adſuetus. Ceterum ſi demonſtrationem in numeris exhibere volueris, eadem demonſtratione ad plura exempla applicata absque ulla moleſtia fit repetitio, quod idem agendo ſemper aliud agere tibi videris, quatenus numerorum diverſitas varietatem quandam inducit.

§. 49. Cum repræſentatio demonſtrationis in numeris non ſit niſi ipſa demonſtratio ſcientifica, ſeu generalis ad exmplum aliquod majoris perſpicuitatis gratia applicata, quemadmodum in Geometria demonſtratio applicatur ad figuram in charta delineatam, quæ ſingulare exemplum præbet; ideo in eadem acquieſcere licet, nec opus eſt, ut iisdem ſigna univerſalia ſubſtituas, modo tibi caveas ne in ratiocinia tacite invehas determinationes nonnullas, quæ inſunt numeris aſſumtis, non vero hypotheſi. Etenim tum demonſtratio non ſuccedit niſi in eo caſu, ubi iſtæ determinationes adſunt, conſequenter tantummodo caſum quendam particularem attingit, nec univerſaliter demonſtratur, quod erat demonſtrandum. Atque adeo contingere poteſt, ut, dum concluſio in caſu particulari elicita habetur pro univerſali, in errorem incidas. Enimvero error hic præcavetur, modo probe conſideres, num quod aſſumis concluſionis inferendæ gratia, totum in hypotheſi contineatur, aut per præparationem ſuperaccedat, ſi præterea aliud quid ſumitur, nulla habita ratione eorum, quæ numeris qua talibus inſunt. Ita enim certum eſt, in omni exemplo alio ratiocinationem eodem modo procedere, nec argumentationem fieri ab eo, quod huic exemplo ineſt ſingulare, ſed ab eo, quod cum omnibus aliis ſub hypotheſi contentis commune habet. E. gr. in exemplo noſtro (§. 48), quoti 8 & 4. *num. I & II.* ſunt numeri integri rationales. Aſt principium, quo mediante hinc inferimus concluſiones, ſcilicet quod in omni diviſione ſit ut unitas ad diviſorem, ita quotus ad dividendum, ſatis oſtendit, concluſionem inferri ex eo, quod 8 & 4. ſint quoti per diviſionem duorum numerorum 24 & 12. per eundem tertium 3 pro-

prodeuntes, nec ſupponi quotum eſſe numerum integrum rationalem, conſequenter nihil hypotheſi ſuperaddi, dum demonſtratio ad exemplum aliquod ſingulare applicatur. Ceterum quæ hic dicuntur probe notanda ſunt, cum uſum habeant etiam extra Matheſin, atque in partibus Matheſeos mixtis & in cognitione Naturæ mathematica, ubi majore circumſpectione opus eſt, quam in Arithmetica, præſertim ſi theoria accurata nondum proſtat, unde haurianda ſunt principia demonſtrandi, nec diſtinctis ratiociniis in demonſtrando fueris adſuetus, qualia requirit noſtra demonſtrationum reſolutio earundemque ſymbolica repræſentatio, ſecundum leges animæ naturali ordine ex hypotheſi &, quæ ſubinde eidem ſuperaccedere debet, præparatione tanquam ex fonte ſuo profluentia, quemadmodum ex principiis Pſychologiæ empiricæ demonſtrari poteſt nullo negotio, modo ea habueris perſpecta.

§. 50. Quoniam demonſtrationis univerſalitati nil quicquam decedit, dum ad exemplum aliquod applicatur (§. 49): ab ejus repræſentatione in numeris facile abſtrahitur demonſtratio, qualem libro inſeri convenit, ſi quæ aſſumuntur & concluſiones, quæ hinc inferuntur, verbis enuncientur, & concluſionibus adjiciantur citationes principiorum, quorum vi hæ inferuntur. Ita in caſu dato (§. 48) talis prodit demonſtratio: Quoniam quoti ex diviſione duarum quantitatum per eandem tertiam reſultant *per hypotheſin* quilibet eorum eſt ad quantitatem diviſam ut unitas ad tertiam, quæ utramque dividit (§. 174. *Arithm.*), conſequenter quoti ad quantitates diviſas eandem habent rationem (§. 167 *Arithm.*). Sunt igitur inter ſe ut quantitates diviſæ (§. 173. *Arithm.*). *Q. e. d.*

§. 51. Quodſi problema aliquod demonſtrandum eſt, notandum idem converti in theorema ſumta reſolutione cum datis tanquam hypotheſi & eo, quod fieri debet, tanquam theſi. E. gr. Problema de ducenda linea alteri parallela, per punctum extra ipſam datum, adhibita reſolutione prima, quam ſuperius

 exem-

exempli loco produximus (§. 27), in hoc theorema convertitur: Si ex puncto extra lineam dato demittatur ad lineam datam perpendicularis & ex puncto alio intra eandem pro arbitrio aſſumto erigatur perpendicularis altera eidem æqualis, recta per punctum datum & extremum perpendicularis alterius tranſiens eſt lineæ datæ parallela.

§. 52. Ubi problema in theorema fuerit converſum, reſolutio demonſtrationis eodem modo abſolvitur, quo in demonſtrationibus theorematum reſolvendis uſi ſumus (§. 38. 41 & 47). Sit ex. gr. reſolvenda demonſtratio problematis, quod modo ad theorema revocavimus (§. 51); demonſtratio ita procedit. Recta VK ex puncto V extra lineam RS dato ducta eſt ad eandem perpendicularis, recta TA ex puncto T intra rectam RS pro arbitrio aſſumta eſt itidem ad eandem perpendicularis alterique perpendiculari VK æqualis, *per conſtructionem* ſeu *reſolutionem*, adeoque perpendicula inter rectam datam RS & rectam per punctum V & A ductam intercepta VK & TA æqualia ſunt. Enimvero ſi perpendicula inter duas lineas intercepta æqualia ſunt, lineæ iſtæ ſunt parallelæ (§. 226. *Geom.*). Linea igitur ducta per punctum datum V & extremum A alterius perpendicularis TA eſt parallela lineæ datæ RS. *Q. e. d.* Videmus adeo ex iis, quæ conſtructio, juxta reſolutionem problematis facta, ſuggerit, unico ſyllogiſmo inferri, quod demonſtrandum erat: quæ ratio eſt, cur nullam in contextu demonſtrationem adjecerimus, ſed tantummodo citationem principii, vi cujus ex conſtructione infertur, quod erat demonſtrandum, nempe parallelismus linearum RS & MN.

Tab. I. Fig. 5.

§. 53. Symbolica demonſtrationis hujus repræſentatio nihil prorſus difficultatis habet. Etenim non alia re opus eſt, quam ut repræſentationi ſymbolicæ reſolutionis ſupra datæ (§. 27.) adſcribas data ex repræſentatione problematis ſymbolica, & ad ſummum adjicias propoſitionem ex iisdem formatam, prouti hic factum eſſe vides:

Hypo-

Hypothesis.	*Thesis.*
Recta RS data	MN paral. RS.
punctum V extra eam datum	
VK perpendicularis ad RS	
T punctum pro arbitrio assumtum	
TA=VK	
MN transiens per V & A	

Demonstratio.

VK & TA perpendicula inter MN & RS
atque VK=TA

MN paralla ipsi RS *Q. e. d.*

§. 54. Quoniam demonstratio problematis, quod exempli loco in medium protulimus (§. 51. & seqq.), perbrevis est, utpote quæ nonnisi unico syllogismo constat; non inconsultum videtur addere explum adhuc aliud. Sumamus itaque problema 33 Geometriæ de invenienda linea media proportionali inter duas datas. Sunt itaque datæ rectæ duæ AB & BE, quæsitum est recta BD media proportionalis inter AB & BE. Resolutio jubet rectas AB & BE jungi in directum, ut prodeat recta AE, super AE describi semicirculum ADE & ex B erigi perpendicularem BD semicirculo in D occurrentem, quæ esse dicitur media proportionalis inter AB & BE. Quodsi ergo problema demonstrare volueris, resolutione in hypothesin versa & propositione pro thesi sumta; sequens prodit theorema. Si super recta AE describatur semicirculus, & ex puncto quocunque diametri B erigatur perpendicularis BD semicirculo in D occurrens; erit ea inter segmenta diametri AB & BE media proportionalis.

Tab. I. Fig. 10.

§. 55. Quodsi jam hoc theorema demonstrare volueris, præparatio accedere debet. Ducantur itaque rectæ AD & DE, chordæ arcus semicirculi cognomines subtendentes, ut prodeant triangula ADB, BDE & ADE. Quo facto demonstratio ita resolvitur. Sumimus ex constructione: Recta BD perpendicularis est ad AE. Hoc ubi perpendis, definitio perpendicularis lineæ suggerit hoc principium (§. 78 *Geom.*): Si linea recta fuerit ad alteram perpendicularis, anguli, quos cum ea efficit, recti sunt & æquales (§. 79 *Geom*). Unde infertur angulos *m* & *n* esse rectos & æquales. Porro rectæ AD & DE se-

micirculum subtendunt *vi præparationis* & AE diameter circuli est *per constructionem.* Unde patet, quod ADE sit angulus in semicirculo. Huc si animum advertis succurrit theorema (§. 317. *Geom.*) Angulus in semicirculo rectus est. Unde infertur: angulus ADE seu $o+x$ rectus est. Est vero etiam angulus m rectus *per demonstrata.* Quamobrem si angulum m ad angulum $o+x$, referas, succurrit principium (§. 145. *Geom.*): omnes anguli recti inter se æquales sunt. Unde infertur: angulus m trianguli ADB est æqualis angulo $o+x$ trianguli ADE. Enimvero angulus y utrique triangulo ADB & ADE communis est, atque adeo duo in hisce triangulis anguli æquales sunt. Memoria suggerit, siquidem anteriora eidem mandaveris, quemadmodum fieri debet, adeoque hic supponitur: Si duo anguli unius trianguli æquentur duobus alterius, etiam tertius unius æqualis est tertio alterius (§. 246. *Geom.*). Hinc itaque colligitur angulum o in triangulo ADB esse æqualem angulo z in triangulo ADE. Quodsi jam angulos in triangulis ADB & DBE inter se confers, tum patet duos angulos m & o trianguli ADB esse sigillatim æquales duobus angulis n & z alterius trianguli DBE. Succurrit itaque ex anterioribus memoriæ probe infixis principium: si duo anguli unius trianguli fuerint sigillatim æquales duobus angulis alterius, triangula latera æqualibus angulis opposita proportionalia habent (§. 267 *Geom.*). Hinc infertur latera AB & BD in triangulo ABD esse proportionalia lateribus BD & BE in triangulo DBE, quorum scilicet illa opponuntur angulis o & y, hi vero angulis z & x, angulo o existente æquali angulo z & angulo y æquali angulo x *per demonstrata.* Habemus adeo AB:BD=BD: BE. *Q. e. d.* Ita demonstrationem resolvimus, ut singula distincte enuncientur, quæ in notionibus continentur, quæ eandem absolunt, & præsentes animo ejus esse debent, qui eadem convincitur.

§. 56. Demonstratio problematis hujus symbolice ita repræsentatur. Tab. I. Fig. 9.

Hypo-

Hypothesis.	*Thesis.*
AB recta data	BD recta quæsita.
BE recta data	AB: BD=BD:BE
AE diameter semicirculi	
ADE semicirculus	
AB } BE } Segmenta diametri	

Præparatio.

AD & DE chordæ semicirculum subtendentes.

Demonstratio

I.

BD perpendicularis ad AE *per construct.*

1. m & n anguli recti & $m=n$

II.

AD & DE semicirc. subtendunt *per præparat.*

AE diameter circuli *per construct.* adeoque

ADE angulus in semicirculo

2. angulus $o+x$ rectus.

III.

ang. $o+x$ rectus *per demonstr. num.* 2.

m rectus *per demonstr. n.* 1

3. $o+x=m$

IV.

in ΔΔ ADE & ABD

$o+x=m$ *per demonstr. n.* 3.

$y=y$

4. $z=o$.

V.

in ΔΔ ADB & DBE

$m=n$ *per demonstrat. n.* 1.

$o=z$ *per demonstrat. n.* 4.

5. $y=x$ &

AB: BD=BD: BE. *Q. e. d.*

§. 57. Atque adeo patet, inter demonstrationem theorematis & problematis nullam intercedere differentiam, modo problema in theorema convertatur, quemadmodum id fieri debere præcepimus (§. 51. 54.). Et hoc pacto docuimus omnia, quæ observanda sunt ei, qui ad secundum cognitionis humanæ gradum adspirat. Unicum adhuc moneri consultum ducimus, scilicet quod ex resolutione demonstrationum pateat, cur propositiones pure enunciare debeamus, quas brevitatis gratia in contextu statim ad figuras retulimus, expositione cum propositione in unum confusa. Etenim ubi distincte ratiocinari volueris, quemadmodum exigit resolutio demonstrationis, necesse

cesse est ut propositiones singulæ pure enuncientur. Quamobrem etiam pure enunciatæ memoriæ mandandæ, cum alias applicatio in casu dato ob literarum figuris adscriptarum diversitatem confundat, ut difficilis ac molesta evadat. In addiscenda igitur Mathesi morem veterum sequi tenemur, ut primum propositionem unamquamque pure enunciemus, ac deinde eandem exponamus, separata expositione a propositione, quando eidem immixta

§. 58. Quodsi objicias, nos nihil dixisse de corollariis, quorum tamen bene multa in Elementis nostris occurrunt: facilis est responsio. Corollaria enim sunt propositiones, quarum veritas perspicitur per definitionem, vel propositionem, cui subjiciuntur. Quoniam pleraque eorum demonstratione indigent, quam per modum principii ingreditur definitio, vel propositio, cui subjiciuntur; quæ de resolutione & symbolica repræsentatione propositionum diximus, ea quoque de corollariis tenenda. Nimirum propositio pure enuncianda, deinde exponenda, exposita in hypothesin & thesin resolvenda, quarum utraque consueto more symbolice repræsentata. Demonstratio deinde, eodem modo resolvenda, quo eandem in anterioribus resolvimus, eodem etiam modo symbolice repræsentanda, quo eandem in anterioribus repræsentavimus. Nullis igitur peculiaribus præceptis hic opus.

§. 59. Ne quicquam in dictis supersit obscuri, exemplum aliquod superaddere lubet. Sumamus itaque corollarium quartum theorematis 34. (§. 228 *Geom.*), quod revera est corollarium præcedentis tertii, cum non theorema ipsum, sed ejus corollarium tertium ingrediatur demonstrationem tanquam principium. Propositio in eodem contenta hæc est: Si in triangulo rectangulo cathetus unus sumatur pro basi, erit alter altitudo. Hæc propositio ita exponitur. Sit MKL triangulum rectangulum, MK & KL catheti ejus. Dico si KL sumatur pro basi, ore MK altitudinem ejus. Hypothesis adeo est quod triangulum MKL sit rectan- Tb. I. Fig. 11.

rectangulum, MK & KL sint catheti, & KL sumatur pro basi; thesis autem, quod cathetus MK sit altitudo trianguli. Demonstratio ita resolvitur, si nihil perceptioni confusæ tribuere, sed singula ad notionem distinctam reducere volueris. Figura MKL triangulum rectangulum est *per hypothesin.* Succurrit definitio 52 (§. 91. *Geom.*): In triangulo rectangulo angulus unus rectus est. Unde concluditur: In figura MKL angulus unus rectus est: Porro latera MK & KL sunt catheti *per hypothesin.* Succurrit definitio 57 (§. 96 *Geom.*). Catheti trianguli rectanguli angulum rectum intercipiunt. Unde infertur. Angulus K rectus est. Studio utor syllogismo cryptico, quem a crypsi facile liberabit in Logica versatus, tum quia syllogismi cryptici frequentissime sua veluti sponte sese offerunt in demonstrationibus, manifesti autem studio quærendi; tum ut crypseos in ratiocinando idea animo sese insinuet profutura in Logica, ubi theoria syllogismorum crypticorum traditur. Ceterum hanc conclusionem, quam modo intulimus, unica etiam ratiocinatione colligere licet hoc modo: Angulum K in triangulo rectangulo MKL catheti intercipiunt *per hypothesin.* Angulus in triangulo rectangulo, quem catheti intercipiunt, rectus est. Ergo angulus K rectus est. Ex eo, quod angulus K rectus sit, per immediatam consequentiam infertur: Cathetum MK cum altero KL efficere rectum. Quodsi hanc conclusionem sumas tanquam præmissam novi syllogismi, vi definitionis lineæ perpendicularis (§. 78 *Geom.*) succurrit principium: Linea recta cum altera efficiens angulum rectum ad eandem perpendicularis est. Unde colligitur: Cathetus MK ad alterum KL perpendicularis est. Quodsi perpendas ex puncto M ad rectam KL ductam esse perpendicularem MK, succurrit vi definitionis 47 (§. 85 *Geom.*) principium: punctum, ex quo perpendicularis ad rectam duci potest, eidem rectæ opponitur, quod scilicet ex definitione, animo obversante per consequentiam immediatam elicitur. Unde infertur: Punctum M catheto trianguli KL opponitur. Jam re-

ctæ KM & LM in puncto M concurrunt ad formandum angulum KML, ut adeo M sit vertex hujus anguli, quod per definitionem 26 (§. 54 *Geom.*) patet, nec demum per ratiocinia distincta elicere lubet. Hoc ubi perpendis, ac præterea ex hypothesi sumis quod KL sit basis trianguli, succurrit definitio 74 (§. 114. *Geom.*): Vertex figuræ est vertex anguli basi oppositus. Unde infertur: Punctum M est vertex figuræ seu trianguli MKL. Recordatus quod MK sit ad KL perpendicularis *per demonstrationem*, hoc formas judicium: Cathetus MK est perpendiculum ex vertice trianguli M in basin KL demissum. Quodsi denique huc animum advertis, succurrit principium (§. 227. *Geom.*): Perpendiculum ex vertice figuræ in basin ejus demissum est altitudo figuræ. Atque hinc tandem concludis: Cathetum MK esse altitudinem trianguli rectanguli MKL.

§. 60. Quodsi hanc demonstrationem symbolice repræsentare volueris, hoc modo id fieri debere, ex anteriotibus abunde liquet.

Hypothesis.	*Thesis.*
MKL △ rectangulum.	MK altitudo
MK & KL catheti	
KL basis	

Demonstratio.

I.

MKL △ rectangulum *per hypothesin*

1. In △ MKL angulus unus rectus

II.

MK & KL catheti △ rectanguli MKL *per hypoth.*

2. Angulus K rectus.

III.

MK cum KL efficit rectum *per demonstr. n.* 2.

3. MK ad KL perpendicularis.

IV.

MK ad KL perpendicularis *per demonstr. n.* 3.

4. M opponitur ipsi KL.

V.

M vertex anguli KML, *quod patet intuitive.*

5. M vertex △ MKL

VI.

VI.

M vertex △ MKL *per demonstr. n.* 5.

MK perpendicularis ad KL *per demonstr. n.* 3.

KL basis *per hypothesin.*

adeoque

MK perpendiculum ex vertice M in basin KL demissum.

MK altitudo △ rectang. MKL.

§. 61. Insunt resolutioni demonstrationis præcedentis, quæ attentionem merentur. Nimirum quando per notiones confusas clara perspicimus, quæ distincte cognoscenda ratiociniis inferenda, saltum in ratiocinando committimus: qui quando admitti possit citra lapsus periculum, ex resolutione confuse perceptorum in ratiocinia patet. Quodsi integram Arithmeticam & Geometriam eo modo pertractare libuerit, quem præscripsimus & exemplis illustravimus, vix quicquam in theoria Logicæ occurret, cui non lux affundatur. Ipsa quoque resolutio demonstrationis corollarii, quam modo in medium attulimus, clarissime docet, cur in definiendo fuerimus prolixiores, quam vulgo fieri solet, & cur multa demonstravimus principia, quorum nullus in Elementis Geometriæ locus esse solet. Etenim omissis istis definitionibus atque principiis in demonstrationibus saltus in demonstrando committuntur, nec distinctam hujus notionem consequi datur, ubi nunquam quæ per notiones confusas clara putantur distinctis ratiociniis inferuntur. Equidem non nego tyronibus initio studii mathematici molestum esse hunc rigorem, immo superfluum videri, propterea quod demonstratione non indigere existimant ea, quæ absque demonstratione vera intelliguntur; non tamen hinc sequitur, rigorem istum sua carere utilitate. Quamvis adeo initio studii mathematici in gratiam tyronum ab eo tantisper sit recendendum, in progressu tamen non negligendus. Ea de causa in Elementis Germanicis multa non definivimus, quæ in Latinis definiuntur; multa sine demonstratione sumimus in illis, quæ in hisce demonstrantur. Nec hoc fecimus sine prægnantibus rationibus, quæ manifestæ evadent per ea, quæ capite sequente dicentur. Non

defuere, qui tantum definitionum & principiorum demonstratorum apparatum improbarunt, immo autores nobis fuere, ut in nova editione resecaremus, quæ ipsis superflua videbantur, propterea quod evidentes sint demonstrationes absque illis definitionibus & absque principiorum istorum demonstrationibus. Enimvero si nostram demonstrationum resolutionem viderint & ex sequentibus consilium intellexerint, quo id fecimus; non dubitamus fore, ut aliud sit ipsorum judicium.

§. 62. Probe autem notandum est, tum demum demonstrationes esse naturales, seu ordinatas, & completas, adeoque consummatas, quales in Logica requirimus (§. 799. 854. 855. *Log.*), si eo modo resolvantur, quem præscripsimus, ut plenaria oriatur convictio, nec quicquam quoad evidentiam desiderari possit. Et qui in Psychologia empirica satis fuerit versatus, ex principiis ibidem traditis demonstrabit, tum demum facultatum animæ in cognoscendo rectum fieri usum, ubi demonstrationes eo modo expenduntur, quo easdem resolvere docuimus. Nec minus patebit, in demonstrando tum eum fieri facultatum cognoscendi usum, quem in communi cogitationum sese mutuo excipientium serie observamus.

§. 63. Nos in Elementis nostris demonstrationes eo ordine digessimus, ut in ratiocinia ex hypothesi & superaccedente præparatione, si quando opus est, deducta & inter se concatenata facile resolvi possint. Etenim conclusiones eo ordine sese invicem excipiunt, quo in repræsentatione symbolica exhibentur, & iis adjiciuntur citationes, quibus insinuantur principia, quæ in resolutione commemorantur. Sumuntur etiam ex hypothesi & in demonstrationibus problematum ex constructione, unde infertur conclusio, immo etiam ex demonstratis conclusiones, nisi immediate ingrediantur ratiocinium proxime sequens, ut eandem bis poni inconsultum foret. Saltus si quos admittimus, quemadmodum in corollario, quod exempli loco modo adduximus, tales

sunt,

ſunt, ut, niſi acutior fueris in demonſtrando, eos non animadvertas, quod oculis in ſchema converſis per ſe clara videntur, veluti quod M ſit vertex trianguli, quod MK & KL intercipiant rectum K. Nullum vero in demonſtrationibus noſtris deprehendes hiatum, ut omitterentur quædam, quæ ad formanda ratiocinia ſunt neceſſaria, & ſine quibus ſingula, quæ ad demonſtrationem requiruntur, formari nequeunt: qui ipſe hiatus demonſtrationem reddit incompletam (§. 854. *Log.*). Enimvero exactam hanc formam logicam naturæ animæ convenientem, quemadmodum ex Pſychologia conſtat, demonſtrationibus vulgo non tribuunt autores: unde eadem facilitate non reſolvuntur in ratiocinia, ex quibus conſtant, nec ſymbolice eo modo absque difficultate repræſentantur, quo nos easdem exhibere docuimus. Quamobrem ex noſtris quoque Elementis Matheſis minore ſtudio atque minore temporis intervallo addiſci poteſt, quam ex aliorum ſcriptis, & ſi qua ſphalmata vel typographi incuria, vel feſtinante ſcribentis calamo irrepſere, ea attentione adhibita haud difficulter corriguntur.

§. 64. Vulgo demonſtrationes non eo modo expenduntur, quo nos eas reſolvere docuimus. Immo ipſe cum Matheſi addiſcendæ operam darem, aliam viam ingreſſus ſum, donec tandem ſtudium philoſophicum cum mathematico conjungens & in rationem evidentiæ anxius inquirens in veram inciderem. Nimirum vulgo animum primo convertimus in concluſionem, quam contextus ſuggerit, & deinde inquiritur in rationem, cur ea tanquam vera ſit admittenda, quæ vel ex hypotheſi, vel ex definitione aut propoſitione quadam anteriore petita & cum ſchemate oculis ſubjecto collata attento vim conſequentiæ confuſe percipiendam exhibet nullo ratiocinio diſtincte formato. Ex. gr. Si quis demonſtrationem theorematis 6 (§. 156. *Geom.*) expendere voluerit, is concluſiones $x+y$ & $y+o=180$ confert cum figura, ut intelligat, quid affirmetur. Quærit deinde, cur hæc propoſitio ſit vera & §. 148. qui citatur, evolvens, Tab. I. Fig. 9.

 ubi

ubi legit angulos deinceps poſitos junctim ſumtos conficere 180, recurrit ad figuram, ex qua ubi confuſe percipit, angulos *y* & *x*, itemque *o* & *y* eſſe deinceps poſitos, duas iſtas concluſiones admittit tanquam veras. Deinde recordatur, quod demonſtrandum ſit, angulos *o* & *x* eſſe æquales, hanc concluſionem cum illis confert, oculis in figuram conjectis. Et ubi videt, eos relinqui, ſi angulus communis *y* auferatur; theorematis veritatem admittit, cur hoc faciat quæſitus reſpondens, quia ab æqualibus idem aufertur, ſeu particulariter, quia angulus communis *y* aufertur, axioma iſtud, quod eodem ab æqualibus ablato æqualia relinquantur, nonniſi confuſe ſibi repræſentans. Unde audias alios reſpondentes, hoc per ſe patere. Solenne enim eſt hominibus, ut per ſe liquere dicant id, quod per confuſas perceptiones verum apparet, cur vero verum ſit rationem reddere nequeunt. Admittuntur hinc ſaltus & hiatus in demonſtrando, quæ initio ſtudii mathematici ſubinde haud parum obſtant evidentiæ ad plenariam convictionem requiſitæ, antequam confuſis iſtis ratiocinationibus adſueſcas, ut familiaritas ſuppleat defectum evidentiæ.

§. 65. Quid interſit diſcriminis inter noſtram demonſtrationum reſolutionem & communem eas expendendi morem, in ſeipſo experietur, qui initio ſtudii mathematici utramque viam ingreditur. Magis autem idem animadvertet ubi in philoſophia noſtra verſatus utrumque modum expendendi demonſtrationes inter ſe confert. Quam diverſi autem ſint fructus, quos hinc percipere datur, ex capite ſequente eluceſcet. Dicta igitur de ſecundo cognitionis gradu acquirendo ſufficiant.

§. 66. Reſtat ut dicamus de tertio cognitionis gradu, quomodo ad eum perveniatur, quantum hic datur. Tertius cognitionis gradus in eo conſiſtit, ut ex iis, quæ cognovimus, alia adhuc nobis incognita proprio Marte eruere valeamus (§. 1). Si quis demonſtrationes noſtra methodo reſolvit, is modum colligendi ex aſſumtis quæſitum continuo ratiociniorum nexu inde perſpicit (§. 38. 41. 47. 52. 54.

54. 59.). Quodsi ergo habitum resolvendi demonstrationes præscripto modo sibi comparaverit; habitu ratiocinandi pollet, quo in veritatibus sibi adhuc incognitis eruendis opus habet. Quamobrem ista demonstrationum resolutio maximopere quoque commendanda est in usum tertii cognitionis gradus, ita ut ad tertium appropinquemus, dum secundo acquirendo studemus. Et qui ad tertium cognitionis gradum adspirat, is multus esse debet in demonstrationibus resolvendis, cum omnis habitus non modo acquiratur, verum etiam perficiatur, augeatur & conservetur continuo exercitio (§. 430. 431. *Psych. empir.*). Quamobrem cui tertius cognitionis gradus curæ cordique est, is acquiescere non debet in Elementis Arithmeticæ & Geometriæ, sed ad alias quoque Matheseos partes progredi tenetur.

§. 67. Si ex assumtis ratiocinando colligendum est, quod in thesi continetur, ipsa resolutio demonstrationis præscripto modo facta loquitur, non opus esse ut hoc tanquam cognitum præsupponatur. Quamobrem sub generali tantummodo determinatione supponi potest tanquam quærendum. Unde theoremata convertere licet in problemata, quæ sub data in hypothesi conditione investigari jubent, quod thesis continet. Ita theorema de æqualitate angulorum verticalium (§. 38.) in hoc convertitur problema: Invenire rationem angulorum verticalium ex intersectione duarum linearum rectarum prodeuntium. Similiter theorema de congruentia triangulorum angulum æqualem cruribus æqualibus comprehensum habentium (§. 40.) in sequens abit problema: Invenire rationem triangulorum angulum unum æqualem æqualibus cruribus comprehensum habentium & rationem, quam habent anguli duo reliqui unius ad duos reliquos alterius sigillatim, necnon latus tertium unius ad latus tertium alterius. Theorema arithmeticum de quotis ex divisione duarum quantitatum per eandem tertiam resultantibus quantitatibus divisis proportionalibus (§. 47.) in hoc problema transmutatur: Invenire ratio-

nem

nem quotorum, qui prodeunt, si duæ quantitates per eandem tertiam dividuntur. Denique corollarium, quod catheto uno trianguli rectanguli sumto pro basi cathetus alter sit altitudo (§. 59.) ad problema redigitur hoc modo: sumto catheto uno trianguli rectanguli pro basi, invenire aut determinare altitudinem ipsius. Discere hinc licet, quomodo quod jam inventum est spectetur ut adhuc inveniendum, & instar problematis proponatur ad exercendam artem inveniendi. Sane omnia theoremata non modo in Arithmetica atque Geometria, verum etiam in omni Mathesi reliqua hoc modo ad problemata rediguntur, quæ tanquam inveniendum proponunt, quod jam cognitum est, dum exercitii gratia tanquam adhuc incognitum supponitur.

§. 68. Quodsi theoremata ad formam problematum fuerint reducta, quibus aliquid inveniendum proponitur; data a quæsitis sunt distinguenda. Quoniam in hac conversione aut, si mavis, reductione, quæ in hypothesi continentur, sumuntur tanquam data, quod vero in thesi continetur sub determinatione quadam generali exhibet quæsitum; data & quæsita eodem prorsus modo a se invicem distinguuntur, quo superius thesin ab hypothesi separavimus. Ita in exemplo primo angulorum verticalium dari supponimus duas lineas sese mutuo intersecantes, ex quarum intersectione necessario oriuntur anguli verticales; quæritur autem, quænam sit horum angulorum ratio ad se invicem. In thesi theorematis determinatur ratio, quæ inter eos intercedit, nimirum quod sit ratio æqualitatis. Ast hic qualis ea sit, ignotum supponitur & investigari jubetur. In exemplo secundo de congruentia triangulorum datur in duobus triangulis ratio, quam habet angulus unus unius a ad unum alterius A, ratio cruum ab ad AB & ac ad AC, nempe quod ubivis sit ratio æqualitatis, seu $a = A$, $ab = AB$ & $ac = AC$: quæritur autem ratio lateris tertii ab ad AB, anguli b ad B, anguli c ad C & totius trianguli acb ad totum ACB. Immo quæri etiam potest, utrum triangulum acb sit simile, an dissi- Tab. I. Fig. 6.

dissimile triangulo ACB. In thesi theorematis denuo determinatur ratio horum omnium ad se invicem, qualis sit, scilicet quod sit ratio æqualitatis, seu $bc = BC$, $b = B$, $c = C$ & $\Delta\, acb = \Delta\, ACB$. Hic vero eadem tanquam ignota supponitur & investigari jubetur. In exemplo tertio, quod arithmeticum est, dantur duæ quantitates, datur quantitas tertia, per quam istæ dividendæ, ut duo prodeant quoti; quæritur ratio, quam habent quoti hi ad se invicem. In thesi theorematis eadem determinatur, nimirum quod eadem sit cum ratione quantitatum divisarum; sed hic tanquam ignota supponitur & investigari jubetur. Denique in exemplo quarto datur species trianguli MKL, nimirum quod sit rectangulum, datur etiam basis, scilicet quod ea sit cathetus KL, determinari jubetur altitudo. In theoremate seu corollario, quod in problema conversum fuit, altitudo determinatur, nimirum quod ea sit cathetus alter MK. Hic vero demum quæritur. Videmus adeo, quomodo data a quæsitis distinguantur.

§. 69. Enimvero non sine ratione data a quæsitis discernuntur. Cum enim id, quod quæritur, per ea, quæ dantur, determinetur; ex datis ratiocinando colligendum est quæsitum. Facimus hoc, dum demonstrationem nostro more resolvimus, neque enim in omni ratiocinatione supponitur tanquam cognitum, quod inde tandem colligitur, quando ratiocinatio finitur. Quamobrem patet ad inveniendum, quod quæritur, non aliud requiri, quam ut modo præscripto ratiocinemur. Nostræ igitur resolutiones demonstrationum totæ analyticæ sunt, ostendentes modum, quo ex datis colligitur quæsitum, seu ratiocinando perveniatur ad id, quod investigandum erat. Eædem adeo non minus ad tertium cognitionis gradum ducunt, quam ad secundum: id quod non obtinet, ubi communi more demonstrationes expenduntur (§. 64.). Insigne hic patet discrimen, quod inter nostras demonstrationum resolutiones & communem eas expendendi modum intercedit, tanti æstimandum, quanto præstantior est gradus cognitionis tertius, quam secun-

ſecundus. Velim huc animum advertant illi, quibus noſtræ demonſtrationum reſolutiones ſuperfluæ, aut prorſus pueriles videntur. Quodſi exemplum Mathematicorum præclarorum obvertere volueris, qui ad artem eximia inveniendi pervenerunt absque iſta demonſtrationum reſolutione; hoc parum nos movebit. Objectionem enim eſſe nullam capite ſequente oſtendemus. Abſit itaque ut hoc exemplum ab iſta, quam commendavimus, demonſtrationum reſolutione te deterreri patiaris.

§. 70. Ex iis, quæ diximus & per anteriora ſatis manifeſta ſunt, liquet, quantum fallantur, qui ſibi aliisque perſuadere conantur, quod demonſtrationes ſyntheticæ, quales ſunt *Euclidis* atque Geometrarum veterum, non ſimul ſint analyticæ, conſequenter veritates eodem modo ab ipſis reperiri non potuerint, quo demonſtrantur. Etenim ſi ex aſſumtis legitime ratiocineris, quemadmodum fieri debere ex principiis Pſychologiæ empiricæ demonſtrari poteſt; eodem prorſus modo colligitur quod ignotum eſt, & ad inveſtigandum proponitur, quo, quod jam notum eſt, demonſtratur. Dedimus fidem oculatam, quæ in ſuſpicionem adduci minime poteſt. Memini me olim, cum in Academia Lipſienſi Matheſin atque philoſophiam docerem, antequam ad Profeſſionem Mathematum in Academia Halenſi vocarer, artem inveneniendi juxta regulas Dn. *de Tſhirnhauſen* in Medicina mentis explicatam per exempla exerciturus Geometriam elementarem ea methodo pertractaſſe, ut theoremata ad problemata revocarem, & quomodo ex aſſumtis in hypotheſi tanquam datis eruatur quod in theſi continetur tanquam quæſitum oſtenderem, ipſaque problemata tanquam nondum ſoluta, ſed adhuc ſolvenda proponerem, idemque imitarer in Arithmetica. Unde contigit in Elementis Germanicis Arithmeticam practicam a me pertractari methodo vere analytica, ut ex unica notione numeri rationalis, qui juxta definitionem *Euclidis*, ſiſtitur tanquam unitatum multitudo, nimirum juxta methodum geneticam tanquam ortus ex continua unitatis additione, integram Arith-

rithmeticam practicam deduxerim, tyronum captui accomodato modo: quod tantisper attenti facile animadvertent, iis autem satis superque perspectum est, qui me eandem explicantem audiverunt. Dedimus etiam hinc inde specimina quædam in his ipsis Elementis Latinis, veluti ubi de extractione radicum & numeris æque differentibus agitur.

§. 71. Ex resolutione demonstrationum præscripto modo facta prætetea videre est, singula ratiocinia, quibus colligitur quod demonstrandum erat, aut, ubi theorema in problema mutatur, quod investigandum fuerat, supponere aliquam definitionem vel propositionem jam cognitam, quæ vel ope ejus quod assumitur seu datur, vel auxilio conclusionum jam elicitarum in memoriam revocatur. Patet etiam ne unicum quidem ratiocinium abesse posse, siquidem ex assumtis inferendum, quod demonstrandum, vel ex datis deducendum, quod investigandum erat. Etsi enim non omnes ratiocinia distincte expendant, in confusis tamen ipsorum notionibus, quæ animo obversantur, actu continentur. Quælibet adeo veritas latens, ubi in apricum producenda, certas veritates cognitas supponit, quarum si vel una ignoratur, ut quæsitam invenias fieri nequit. Quo plures igitur veritates, hoc est, definitiones & propositiones tibi perspectæ fuerint, eo plures quoque invenire poteris, cum abundes principiis, quibus ad ratiocinandum indiges ex datis inventurus quæsitum. Quamobrem dum secundo cognitionis gradui acquirendo studes, ad tertium quoque acquirendum te præparas, immo aptum reddis. Qui inoffenso pede in detegenda veritate latente ex iis, quæ dantur, progredi voluerit, ei principia, quibus ad ratiocinandum opus habet, familiaria esse debent, ut ea veluti sponte sua memoriam subeant, quoties eorum usus requiritur. Definitiones itaque & propositiones, in quarum etiam numerum referuntur resolutiones problematum cum eo, quod fieri jubetur, in theorema conversæ, memoriæ firmiter infigendæ sunt ei, qui ad tertium cognitionis gradum adspirat, ut multus esse

 debeas

debeas in acquirendo gradu primo, antequam ad tertium properes, nisi quod expediat ea, quæ demonstrationum vi tanquam vera assecutus es, tanquam invenienda tibi proponi (§. 67.): ita enim tanto facilius & absque ulla molestia, immo potius cum insigni voluptate, memoriæ mandabis, quæ eidem firmiter inhærere debent, ac una cum gradu secundo tertium acquires.

§. 72. Demonstrationes etiam mechanicæ ad tertium cognitionis gradum ducunt, quatenus tentando manifestant incognitum (§. 32): quibus cum æquipolleant exempla in numeris (§. 35.), horum etiam usus est in tertio cognitionis gradu comparando. Quoniam tamen demonstrationes mechanicæ, perinde ac exempla (§. *cit.*), veritatem conspiciendam non præbent nisi in casu singulari, aut ad summum in particulari (§. 33.); in iis non acquiescendum, ne cum periculo errandi a singulari ad universale argumenteris. Quamobrem propositio in casu singulari, vel particulari detecta sumi debet tanquam universalis & in problema convertenda, ac deinde inquirendum, num ex datis legitime ratiocinando universaliter erui possit, quod in casu singulari vel particulari verum cognovisti. Ita constat olim *Pythagoram* animadvertisse, si quadratum numeri 3, quod est 9, addatur quadrato numeri 4, quod est 16, summam 25 exhibere quadratum numeri 5. Quamobrem cum perpenderet, si latus unum trianguli rectanguli fiat trium, alterum vero quatuor partium, hypothenusam esse partium quinq; con sequenter quadratum hypothenusæ æquale esse quadratis reliquorum laterum; suspicio ipsi enata est, num hæc sit proprietas trianguli rectanguli, ut quadratum hypothenusæ sit æquale quadratis laterum simul sumtis. Non diffiteor levem admodum hanc esse suspicionem, si secundum regulas probabilitatis æstimetur; sed levis etiam suspicio ad investigandum verum invitat. Quamobrem ubi super trianguli rectanguli lateribus fuere constructa quadrata, superaccedente præparatione ad comparationem quadrati hypothenusæ cum quadratis

tis reliquorum laterum requisita, eo modo detegi poterat veritas, quo theorema istud demonstravimus (§. 417. *Geom.*). Dico veritatem theorematis hoc modo detegi potuisse: cum enim constet, ipsum non uno modo demonstrari posse, & demonstrationem unamquamque nostro more resolutam monstrare modum ad veritatem liquidam perveniendi (§.70.), non una patebat ad eandem via. Demonstrationes itaque mechanicæ, si tanquam artificium heuristicum adhibeantur, haud raro faciunt, ut de problemate quodam cogites, cujus cogitatio alias animum non subiret.

§. 73. Exempla, quæ in superioribus dedimus, dicta confirmant. Ita si ducas lineas AB & CD se mutuo secantes in E, ut prodeant anguli verticales *o* & *x*, ac vi demonstrationis mechanicæ eorum æqualitatem deprehendas (§. 32), ubi porro sumis æqualitatem angulorum verticalium tanquam universaliter veram & hoc theorema in problema convertis (§. 67.), eodem modo eruetur veritas in omni casu, quo theorema hoc demonstrandum esse ostendimus (§. 38. 70.). Similiter si construas triangulum quodcunque ACB, & deinde alterum *acb* ea conditione, ut fiat *ab*=AB, angulus *a*=A & *ac*=AC, atque triangulo *acb* exciso ex charta, in qua delineatum fuerat, ita ponas super altero ACB, ut punctum *a* in A & latus *ab* in AB cadat, atque videas, triangulum *acb* esse alteri ACB æquale, & esse præterea *bc*=BC, *c*=C atque *b*=B; ubi hoc sumis tanquam universaliter verum, & theorema in problema convertis (§. 67.), eodem prorsus modo ratiocinando assequeris, quod quæritur, quo theorema demonstrandum esse supra præcepimus (§. 41. 70.). Me tacente patebit, quomodo eadem valeant de exemplo, quod in numeris exhibet theorema de quotis ex divisione duorum numerorum per eundem tertium resultantibus numeris divisis proportionalibus, ut plura eam in rem dici non sit opus. Obiter observo, demonstrationem mechanicam de congruentia triangulorum, ubi ad notionem congruentiæ animum advertis, simul insinuare principia, quibus

Tab. I. Fig. 9.

Tab. I. Fig. 6.

opus est ad ratiocinandum sive in demonstratione synthetica, sive in investigatione ejus, quod quæritur, ut adeo idea confusa, quæ oculis obversatur, integram demonstrationem contineat ab ea abstrahendam, si ad notionem distinctam revocetur. Immo notionem theoremati respondentem esse universalem agnoscimus, si in rationem coincidentiæ eorum, quæ in triangulis discernuntur, inquirimus, quatenus patet eandem rationem redire in quolibet casu. Coincidit hic demonstratio mechanica cum exemplis, quibus universaliter repræsentavimus numerorum quadratorum & cubicorum genesin (§. 262. 266. 277. 280. *Arithm.*). Ex. gr. in exemplo numerico 16 quadratum numeri 4, quæ est pars secunda radicis, prodit, quia 4 ducitur in seipsum (§. 246. *Arithm.*). Idem vero cum fiat in quocunque exemplo alio, eadem quoque semper adest ratio, cur quadratum partis secundæ prodire debeat. Similiter in exemplo geometrico punctum *b* cadit in B, quia *a* ponitur super A & *ab* super AB, estque *ab* = AB. Singula vero cum eodem modo sese habeant in exemplo quocunque alio, eadem semper adest ratio, cur punctum *b* in B cadere debeat. Principium nimirum ontologicum est, quod posita ratione sufficiente ponatur etiam id, quod propter eam potius est quam non est (§. 118. *Ontol.*): quod principium in Arte inveniendi multum habet usum.

§. 74. Constat ex superioribus (§. 40), hypothesin solam non semper sufficere, ut inde colligatur, quod erat demonstrandum, sed præterea accedere debere præparationem, qua superadduntur iis, quæ in hypothesi sumuntur, adhuc alia eadem non invita sumenda, ut ex sumtis colligi possit, quod thesis continet. Quoniam theorematis in problemata conversis, quibus investigandum proponitur, quod thesis insinuat (§. 67.), ratiocinatio ex assumtis tanquam datis eodem modo procedit ad colligendum quæsitum, quo in resolutione demonstrationis præscripto modo facta colligitur quod demonstrandum erat (§. 70.); facile intelligitur, præparatione eadem non minus opus

opus esse in veritate investiganda, quam in jam inventa demonstranda. Quando præparatione opus sit, quivis animadvertit, nimirum, quando animum advertens ad assumta deprehendit, deesse principia, quorum vi ex iis elicitur conclusio una, vel plures eliciuntur, prout casus tulerit. Hic itaque dispiciendum, num præter ea, quæ hypothesis continet tanquam determinantia id, quod thesi continetur, sumi adhuc possint alia istis minime repugnantia, quibus accedentibus hypothesis apta efficitur ad conclusiones vi principiorum anteriorum inde inferendas. In demonstrationibus præparatio ista non demum quærenda, sed Autor, qui theorema demonstrat, eam suppeditat. Ast ubi theorema per modum problematis proponitur, præparatio non tanquam cognita spectari potest, sed adhuc incognita supponitur; non tanquam jam inventa consideranda venit, sed tanquam quærenda spectatur. Ad tertium igitur cognitionis gradum adspirans inquirere tenetur, quomodo præparatio innotescere potuerit. In exemplo de triangulis, angulum æqualem æqualibus cruribus comprehensum habentibus constat, datis cruribus cum angulo intercepto construi posse triangulum, consequenter per crura data & angulum interceptum datum triangulum non minus integrum, quam latus ejus tertium eidemque adjacentes duos angulos reliquos determinari, adeoque in hypothesi nihil eorum deficere, quæ assumenda sunt, ut inde colligi queant, quæ per ea determinantur. Quoniam vero quæritur triangulorum ratio, ratio lateris tertii unius ad tertium alterius, & ratio angulorum ad idem adjacentium in uno ad angulos eidem adjacentes in altero sigillatim; ratio vero omnis vel æqualitatis vel inæqualitatis est (§. 130 *Arit.*); per modum hypotheseos tantisper sumitur, rationem æqualitatis hic obtineri. Hæc hypothesis cum examinanda sit, utrum veritati consentanea sit, nec ne, quæritur quomodo æqualitas innotescat. Quamobrem cum juxta notionem communem æqualitas æstimetur ex congruentia, notio congruentiæ insinuat triangulum unum super altero poni debere. Atque adeo in

in præparationem incidimus. Vides adeo, quomodo notiones communes inſinuare queant præparationem: id quod tamen non ſemper procedit, cum non omnia ex notionibus communibus immediate deduci poſſint.

§. 75. Quoniam tamen per naturam animæ impoſſibile eſt, ut quicquam nobis in mentem veniat, niſi quatenus antea cognita beneficio eorum, quæ nunc cogitamus, vel in memoriam revocantur, vel ratiocinationem ingrediuntur; quæ ex notionibus communibus immediate deduci nequeunt, ex aliis utique notionibus derivanda. Quamobrem ut hoc appareat, ſumamus exemplum alterum, quo uſi ſumus in ſuperioribus (§.54) in demonſtratione problematis de invenienda media proportionali inter duas rectas datas in hoc theorema converſi: Si ex quocunque puncto diametri excitetur perpendicularis peripheriæ circuli occurrens, erit ea inter ſegmenta diametri perpendicularis. Patet hic demonſtrandam
Tab. I. Fig. 10. eſſe proportionem linearum AB, BD & BE ex eo, quod BD ſit ad AE perpendicularis & ADE ſemicirculus. Quamobrem cum conſtet, triangula ſimilia habere latera æqualibus angulis oppoſita proportionalia, conſequenter linearum proportionem ex triangulorum ſimilitudine colligi poſſe; ideo liquet, diſpiciendum eſſe, annon lineis quibusdam ductis, ut prodeant triangula, obtineri poſſint triangula ſimilia. Ducuntur itaque ſubtenſæ arcuum AD & DE, quia ſic prodeunt triangula ADB, ADE & DBE, quæ per modum hypotheſeos ſumuntur tanquam ſimilia ab eo, qui veritatem demum inveſtigat, & deinde experimur, num eorum ſimilitudo demonſtrari poſſit, conſequenter num hæc bene ſumta fuerit. Quodſi modum, quo in hanc præparationem incidis, diſtincte perpendis, evidens eſt, id quod demonſtrandum eſt ad animum revocare ſimilitudinem triangulorum, cujus notionem antea tibi acquiſiviſti, & ex hypotheſi theorematis patet, ductis rectis AD & DE obtineri triangula, quæ utrum ſimilia ſint, nec ne, angulos eorum inter ſe conferenti innoteſcit, cum ex anterioribus conſtet, triangulorum ſimilitudinem ab æqualitate angulorum pendere, conſequen-

quenter per eandem probari. Nimirum in inveniendo conjecturis locus est, ubi ex iis, quæ dantur, vi principiorum tibi perspectorum ratiocinando colligi nequit, quod quæritur, quemadmodum in demonstranda æqualitate angulorum verticalium succedit (§. 38.). Cum vero conjectando nonnisi casu prima statim vice incidamus in veritatem; ideo haud raro variis modis tentanda est præparatio, antequam in eam incidas, quæ recta est: id quod satis experiuntur, qui veritati proprio Marte eruendæ operam navant. Enimvero de iis hic dicere disertius, quæ ad artem inveniendi spectant, nostri non est instituti, ubi tantummodo docemus, quomodo ad præparationem pervenire potuerint, qui bene positam retinuerunt. Bene autem positas esse eas, quæ in demonstrationibus adhibentur, ipse successus in demonstrando probat. Non tamen existimandum est, quasi earundem inventores prima statim vice in eas inciderint, queadmodum exemplum modo datum insinuare videtur; sed potius tenendum, tentatis haud raro pluribus sine successu eam retentam fuisse, quam successus approbabat. Sed talia suo tempore demonstraturi sumus a priori ex ipsa animæ natura in Arte inveniendi, si quidem Deo visum fuerit corporis animique vires eo usque conservare, donec ad hanc telam pertexendam ordo nos deducet.

§. 76. Hic non aliud agendum est, quam ut ostendamus, quomodo inquiramus in modum, quo ad præparationes in Elementis nostris occurrentem perveniri licuerit, reddendo rationem, cur hoc modo fiat, tum ex conditione propositionis demonstrandæ, tum ex anterioribus, quæ tanquam cognita & nobis familiaria supponuntur. Quodsi ergo ad imitationem eorum, quæ exempli loco in medium attulimus (§. 74. 75.) præparationes omnes in Elementis nostris expendere libuerit, nulli dubitamus lucem affulsuram sufficientem iis, qui ad tertium cognitionis gradum adspirant. Quibus vero in secundo acquiescere visum est, illi hac disquisitione non habent opus, huicque labori supersedere possunt ac debent. Sufficit enim iis præpara-

ratione, prouti præſcribitur, ad hypotheſin accedente, demonſtrationem legitime procedere, qua animus convincitur verum eſſe, quod erat demonſtrandum.

§. 77. Illud adhuc ſupereſt, ut doceamus, quomodo procedendum ſit, ſi reſolutionem problematis ſupponis tanquam incognitam, adeoque eandem conſideras tanquam inveniendam. Ex hac enim hypotheſi perinde ac in theorematis vi anteriorum ratiocinando colligendum, quid fieri debeat, ut facias, quod erat faciendum. Sumamus exempli loco problema de linea recta per datum punctum alteri recta parallela ducenda. Supponamus factum, quod petebatur, nimirum rectam MN, quæ per datum punctum V tranſit, alteri RS, quæ data ſupponitur, eſſe parallelam. Quodſi hoc ſumis, ex anterioribus ſuccurrit: perpendicula inter duas parallelas intercepta æqualia eſſe (§. 226. *Geom.*). Unde infertur: duo quæcunque perpendicula inter rectas MN & RS æqualia ſunt. Porro conſtat, quod V ſit punctum extra lineam RS datum.

Tab. I. Fig. 7.

Huc animum advertenti ſuccurrit (§. 216. *Geom.*), a dato puncto extra lineam datam perpendicularem demitti poſſe. Unde infertur, poſſe quoque ex puncto V ad rectam RS demitti perpendicularem, nempe VK. Succurrit porro, ubi perpendis, duas requiri lineas perpendiculares inter rectas MN & RS, ut per earum æqualitatem pateat parallelismus ipſarum *per demonſtrata*, ex quovis puncto intra rectam datam aſſumto erigi poſſe perpendicularem (§. 212. *Geom.*). Unde denuo infertur, ex puncto quocunque lineæ RS veluti T erigi poſſe perpendicularem TA. Jam quia MN ſupponitur ipſi RS parallela & VK atque TA ſunt perpendicula inter haſce parallelas intercepta, adeoque æqualia *per demonſtrata*; reſolutio, quæ quærebatur, jam patet. Nimirum 1. ex puncto dato V demittenda eſt perpendicularis VK ad rectam RS: 2. ex puncto quolibet T erigenda eſt perpendicularis TA priori æqualis: 3. per duo puncta A & V ducenda eſt recta MN. Hæc ipſa eſt reſolutio, quæ in Elementis noſtris legitur (§. 258. *Geom.*).

§. 78.

§. 78. Patet autem, si hoc modo in resolutionem problematis inquiris, hinc simul modum problema in theorema conversum demonstrandi manifestum esse. In ea enim investiganda uteris principiis, quibus in demonstrando habes opus: id quod ex collatione eorum, quæ modo dicta sunt, cum resolutione demonstrationis superius facta (§. 52.) patet. Demonstrationes nimirum una cum resolutione una eademque opera deteguntur, ut adeoque non opus sit, nisi ut, ubi synthetice proponere volueris, quæ invenisti, ea quæ faciunt ad resolutionem, separes ad ceteris; quæ ad demonstrationem spectant. Subinde tamen etiam in Elementis nostris resolutionem & demonstrationem una exhibuimus, quemadmodum in hoc ipso casu factum, quem exempli loco produximus, & in aliis, ubi prolixior est demonstratio, veluti in problematis de extrahenda radice quadrata & cubica (§. 269. 282. *Arithm.*).

§. 79. Demus adhuc exemplum aliud. Supponatur itaque resolutio problematis 16. (§. 212 *Geom.*) de linea perpendiculari ex dato in recta data puncto excitanda. Data sit recta ML & in eo detur punctum G, ex hoc puncto G ducenda est linea, quæ sit ad rectam ML perpendicularis. Tab. I. Fig. 12. Ponatur factum, quod petebatur, nempe ducta perpendicularis GI. Succurrit ex anterioribus: Si linea recta ducenda, duo dari debent puncta, ex quorum uno ad alterum ducitur recta (§. 121. *Geom.*). Unde infertur: Præter punctum G, quod datur, determinandum esse adhuc punctum aliud I, ut recta GI duci possit. Liquet igitur, totum negotium in eo versari, ut punctum I determinetur. Ponamus denuo hoc esse factum. Sumitur itaque: Recta ex puncto I ad punctum G ducta perpendicularis est. Succurrit principium: Si recta quædam fuerit ad alteram perpendicularis, anguli deinceps positi æquales sunt (§. 79 *Geom.*). Unde infertur: Anguli MGI & IGL æquales sunt. Sumatur IG pro crure triangulorum contiguorum communi. Patet triangula ista habere angulum unum æqualem &, crus unum ejus esse æqua-

le, nempe idem. Succurrit ex anterioribus principium (§. 179 *Geom.*): Si duo triangula habuerint angulum unum æqualem duobus cruribus sigillatim æqualibus comprehensum, etiam latus tertium unius æquale erit lateri tertio alterius. Atque hinc infertur: Si præterea fiat GK=GH, erit etiam KI=HI. Atque adeo liquet, si fiat GK=GH, hoc est, si ex puncto H capiatur utrinque æquale intervallum, ex punctis K & H eodem intervallo quocunque alio (cum hic longitudinis GI nulla habenda sit ratio, sed tantummodo situs ad rectam ML) per intersectionem determinari posse punctum I, quod quærebatur, ut recta IG duci possit. Denuo manifestum est, resolutionem problematis analyticam simul continere & ejus demonstrationem. Quodsi unam ab altera separes, utraque prodibit, qualis in elementis nostris extat. Obiter moneo inter principia heuristica in Geometrica referendum esse, ut dispiciamus, num triangula congruentia & similia determinari possint, quorum ope procedat ratiocinatio ad investigandum, quod quæritur, vel demonstrandum, quod asseritur, requisita. Quomodo in hoc principium inciderint Geometræ, nostrum jam non est disquirere. Erit alibi de eo dicendi locus.

§. 80. Subinde resolutiones problematum innotescunt sola attentione ad theoremata inventa, ad quas nulla patet via, si hæc tanquam incognita supponuntur. Istiusmodi est problema de invenienda linea media proportionali inter duas datas. Etenim si supponimus lineam BD esse inventam, quæ inter duas datas AB & BE media proportionalis est, succurrit tantummodo vi definitionis (§. 155. *Arithm.*): Si fuerint tres lineæ continue proportionales, erit prima ad secundam, ut secunda ad tertiam. Atque hinc infertur: Recta data AB est ad inveniendam BD ut hæc ipsa BD ad alteram datam BE. Etsi hic ad similitudinem triangulorum tanquam principium heuristicum confugias, & sumas BD esse crus commune duorum triangulorum similium ABD & BDE videasque, si BD fuerit ad

Tab. I. Fig. 10.

AE

AE perpendicularis, angulum *x* angulo *y* æqualem conſtrui debere, quod etiam fieri poſſe conſtat (§. 208. *Geom.*); quoniam tamen BD determinatæ magnitudinis eſt, non conſtat, quantus fieri debeat angulus *x*, ut recta AD attingat punctum D, quod quæritur, atque ita determinandum, ut crus anguli *x* ſecet AE in puncto E. Nihil itaque conficies, niſi ſupponas theorema tanquam cognitum: Si ex puncto quocunque B diametri AE erigatur perpendicularis peripheriæ in puncto D occurrens; erit ea inter ſegmenta diametri AB & EB perpendicularis. Ubi vero hoc theorema tanquam notum ſumitur, reſolutio problematis de invenienda recta inter duas alias datas media proportionali ſua quaſi ſponte ſeſe offert. Etenim non multa attentione opus eſt, ut animadvertas rectas datas AB & BE in eandem rectam transferri & ſuper eadem ſemicirculum deſcribi poſſe infertur vi corollarii theorematis primi (§. 136. *Geom.*). Neque ullum eſt dubium, quin inventori reſolutionis hujus problematis ante innotuerit theorema iſtud, quam de reſolutione cogitaret. Non eſt quod excipias, nos theorema iſtud non præmiſiſſe in Elementis noſtris problemati huic. Etenim ſit ita viſum fuiſſet, præmitti poterat: ſed in ſyntheſi non neceſſarium erat. Dum enim demonſtranda eſt reſolutio, problema in iſtud theorema convertitur, atque demonſtratio ejus adjicitur, quemadmodum ex ſuperioribus conſtat (§. 54. 55.). Non nego fieri quoque potuiſſe, ut reſolutio eadem deduceretur ex aliqua proprietate trianguli rectanguli, ſcilicet ex hoc theoremate: Si ex angulo recto D trianguli rectanguli ADE demittatur ad hypothenuſam AE perpendicularis DB, erit hæc ipſa DB media proportionalis inter hypothenuſæ AE ſegmenta AB & BE. Quodſi enim ſupponas tanquam notum, quomodo ſuper data hypothenuſa conſtrui poſſit triangulum rectangulum; reſolutio problematis noſtri non minus in aprico eſt. Plures haud raro patent viæ ad eandem veritatem, & prouti vel hæc, vel alia principia tanquam cognita ſuppo-

nuntur, unus hanc, alius aliam calcat viam. Mihi tamen probabilius est, ex proprietate circuli potius, quam trianguli rectanguli resolutionem, de qua nobis sermo est, fuisse deductam. Enimvero non opus est, ut ea de re contentionis serram cum aliis reciprocemus. Ubi enim veritates tanquam quærendæ proponuntur, quæ jam inventæ sunt, sufficit ingredi viam, qua recto facultatum cognoscendi usu ad eas pervenire datur.

§. 81. Dantur integræ disciplinæ mathematicæ, quas inter Algebra eminet aut, si mavis, Analysis mathematica, quibus docetur, quomodo veritates mathematicæ sint inveniendæ. Nemo non intelligit, ad tertium gradum cognitionis mathematicæ adspiranti inprimis opus esse, ut in iis addiscendis assiduus sit. Enimvero ea de re nobis demum dicendum erit, ubi ad specialia descendemus. Hic enim nonnisi generalia tradimus, quæ in qualibet Matheseos parte observanda sunt, etsi tantummodo exempla ex Arithmetica & Geometria dederimus.

§. 82. Restat denique ut adhuc dicamus, quomodo definitiones expendere debeat, qui ad tertium cognitionis gradum adspirat. Facile apparet, inquirendum hic quoque esse, quomodo definitiones fuerint detectæ, aut inveniri saltem potuerint. Quamobrem id nobis agendum est, ut ostendamus, quomodo hæc inquisitio sit instituenda. Definitiones esse duplices, nominales & reales, in Commentatione de methodo mathematica monuimus (§. 17. 18.), ubi etiam docuimus, quomodo tum ad nominales (§. 19. *& seqq.*), tum reales perveniatur (§. 25. *& seqq.*). Juxta regulas igitur ibidem traditas definitiones ad examen revocandæ: quod quomodo fiat, uno alteroque exemplo docendum.

§. 83. *Congruentia* definitur, quod sit coincidentia terminorum, & *congruere* dicuntur, quorum iidem termini esse possunt. Definitio hæc explicat, unde congruentiam agnoscere possis in duabus magnitudinibus, veluti in duabus lineis, vel superficiebus. Quamobrem cum definitio nominalis sit, cujus benefi-

nescio res agnoscitur & ab aliis distinguitur (§. 17. *Comment. de Meth.*); definitionem hanc nominalem esse hinc colligitur. Primus modus perveniendi ad definitiones nominales consistit in eo, ut ad rem præsentem quam percipimus, animum attendamus & cum cura distinguamus, quæ distingui possunt, eaque fini singula primum sigillatim consideremus, mox vero eadem inter se conferamus. Quodsi inquiramus, utrum hoc modo definitio congruentiæ inveniri potuerit, nec ne; hoc modo eam detectam esse deprehendes. Sumantur e. gr. duo fila ejusdem longitudinis coëxtensa: dicuntur ea sibi mutuo congruere. Quodsi quæsiveris, cur sibi mutuo congruere dicantur, non aliam reddere potes rationem, quam quod ab eodem termino incipiant, & in eodem desinant, seu quod extrema eorum coincidant, ipsaq; etiam coincidant quoad longitudinem. Atque adeo patet ex lege ratiocinandi (§.349. *Log.*), coincidentiam terminorum hic dici congruentiam. Similiter notio lineæ rectæ abstrahitur a filio extenso, cujus crassities cum diminui posse concipiatur in infinitum, donec tandem evanescat; a notione confusa ejus abstrahitur notio lineæ in genere, quod sit longitudo latitudinis expers: quæ est definitio *lineæ* in genere, quam dedit *Euclides*. Quodsi jam notionem rectæ confusam ad distinctam revocare volueris, distinguenda in ea sunt, quæ distingui possunt, eaque fini singula primum sigillatim considerari & mox inter se conferri debent (§. 19. *Meth.*). **Cum in linea non concipiantur nisi puncta**, quæ a se invicem distingui possunt, & situs eorundem, quem ad se invicem habent; recta a curva differre nequit nisi situ punctorum, quæ in ea assumuntur. Advertit hoc *Euclides*: unde *Rectam* definit, quod sit linea ex æquo interjacens inter sua extrema. Enimvero cum huic punctorum situi nulla respondeat notio nisi confusa, quam verbis ex æquo interjacere inter sua extrema indigitat, eadem nempe cum notione confusa lineæ rectæ, nihil explicuit, nec definitione sua uti potuit. Nos igitur assumentes partem quamcunque rectæ AC eamque conferen- Tab. I. Fig. 13.

ferentes cum tota AB inquisivimus, num quid in situ punctorum, quæ in parte assumuntur, deprehendi possit, quod diversum sit a situ punctorum in tota assumtorum. Ubi nullam diversitatem reperiri posse deprehendimus; memores definitionis similitudinis (§. 24. *Arith.*), rectam definivimus per lineam, cujus pars quæcunque rectæ similis. Nimirum vi illius definitionis in parte ad totam collata præter magnitudinem nihil observare datur, quo ea a tota distingui possit. Quamobrem cum Linea curva sit, quæ recta non est, eademque supposita definitione rectæ hoc modo definiri poterat (*not.* §. 85. *Ont.*); nos in definitionem nostram *Lineæ curvæ* incidimus, quod nimirum sit linea, cujus partes toti dissimiles (§. 22. *Geom.*). Ita si assumas duos peripheriæ arcus quoscunque AC & AB, ducasque chordas cognomines, situm puncti C ad A & B ad A distinguere licet per diversam rationem subtensarum ad diametrum, neque enim arcuum subtensæ omnes eandem ad diametrum rationem habent, ut adeo pars arcus ab arcu integro hoc modo distingui possit. Tacemus modos alios distinguendi situm punctorum in parte, consequenter partem ipsam, a tota. Geometriæ sublimioris gnari non ignorant hoc principio distingui curvas a se invicem. Sed cum seniores Geometræ in recta a curva distinguenda hæsitaverint definitiones utriusque daturi; non opus est ut tyrones in modo, quo eædem detectæ fuerunt, inquirendo industriam suam fatigent. Tum enim idem manifestus erit, ubi in Geometria curvarum fuerint versati.

Tab. I. Fig. 14.

§. 84. Similiter videre licet ubivis lineam rectam cum altera in eodem puncto concurrentem diversimode ad se invicem inclinari posse. Unde non attenta inclinationis diversitate enata est definitio *anguli* in genere (§. 54. *Geom.*), quod scilicet sit duarum linearum in puncto uno concurrentium mutua inclinatio. Quodsi ergo recordatus a puncto quovis ad punctum quodvis lineam rectam duci posse (§. 20 *Geom.*), crura anguli CAB recta CB jungi concipias, reflectendo super iis, quæ in figura, quæ sic prodit, distin-

Tab. I. Fig. 6.

diſtinguuntur, reperitur (§. 19. *Meth.*); definitio trianguli in genere, rectilinei ſcilicet, quoniam in Geometria elementari cum aliis nullum nobis eſt negotium, quod ſit figura tribus lineis rectis terminata (§. 87. *Geom.*). Quodſi perpendis in hac definitione non determinatam eſſe rationem laterum AB, BC & AC & recordaris rationem omnem vel eſſe æqualitatis, vel inæqualitatis (§. 130. *Arith.*); addendo determinationem rationis laterum ad ſe invicem, naſcuntur triangulorum ſpecies (§. 22. *Meth.*). Nimirum ſi tria latera habeant ad ſe invicem rationem æqualitatis, ſeu omnia inter ſe æqualia ſint, definitio præſto eſt *Trianguli æquilateri* (§. 88. *Geom.*). Si ſumis eadem habere ad ſe invicem rationem inæqualitatis, hoc eſt, ſingula inæqualia eſſe; definitionem habes *Trianguli ſcaleni* (§. 90. *Geom.*). Denique ſi ſumis latus unum habere ad unum reliquorum rationem æqualitatis, ad alterum vero rationem inæqualitatis, ſeu duo non niſi latera æqualia eſſe, in definitionem *Trianguli æquicruri* incidis.

§. 85. A definitione trianguli æquilateri, quod tria latera æqualia habet, abſtrahitur definitio *Figuræ æquilateræ* in genere, omiſſa determinatione numeri laterum (20. *Meth.*), quod ſcilicet ſit figura, cujus latera ſingula inter ſe æqualia ſunt (§. 88. *Geom.*). Atque adeo ſatis patet, quomodo ope regularum in Commentatione de Methodo mathematica explicatarum detectæ fuerint, aut ſaltem detegi poſſint definitiones nominales Geometriæ, immo in qualibet Matheſeos parte. Idem enim quoque ſuccedere in definitionibus aliis experietur, qui tentare voluerit.

§. 86. Sufficiant igitur hæc dixiſſe de definitionibus nominalibus: reſtat ut nonnulla addamus de realibus. E. gr. lineam quandam rectam LM juxta ductum alterius rectæ LO motu ſibi ſemper parallelo, hoc eſt, ut in quolibet ſitu ſemper parallela ſit, deorſum moveri poſſe conſtat. Quamobrem ſi hoc fieri ſumis, prodit definitio *parallelogrammi* in genere. Similiter rectam quandam AC circa punctum fixum C in gyrum agi poſſe, donec redeat ad terminum A, unde digreſſa fuerat, per ſe liquet, & per notiones com- Tab. I. Fig. 3. Tab. I. Fig. 5.

communes confirmatur. Quodsi ergo hoc sumis, prodit definitio circuli realis (§. 25. *Meth.*).

§. 87. Eadem definitiones reperiri quoque potuerunt, præsuppositis definitionibus nominalibus. Parallelogrammi definitio nominalis est, quod sit figura quadrilatera, cujus latera opposita sunt parallela (§. 102. *Geom.*). Quodsi concipias rectam LM juxta ductum alterius rectæ moveri deorsum, patet figuram describi quadrilateram. Quodsi linea ponatur sibi semper manere parallela, liquet latus ON opposito LM esse parallelum, & rectas quascunque parallelas inter latera OL & MN interceptas esse æquales. Enimvero si lineæ parallelæ æquales intra easdem lineas comprehendantur, erunt quoque hæ inter se parallelæ (§. 257. *Geom.*). Unde infertur, Latus quoque MN esse opposito LO parallelum. Evidens adeo est, figuram, quæ describitur motu lineæ rectæ LM juxta ductum alterius rectæ LO sibi semper parallelo, esse quadrilateram & habere latera opposita parallela. Atque sic liquet, figuram hoc modo descriptam esse vi definitionis nominalis parallelogrammum. Nimirum si definitio nominalis parallelogrammi sumitur, parallelogrammum dici nequit nisi figura, quæ & quadrilatera est, & latera opposita æqualia habet. Quamobrem ubi definitionem realem hac supposita dare volueris, ita omnino concipienda, ut nominali non repugnet ista genesis, sed ex genesi figuræ potius demonstrari possit, nominalem definitionem eidem convenire. Quodsi excipias, supponi hic, quæ demonstranda ante sunt, quam definitionem realem ex nominali deducere valeas, nimirum quod lineæ parallelæ inter duas lineas interceptæ æquales esse debeant, ut hæ quoque inter se sint parallelæ, objectio nulla est. Ecquis enim dixerit, salva veritate, definitiones reales ex nominalibus deducendas esse nulla theoria præsupposita, quæ demonstranda ante venit. Quin potius ipsum exemplum, quod modo dedimus, contrarium loquitur. Definitiones nominales sumere licet, antequam theoremata demonstrentur. Sumere quoque licet reales, antequam demonstrentur propositiones,

mo-

modo genesis intelligatur possibilis absque demonstratione, scilicet ut nihil fieri jubeatur, quod absque demonstratione fieri posse non constet. Sed figuram, quæ per genesin prodit, esse eandem, cujus definitio nominalis datur, utique demonstrandum. Quodsi ergo demonstratio supponit principia, quæ absque demonstratione vera esse non perspicitur, illa utique ante demonstranda sunt, quam figuram genitam cum ea, cujus definitio nominalis datur, eandem esse ostendi potest.

§. 88. Facilius ex definitione nominali detegitur realis circuli, non suppositis aliis, quæ de circulo demum demonstranda. Nominalis circuli definitio est, quod sit figura plana, linea in se redeunte terminata, ex cujus singulis punctis ad punctum intermedium C ductæ rectæ sunt inter se æquales. Quodsi sumis, quod in hac definitione continetur, circulum terminari linea curva in se redeunte, atque succurrit vi intentionis inveniendi genesin curvæ, seu detegendi motum, quo describitur, describi lineam, si punctum ab uno termino ad alterum moveatur (§. 10. *Geom.*); facile animadvertis, lineam, qua terminatur circulus, describi, si punctum describens continuo motu redeat ad terminum A, unde digressum fuerat. Quodsi porro sumis vi definitionis nominalis, rectas ex singulis lineæ istius punctis ad centrum C ductas esse æquales, consequenter punctum describens A esse alterum extremum lineæ rectæ, cujus alterum extremum fixum hæret in centro C; patet, si punctum A a termino suo dimoveri debet, ut tamen alterum rectæ AC extremum in puncto C sit fixum, rectam AC circa punctum fixum C moveri debere. Vides itaque Circulum describi, si recta quædam AC circa punctum fixum C in gyrum agatur: quæ ipsa est circuli definitio realis deducta ex nominali, nulla præsupposita theoria circuli, sed tantummodo assumtis, quæ in definitione nominali continentur.

Tab. I. Fig. 15.

§. 89. Dn. *de Tschirnhausen* in Medicina mentis definitiones reales mirifice deprædicat, iisque omne tribuit pretium nominalibus nullo relicto. Enimvero quemadmodum vidimus definitiones reales ex nominali-

bus

bus deduci posse; ita vicissim nominales deducuntur ex realibus: id quod in circulo levi attentione animadvertitur. Exempla alia dedimus in solidis (§. 456. *& seqq. Geom.*). Etsi autem non negemus, ex definitionibus realibus haud raro facilius deduci, quæ ex nominalibus operosius demonstrantur, adeoque ad inveniendum eas esse admodum utiles; nominales tamen realibus præstant in rebus ad sua genera suasque species reducendis: id quod in demonstrationibus & in applicatione theoriæ ad casus obvios maxime usui est. Quamobrem definitiones nominales non sunt contemnendæ, immo certo fine realibus præferendæ, quæ ad res obvias agnoscendas & ab aliis distinguendas non adeo commodæ sunt, quam nominales: id quod ipsa circuli atque parallelogrammi definitione reali docetur.

CAPUT. II.

DE

Modo instituendi studium Matheseos intellectus perficiendi causa.

§. 90.

Non omnes in addiscenda Mathesi eundem sibi scopum præfigunt. Postquam igitur in genere docuimus, quomodo Mathesis sit tractanda, ut eam consequaris cognitionem, quam intendis; nunc porro dispiciendum est, quinam per Matheseos studium intendi possint fines, & quænam observanda sint ei, qui finem intentum consequi voluerit. Eminet inter hosce fines perfectio intellectus, quæ consistit in habitu rectum faciendi facultatum cognoscendi usum in veritate cognoscenda. Hunc finem inten-

tendere debent, quotquot ad certam cognitionem in quocunque genere cognoscibilium adspirant, sive philosophari voluerint, sive Theologiæ, Jurisprudentiæ ac Medicinæ operam navare decreverint. Ea de causa veteres neminem ad philosophiam addiscendam admittere voluerunt, nisi Geometriæ peritum, cum olim Geometria sola accurata methodo traderetur. Optandumque erat, ut idem mos in scholas nostras introduceretur. Rationes perspicientur ex iis, quæ mox tradituri sumus, & per transennam prospiciuntur vi eorum, quæ modo diximus. In veritate enim cognoscenda rectum facere tenetur facultatum usum, qui a veritatis tramite deflectere noluerit.

§. 91. Tres sunt intellectus operationes, notio, judicium atque discursus, sive ratiocinium, & hisce suppetitas ferunt facultates cognoscendi inferiores, sensus, imaginatio atque memoria, una cum facultatibus intermediis attentione ac reflexione, per quas ab inferioribus ad superiorem fit transitus: Quæ omnia satis manifesta sunt ei, qui Psychologiam empiricam cognitam atque perspectam habet. Qui adeo intellectum perficere voluerit, is rectum operationum intellectus usum facere tenetur, ac in iis eliciendis uti debet facultatibus inferioribus atque intermediis. Quamobrem studio Matheseos perficitur intellectus, si eodem habitus operationibus intellectus recte utendi, & in iis eliciendis rectum facultatum cognoscendi inferiorum ac intermediarum usum faciendi acquiritur.

§. 92. Non igitur nuda cognitione veritatum mathematicarum perficitur intellectus, sed accuratæ methodo, qua traduntur mathemata, fructus hic debetur. Ejus adeo participes non fiunt, qui methodum accuratam insuper habent. Quamobrem cum Mathesis perficiendi intellectus causa potissimum in scholas sit introducenda; parum adolescentibus & juvenibus consulunt, qui ut desidiosis placeant, methodi nullam rationem habent, sibi magis, quam ipsis prospicientes.

§. 93. Qui in primo cognitionis gradu acquiescit non alium finem sibi propositum habet, quam ut veritatem ab aliis pro-

positam intelligat (§. 1.), consequenter non aliud intendit præterquam veritatum mathematicarum nudam cognitionem. Quoniam igitur nuda veritatum mathematicarum cognitione non perficitur intellectus (§. 92.); nec fructus hujus particeps fieri potest, qui primum cognitionis gradum unice curæ cordique habet. Quod si ergo eum praxes quædam mathematicæ non juvant, veluti si agrimensorem aut architectum militarem agere decreverit, vel si principiorum mathematicorum usum non experitur in addiscendis aliis, ex. gr. in percipiendis dogmatis nonnullis physicis; Mathesin plerumque in spem futuræ oblivionis addiscit, ut studii hujus, quod multiplici ratione sese commendat cultoribus suis, nullum prorsus percipiat fructum. Unde facile intelligitur, quinam in addiscenda Mathesi oleum atque operam perdant, ut ab hoc studio potius sint arcendi, quam ad idem invitandi vanis pollicitationibus. Convenit ingenuitati docentis, ne aliquid lucelli facturus juvenes ab addiscendis iis, quæ magis profutura sunt, ad ea avocet, quæ in spem futuræ oblivionis addiscunt.

§. 94. Qui primo cognitionis gradui acquirendo eam operam navat, quam requisivimus; is attentionem ad ea, quæ discit, afferre ac tamdiu conservare adsuescit, donec illa rite intellexerit (§. 5.). Quænam ad hoc requirantur, ut definitiones intelligat (§. 6. *& seqq.*), nec in propositionibus quicquam supersit obscuri (§. 17. *& seqq.*), perspicit. Definitionum accuratarum & in disciplinis rite ordinandarum (§. 6.), ac theorematum (§. 24. 25.) & problematum & resolutionis eorundem (§. 26. *& seqq.*) genuinæ formæ ideam exemplarem animo concipit. Differentiam inter notiones distinctas & confusas, adæquatas & inadæquatas penitus perspicit (§. 6. 9. & seqq. §. 24. *& seqq.*). Quomodo recto sensuum usu faciliteter operatio intellectus addiscit (§. 7.). Quo pacto repetitio facilior minusque molesta reddatur, qua memoriæ infiguntur firmiter eadem retinenda, cognoscit (§. 15). Nemo non agnoscit, ad perfectionem intellectus pertinere, ut formet notiones distinctas & adæ-

adæquatas cognoscibilium, ut judicia formet determinata, ut resolutiones proplematum distincte concipiat, ut attentionem, prout usus requisiverit, determinet, ut usum sensuum in operationibus intellectus decernat, ut memoriæ insigendorum eademque retinendorum curam gerat. Quamobrem cum hæc perfectio intellectus acquiratur, si primo cognitionis gradui acquirendo præscripto modo studeamus; quin Matheseos studium, si nostro more tractetur, faciat ad intellectum perficiendum dubitandum non est.

§. 95. Non est quod mireris modum a nobis præscriptum ad primum cognitionis gradum adspirantibus facere ad perficiendum intellectum, cum tamen a methodo, non a dogmatis expectanda sit perfectio intellectus (§. 92.). Etenim cum secundus cognitionis gradus supponat primum, nos in acquirendo cognitionis gradu primo jam ea præcepimus, quæ vi methodi observanda sunt iis, quibus secundus curæ cordique est (§. 30), cum vulgo methodi nulla habeatur ratio & plerumque non nisi confusæ notiones memoriæ imprimantur vi imaginationis reproducendæ, quando iisdem opus est. Sane in Geometria lecta vel audita definitione oculos in schema delineatum statim conjicientes ideam definiti memoriæ insigunt, non distincte expensis, quæ in definitione continentur, eodemque modo idea schematis, quæ theorema & resolutionem problematis exhibet, eidem mandatur, quæ vi imaginationis præsens sistitur, quoties de ea re cogitamus. Parum adeo vel nihil tribuitur intellectui, facultatum vero cognoscendi inferiorum usus prædominatur. Immo ne attentionis quidem is fit usus, quem facultas cognoscendi superior exigit.

§. 96. Qui definitiones, propositiones & resolutiones problematum eo modo exponit, quem nos præscripsimus (§. 9. 17 *& seqq.*), eas ad figuras in charta delineatas & exempla exhibita applicat, qualis applicatio requiritur, dum ratiocinamur. Ratiocinatio tertia intellectus operatio est, eodemque prorsus modo ratiocinandum, dum propositiones demonstramus, vel a prio-

ri ex cognitis alia adhuc nobis incognita colligimus. Quamobrem patet, si in acquirendo cognitionis gradu primo morem nostrum sequaris, hoc ipso perfici debere intellectum. Nulla adeo intellectus operatio est, cui rite eliciendæ non inserviat modus acquirendi primum cognitionis gradum a nobis præscriptus (§. 94. *& præf.*).

§. 97. In primo igitur cognitionis gradu acquirendo omnem illum facis facultatum cognoscendi usum, qui in secundo acquirendo requiritur, immo in tertio familiaris supponitur. Est adeo modus acquirendi cognitionis gradum primum, quem nos præscribimus, præparatio ad secundum: qua facta nihil prorsus difficultatis in secundo percipitur, cum eum usum facultatum jam facere possis, quem is requirit. Me vero tacente liquet, quod, ubi primus cognitionis gradus acquiritur, antequam ad secundum accedas, una in parato habeas principia, quibus in ratiocinando opus est, dum ad secundum animum appellis. Equidem id modus a nobis præscriptus continuum habere videtur cum vulgari; non tamen utroque idem prorsus efficitur. Etenim nostro more definitiones ac propositiones pure enunciatæ memoriæ infiguntur, quales adhibendæ sunt in ratiociniis distinctis &c., dum præscripto modo expenduntur, simul familiares evadunt, quales esse debent, ut statim memoriam subeant, quando iisdem indigemus. Quodsi vero nostro more non expenduntur, nec eadem facilitate definitiones ac propositiones memoriæ mandantur, sed multa demum repetitione consequimur, quod multo temporis compendio obtineri poterat.

§ 98. Plurimum autem refert, ut definitiones & propositiones antecedentes familiares experiaris, antequam ad sequentes accedas. Etenim definitiones sequentes non intelliguntur nisi per anteriores, ubi eas ingrediuntur termini per anteriores explicati. Quamobrem ubi hæ nondum familiares experiris, sequentes tibi non possunt non videri obscuri, nec fieri potest, ut eas penitus intelligas. Similiter demonstratio non convincit, nisi prin-

principia, quæ ex antecedentibus sumuntur sensum evidentiæ secum ferant. Necesse igitur denuo est, ut tibi antecedentes definitiones ac propositiones fuerint familiares, ubi sine hæsitatione in demonstratione progredi volueris. Quid quod nec propositiones satis intelligantur, quamdiu definitiones, quibus explicantur termini in iisdem occurrentes, non fuerint familiares? Ea de causa observare licet, quod studium mathematicum difficile videatur iis, qui nulla terminorum notitia instructi ad idem accedunt, nec in repetendis iis, quæ explicata fuerunt, seduli ac frequentes sunt, cum in casu opposito nulla percipiatur difficultas. Danda vero omnino est opera, ut difficultas hæc tollatur, ne studii utilissimi efficiat desertores.

§. 99. Qui Mathesi addiscendæ operam navant, ut intellectum perficiant, iis inprimis convenit, ut in secundo cognitionis gradu acquirendo industriam suam exerceant. Methodo enim debetur hic fructus, non dogmatis, quæ in Mathesi proponuntur. Hujus autem potissima pars sunt demonstrationes, quibus veritatis eorum, quæ docentur, convincitur, ut nihil nobis dubii supersit. Secundo gradui cognitionis acquirendo inserviunt demonstrationes (§. 30.). Quamobrem si studium Matheseos intellectum perficere debet, necesse est ut in demonstrando sis assiduus.

§. 100. Intelliguntur vero hic demonstrationes syntheticæ, quales sunt *Euclidis* & Geometrarum veterum. Neque alia de causa, quam harum demonstrationum gratia, veteres voluerunt, ne ad philosophiam accedat, nisi Geometriæ peritus. Quamvis enim demonstrationes recentiorum analyticæ, quæ calculis algebraicis absolvuntur, suum etiam habere possint usum in intellectu perficiendo; ab iis tamen eundem expectare minime licet, quem spondent syntheticæ: id quod satis manifestum evadet per ea, quæ mox disertius dicentur. Inde nimirum est, ut in Mathesi licet versatissimi & inter summos Mathematicos eminentes, ubi extra Mathesin methodo mathematica uti voluerunt, minime dare

dare potuerint, quæ satisfaciunt. Exemplo nobis est *Cartesius*, vir summus, cujus memoriam egregia in Mathesi inventa posteritati commendabunt, quamdiu scientiæ honos erit. Cum enim *Mersenni* desiderio satisfacturus suum de existentia Dei argumentum ad formam demonstrationis geometricæ reducere vellet, quam parum ipsi leges methodi mathematicæ & genuina demonstrationis forma fuerit perspecta, abunde prodidit in Responsionibus ad objectiones contra Meditationes suas metaphysicas. Taceo exempla alia, quæ commemorari poterant & quibus tandem effectum est, ut extra Mathesin nullam dari certam cognitionem acutiores inde colligerent: in qua opinione ipsum scepticismum consistere, nemo est qui non agnoscat. Quodsi ergo ad certam cognitionem extra Mathesin pervenire volueris, necesse est ut methodi mathematicæ interiorem rationem perspicias, & leges ejus distincte cognoscas: id quod fieri non poterit, nisi demonstrationum syntheticarum resolutione naturæ animæ convenienter facta, quam in superioribus satis declaravimus, ut nihil in ea desiderari possit. Atque ea de causa demonstrationes nostras syntheticas eo ordine digessimus, ut facillime præscripto modo resolvi possint. Nihil enim magis intendimus, quam ut studio mathematico intellectus perficiatur, quo certæ extra Mathesin cognitioni acquirendæ sufficiat.

§. 101. Doluit ideo ipse vir summus, *Isaacus Newtonus*, quod, cum se studio mathematico totum daret, ad *Cartesii* Geometriam aliosque scriptores algebraicos statim progressus fuisset, antequam Elementa *Euclidis* ea attentione expendisset, quam merentur, nec probavit, quod hodie Geometræ methodum syntheticam veterum prorsus negligant, & in solis calculis algebraicis acquiescant, quemadmodum ex ore ipsius hausta refert *Henricus Pemberton* in præfatione ad Conspectum Philosophiæ *Newtoni*, quem patrio sermone edidit. Nullum mihi dubium est, quin, quantum sibi hoc ipso defuerit, abunde expertus fuerit, cum in divino opere Principiorum Philoso-

losophiæ naturalis mathematicorum inventa præclara methodo veterum Geometrarum proponere decrevisset. Quodsi e-enim quis more a nobis præscripto demonstrationes syntheticas resolvere didicerit, & genuinam earum formam animo comprehenderit; is facile animadvertet, quod eam non perviderit *Newtonus*, neque adeo distincte agnoverit, unde pendeat evidentia veritatis extra Mathesin, quemadmodum & *Cartesio* accidisse modo monuimus (§. 100.). Idem videre licet in eximio opere Phoronomiæ *Jac. Hermanni*, qui, cum omnem ætatem in calculis algebraicis consumsisset, methodo veterum recentiora in Mechanica & Hydraulica agnatisque disciplinis inventa demonstrare volebat. Quam parum enim sibi & lectoribus suis consulerit, quod methodo, cujus vim ac potestatem minime conprehendebat, ea proponere voluerit, quæ per calculos algebraicos assecutus fuerat, & cum laude ad utilitatem discentium proponere poterat, acutiores vident.

§. 102. Firmum itaque ratumque manet, qui intellectus perficiendi gratia ad Mathesin accedit, ei demonstrationes *Euclideas* omni cura ac sollicitudine expendendas esse: quæ qualis esse debeat, nostra demonstrationum analysis & earundem symbolica repræsentatio clarissime docet (§. 38. & seqq.). In his igitur industriam suam ingeniique vires exerceat, qui extra Mathesin evidentiam in veritatis cognitione consequi voluerit. Proprio experimento edocti sumus, non dari aliam ad evidentiam in philosophia & Facultatibus, quæ dicuntur, superioribus viam: quam si calcare nolueris, tanto pronior erit in Scepticismum prolapsus, quanto fueris acutior, & facillimum erit nubem pro Junone amplecti, nec abortus imaginationis a genuinis intellectus fœtibus distinguere dabitur. Quodsi præscripto a nobis more in Mathesi versari volueris, cessabunt querelæ de imbecillitate intellectus humani, quales movit *Huetius*, non profuturæ nisi ut sternant ad scepticismum viam non sine detrimento religionis tam revelatæ, quam naturalis. Scepticismum hodie ubivis terrarum invalescentem eversuri me-

methodo ista philosophari cœpimus, qua *Euclides* in suis Elementis olim usus. Cumque in philosophia notiones confusæ resolvendæ sint in distinctas, quas sine detrimento veritatis fert Mathesis; ipsas etiam demonstrationes geometricas ad eam formam reduximus, quam extra eandem habere debent, ne quid desit evidentiæ, ut adeo superflua existimanda non sint, quæ finis tam præclari gratia fiunt. Nec puerilia censenda sunt, quorum neglectus se vindicat in viris summis. Absit itaque ut eorum autoritate ad eundem defendendum abutaris.

§. 103. Modus, quo definitiones ac propositiones expendere docuimus omnem facultatum usum legitimum in veritate cognoscenda pollicetur ipso opere consequendum. Quodsi vero ad repræsentationem symbolicam animum advertere & regulas generales inde abstrahere volueris, verioris Logicæ præcepta consequeris, quæ in Logica nostra demonstravimus. Atque adeo reipsa experieris, Logicam artificialem tum demum esse genuinam, ubi praxi veterum Geometrarum conformis, quemadmodum in Prolegomenis Logicæ ostendimus (§. 26. *Log.*). Qui sic præparatus ad Logicæ studium accedit, non modo omnia, quæ hic docemus, penitus intelliget; verum etiam regulas ibidem traditas absque ulla hæsitatione dextre applicabit, ut nec in iis applicandis sibimet ipsi imponat, quemadmodum haud raro contingit, nec de difficultate applicandi queratur. Ubi studium Matheseos præscripto a nobis more instituerit, in studio Logicæ, quod spinosum alias ac tædii plenum videtur, non sine voluptate versabitur, nec Logicam soli scholæ addisci in seipso experietur. Etenim ideas, quæ regulis logicis lucem affundunt, tot exemplis confirmatas recta Mathematum tractatione adeo familiares possidet, ut, quoties iisdem opus est, sua veluti sponte sese sistant animo præsentes, ipsaque mathematum tractatio in continua regularum istarum applicatione cum consistat, quin continuo hoc exercitio eas applicandi habitum sit consecutus, dubitari nequit. Voluptate perfunditur animus, dum veritatis plenarie convincitur. Quamobrem cum veritatis eorum, quæ in Logica do-

docentur, convincatur, qui Matheseos studio nostro more præparatus ad studium Logicæ accedit, quin continua in eodem fruatur voluptate dubitandum non est. Docet Logica usum facultatum cognoscendi in veritate cognoscenda & applicanda. Quoniam itaque usum istum facere potest, qui nostro more in Mathesi fuit versatus, usus autem idem requiritur in singulis omnino actionibus recte determinandis, prouti abunde constabit, si quis attenta mente Tomum posteriorem Philosophiæ practicæ universalis perlustrare voluerit; utilitatem Logicæ per omnem vitam experietur, qui regulas ejus penitus intelligit & dextræ applicare didicit.

§. 104. Quoniam ea demum Logica censetur genuina, quæ praxi veterum Geometrarum conformis (§. 26. *Log.*), utrum vero huic conformis sit, nec ne, dijudicare valet, qui in Mathesi præscripto a nobis modo fuit versatus (§. 103.); nostra Matheseos quoque tractatio hunc pollicetur fructum, ut Logicam genuinam a spuriis discernamus, quales nostra ætate eduntur haud paucæ, & quæ naturali facultatum animæ usui e diametro adversantur, ita ut studium Logicæ non amplius faciat ad dirigendum facultatem cognoscitivam in cognoscenda veritate, sed intellectum potius corrumpat, ut a solida cognitione veritatis proscribaris. Neque verendum est, ne autoritas Mathematici, Logicæ non unius scriptoris, ipsi imponat: satis enim intelligit, vulgari Mathemata discendi more (§. 64.) non patefieri regulas logicas, quas nostra resolutio & analytica expressio in apricum producit. Non igitur sufficit Logicam scribi ab eo, qui Mathematicus audit, vel Geometriæ quædam elementa methodo minus accurata compilavit; sed necesse est, ut, qui Logicam scribit, in expendendis definitionibus ac propositionibus earumque demonstrationibus eum faciat facultatum usum, quem regulæ Logicæ urgent, & ut hasce ipsas regulas praxi huic conformes tradat. Vidimus paulo ante (§. 101.) deficere hic acumen Mathematicorum summorum, ut adeo mirum videri non debeat, si acumen illorum desideretur, qui

in illorum numerum referri nequeunt.

§. 105. Quoniam ad studium logicum accedere non debet, nisi qui in studio Matheseos secundum morem nostrum versatus est; ideo in Logica exempla mathematica dedimus, quippe quæ satis cognita atque perspecta supponimus, nisi ubi exempla vulgaria satisfaciunt. Accedit, quod nonnulla in Logica tradantur, quæ aliis, quam mathematicis exemplis, non eadem perspicuitate illustrantur. Bene sibi consulunt, qui saltem Arithmeticæ ac Geometriæ elementa præscripto a nobis modo perlustrant, antequam ad Logicam animum appellunt. Reipsa experientur, quod ex studio logico omnem percepturi sint fructum, qui ab eo sperari potest. Quodsi vero neglecta Mathesi ad Logicam properant, multa in iis non penitus intelligent, etsi omnia rite percepisse videantur, nec absoluto studio logico in potestate sua positum deprehendent, ut regulis Logicæ satisfaciant, hoc est, eum faciant facultatum usum, quam Logica præscribit.

§. 106. Maxima intellectus perfectio est ars inveniendi, qua ex iis, quæ cognovimus, alia nobis incognita ratiocinando colligimus. Qui eo usque in perficiendo intellectu progredi voluerint, illi tenenda sunt, quæ de tertio cognitionis gradu acquirendo inculcavimus (§. 66. & seqq.). Quodsi enim vel sola Elementa Arithmeticæ ac Geometriæ eo modo pertractaveris, qui ibidem præscribitur; non modo constabit, quomodo in veritate invenienda sit procedendum, verum etiam habitum quendam tibi comparabis ex cognitis alia incognita colligendi, consequenter aliquid saltem hujus artis acquires. Quemadmodum vero intellectus continuo magis magisque perficitur quoad promptum usum in veritate cognoscenda, si simili modo philosophiam nostram pertractare volueris, quo in acquirendo gradu secundo cognitionis mathematicæ utendum esse docuimus; ita quoque quoad artem inveniendi eundem ulterius perficies, si in philosophia facias, quæ tertii cognitionis gradus acquirendi gratia fieri debere præcepimus. Quodsi cui hoc nimis molestum videtur; is sciat velim,

lim, quæ ardua sunt, ea non facili opera acquiri. Qui vult finem, media velit necesse est, quæ ad eundem ducunt.

§. 107. Satis itaque docuimus, quomodo instituendum sit studium Matheseos, ut intellectus, quantum datur, perficiatur. Unicum adhuc superest, de quo nonnulla mihi dicenda sunt, antequam ad alia progrediar. Sunt qui sibi aliisque persuadere conantur, quasi methodus mathematica philosophiæ minus conveniat, multo autem adhuc minus in Theologia, Jurisprudentia & Medicina eidem locus sit. Equidem hoc dubium jam sustulimus in Discursu præliminari, quem Logicæ præmisimus, de Philosophia in genere, ubi (§. 139.) identitatem methodi philosophicæ ac mathematicæ demonstravimus, & in Horis nostris subsecivis ostendimus, quod & quomodo methodus mathematica adhiberi possit in Jurisprudentia & scriptura sacra interpretanda; ex nostra tamen definitionum & demonstrationum propositionum analysi singulari ratione idem elucet. Etenim per hanc manifestum est, omnem methodum mathematicam, qua usus est *Euclides*, huc tandem redire, ut operationum intellectus legitimum faciamus usum in veritate cognoscenda, qui ad evidentiam acquiritur, qua veritas indubitato agnoscitur. Hinc manifestum est, non alias homini esse facultates, quibus in cognoscendis mathematicis utitur, quam quibus opus habet ad cognoscendam veritatem quamcunque aliam, nec alium esse facultatum earundem usum in Mathesi addiscenda, vel etiam in veritatibus mathematicis inveniendis, quam qui requiritur ad certam cognitionem veritatis cujuscunque alterius, sive ab aliis inventa fuerit, sive demum nostra opera detegenda. Mathesis adeo exemplis docet, quomodo rectus facultatum cognoscendi usus fieri debeat, si ad liquidam veritatis cognitionem pervenire decreveris: id quod regulis docet Logica, quæ ideo ab exemplis mathematicis abstrahi possunt (§. 103.), ita ut earundem cum praxi Mathematicorum conformitas sit lapis Lydius genuinæ Logicæ (§. 26. Log.). Quotquot igitur in ea sunt opinione, quasi Mathesis pro-

propriam sibi habeat methodum, quæ extra eam nullius sit usus, aut methodi mathematicæ vim ac potestatem, aut genuinum facultatum cognoscendi ad certam veritatis cognitionem consequendam usum, aut utrumque ignorant. Hinc etiam videas, objectionem moveri ab iis, qui vel sunt in omni Mathesi hospites ac peregrini, vel legitimi usus facultatum cognoscendi prorsus ignari.

§. 108. Denique nostra Mathematum tractatio manifesto loquitur, eum, qui in Mathesi addiscenda præscriptum a nobis morem observat, sequi modum cogitandi maxime naturalem. Primus hoc animadverti, cum ad demonstrationum analysin præscripto a nobis modo factam animum attenderem, & publice hoc monui in Lexico mathematico, idemque postea uberius docui in Psychologia. Naturalis cogitandi modus est, qui leges animæ exacte sequitur. Quis igitur adeo vesanus est, ut sibi persuadeat, usum facultatum aliis legibus accommodandum esse in philosophia, Theogia, Jurisprudentia, Medicina, quam quas fert natura animæ?

§. 109. Etsi autem Mathesis universa faciat ad intellectum perficiendum, si eo, quem præscripsimus, modo tractetur, ut adeo optime sibi consulat, qui Elementa nostra omnia eodem studio perlustrat; quoniam tamen non omnibus tantum suppetit temporis spatium, quantum huic labori sufficit, unusquisque eo usque progredi poterit, quantum conceditur. Arithmeticæ autem & Geometriæ pertractatio prorsus indispensabilis est, quæ ideo præmittenda, antequam ad Logicam animum appellis, & hinc ad reliquam philosophiam te conferas. Immo si cui volupe fuerit integra Matheseos nostræ Elementa perlustrare, ei tamen non suaserim, ut de philosophia omnem cogitationem abjiciat, donec studium Matheseos omne fuerit absolutum; sed potius autor sum, ut Arithmetica & Geometria absoluta statim Logicæ operam suam addicet, & in Mathesi juxta Philosophiam pergat. Ita enim futurum certus sum, ut studium Matheseos ac Philosophiæ sibi mutuo lucem affundant.

§. 110. Supponimus autem Philosophiam eadem methodo esse

eſſe conſcriptam, qua in Elementis Matheſeos utimur. Quamobrem cum id ante nos fecerit nemo, nec alia ipſi ſcripta philoſophica commendare valemus, niſi opera noſtra philoſophica Latino inprimis idiomate conſcripta. Quodſi prolixitatem obtendas, nulla ſane ratio eſt, cur ea te deterreat. Etenim ſi non ante ulterius progredi volueris, quam ſingula rite intellexeris, ac veritatis eorum convictus fueris, multo minore temporis ſpatio ſcripta noſtra utiliter pelegere potueris, quam breve quoddam compendium communi more conſcriptum, modo in pertractanda Arithmetica & Geometria induſtriam tuam deſiderari paſſus non fueris. Immo valde vereor, ne ſi præſcripto a nobis more in Arithmetica & Geometria fueris verſatus, lectio aliorum ſcriptorum philoſophicorum, quam noſtrorum te efficiat ſtudii philoſophici deſertorem, aut in ſcepticiſmum deducat. Abſit, ut quis exiſtimet hæc arroganter a nobis dicta eſſe, nimia in nos fiducia, in contemtum aliorum! Veritati enim unice litamus, non loquentes niſi experta, quæ ratio defendit. Ab aliorum contemtu procul remoti aliena merita ſuſpicimus & extollimus, neminem in ſcriptis noſtris nominatim perſtringimus, iis etiam parcimus, qui in laceſſenda fama noſtra quidvis ſibi licere arbitrantur, probe memores eam non dependere a laudibus aliorum, ſed a factis propriis, omni animi contentione omnique induſtria ac diligentia in id enitentes, ut calumnias factis contrariis refellamus. Alienum a nobis eſſe exiſtimamus, ut doctrinis, quas profitemur, facta ſint contraria. Nemo igitur nobis vitio vertet, ſi aliorum utilitati velificaturi ea dicimus, quæ veritas imperat, citra injuriam alterius. Minus toleranda potius ambitio eſt, ſi quis non ſine detrimento aliorum veritatem reticeri vult, ut videatur qui non eſt. Ceterum ſi quis conſilio noſtro aurem benignam dare voluerit, re ipſa experietur vera omnino eſſe, quæ dicimus.

CAPUT. III.

De

Studio Arithmeticæ, Geometriæ & Trigonometriæ planæ in specie.

§. 111.

Arithmeticæ, Geometriæ & Trigonometriæ planæ nostra Elementa ita conscripsimus, ut satisfaciant omnibus, quocunque fine ad Arithmeticam & Geometriam addiscendam appellunt. Ea enim ita digessimus, ut nullo negotio prætermittantur, quæ salvo fine, quem quis sibi præfixum habet, ignorare potest, & ea iisdem inseruimus, quæ nisi eo excidere voluerit, ignorare nequit.

§. 112. Qui Arithmeticam addiscit, vel soli praxi studet, theoriam non curat, vel hujus etiam rationem habet. Qui soli praxi operam navat, is vel solum ejus usum in vita communi, vel usum etiam in Geometria practica aliisque Matheseos mixtæ partibus intendit. Idem præterea vel in nuda praxi acquiescere, vult, vel veritatem quoque praxeos perspicere avet. Cui theoria curæ cordique est, is eandem vel propter usum in ceteris Matheseos partibus, vel propter usum in perficiendo intellectu appetit. Videamus igitur, quomodo Elementa nostra Arithmeticæ pro multiplici hoc discentium scopo satisfaciant.

§. 113. Qui soli praxi operam navant & quidem in usum vitæ communis; iis satisfaciunt problemata de Algorithmo in numeris integris & fractis, quæ capite secundo & quarto continentur una cum problemate 33, quod capite sexto legitur, de numero tertio vel quarto proportionali inveniendo, una cum scholiis, in quibus idem problema ad varios casus in vita communi obvios applicatur. Qui vero usum etiam in Geometria

practica

practica aliisque Matheseos mixtæ partibus intendunt, illi superaddere debent problemata de extractione quadratæ ac cubicæ radicis, quæ capite quinto leguntur, problemata de logarithmis, fractionibus decimalibus & fractionibus sexagesimalibus, quæ capite octavo, nono & decimo extant. Fractiones sexagesimales omittere possunt, qui calculi astronomici nullam habent rationem. Immo eodem carere possunt, qui ultra ea non progrediuntur, quæ in nostris Astronomiæ & Chronologiæ Elementis traduntur.

§. 114. Problemata a definitionibus & theorematis satis aperte distinguntur, suoque nomine insignita numerantur, ut adeo nullo labore opus sit ad ea evolvenda & agnoscenda. Ut adeo usus quidam hinc elucescat, cur in Mathesi veritates singulæ suis nominibus compellentur ac numerentur, etiamsi in citationibus ad paragraphum provocemus, in quo principium istud continetur, quo in demonstrando utimur.

§. 115. Quoniam in propositione, itemque in resolutione occurrere solent termini, quibus nondum intellectis nec propositio, nec resolutio intelligi potest; igitur necesse est, ut istorum terminorum definitiones ante expendat, quam ad problema accedat, qui praxin in eodem traditam discere studet. Ita ex. gr. problema secundum (§. 96. *Arithm.*) docet numeros quotcunque datos addere. Supponitur adeo definitio additionis, quæ traditur in anterioribus (§. 61. *Arithm.*). Quia vero nec definitiones intelliguntur, nisi intellectis terminis, qui eas ingrediuntur; si qui termini per notiones claras, sed confusas communes non satis perspicui sunt, ad definitiones eorum, quas in antecedentibus damus, recurrendum. Ita in definitione additionis mentio fit numerorum homogeneorum. Quinam numeri sint homogenei, ex communi sermone notum non est. Quamobrem necesse est, ut ad definitionem numerorum inter se homogeneorum recurras, quam in anterioribus exhibemus (§. 35. *Arithm.*). Quomodo autem hæ definitiones sint expendendæ, patet ex iis, quæ de primo cognitionis

gradu acquirendo quoad definitiones præcepimus.

§. 116. Problematum resolutiones statim applicandæ sunt ad exempla, quemadmodum in ipso textu a nobis factum. Nimirum regulæ, quibus præcipiuntur, quæ fieri debent, suis numeris distinguuntur, ut singulis statim satisfieri possit. Collocantur eo ordine, quo singula fieri debent, ut lecta regula una statim fiat quod eadem præcipitur. Nihil adeo applicatio ad exempla habet difficultatis, ita ut totam Arithmeticam practicam proprio Marte addiscere possis, nisi fueris valde impatiens, aut, si duce alterius unam operationem arithmeticam didicisti, ceteras deinde absque ullo duce tibi familiares reddere queas.

§. 117. Si quis veritatem resolutionis problematum perspicere voluerit, necesse est demonstrationes addat. Citationes in iisdem adductæ ostendunt principia, quibus opus habet. Neque opus est, ut theoremata, quæ capite primo proponuntur, demonstret; sed sufficit ea sumi tanquam per notiones communes nota absque demonstrationibus. Similiter sufficit, ut ex capite 3 nonnisi definitionem rationis, nominis rationis, rationum identitatis & proportionis in genere, ejusque specierum proportionis continuæ atque discretæ (§. 126. 136. 149. 155. 156.) sibi cognitam ac perspectam reddat una cum theoremate 20 & 21, quorum demonstrationes omittere potest, in illustratione per exempla facta acquiescens. Problema 36. de modo inveniendi logarithmum prætermittere potest, immo totam de Logarithmis doctrinam tamdiu differre, donec absoluta Geometria ad Trigonometriam accedere voluerit.

§. 118. Quodsi vero theoriam expetit, sive propter usum in ceteris Matheseos partibus, sive intellectus perficiendi gratia, tota omnino elementa pertractanda sunt eo modo, quem in capite primo pro acquirendo gradu cognitionis secundo præscripsimus, ut adeo nihil supersit, quod hic veniat addendum.

§. 119. Quamvis ostenderimus

rimus, quid faciendum sit, si quis nudæ praxi operam navat, nulla prorsus habita ratione theoriæ, hujus tamen neglectum nemini suademus, quin potius consultum ducimus, ut Arithmetica etiam practica in usum vitæ communis non sine demonstrationibus addiscatur. Ut enim alios taceam usus, non modo tota Arithmetica practica facilius addiscitur, verum etiam memoriæ multo firmius infigitur non sine temporis compendio, & ubi quorundam oblitus est, absque multa difficultate in memoriam revocantur: id quod inprimis usui est, ubi arithmeticis operationibus non quotidie habueris opus.

§. 120. Ceterum hinc liquet, quod absque ullo negotio ex Elementis nostris Arithmeticæ excribi possit Compendium Arithmeticæ practicæ in usum illorum, qui solam Arithmeticam practicam propter usum in vita communi expetunt levi sumtu ab iis comparandum, qui eodem opus habent. Quodsi plura desiderentur exempla, ea cumulare difficile non est. Etenim non alia re opus est, quam ut in locum numerorum, quos exemplum sistit, substituantur quicunque alii. Quodsi demonstrationes non negligantur, quemadmodum ne id fiat modo suasimus (§. 119.); paucis exemplis obtinetur, quod non sine multis consequi datur, ubi theoriam omnem abjicere volueris.

§. 121. Qui ad tertium cognitionis gradum adspirant, ii memores esse debent ejus, quod in scholio definitionis primæ (§. 2. *Arithm.*) monuimus, scilicet quod ab Arithmetica practica tanquam methodo inveniendi speciali regulæ inveniendi generales obstrahere liceat. Cumque in scholio generali ad Algorithmum numerorum integrorum (§. 125. *Aithm.*) istiusmodi regulas abstraxerimus, ut exemplo quodam præiremus, & in genesi numerorum quadratorum & cubicorum (§. 262. 266. 277. 280. *Arithm.*), nec non in theoria numerorum æquidifferentium (§. 327. 329. *Arithm.*) artificia quædam analytica docuerimus; ad hæc inprimis animum advertere debent, qui non modo in Arithmeticis,

artem inveniendi, sed eam etiam generalem curæ cordique habent. Si prolixioribus esse liceret, addi poterant multa specialia, de quibus alibi commodius dicetur, ubi nimirum Artem inveniendi ea methodo tradituri sumus, qua huc usque Logicam & Methaphysicam universam una cum Philosophia practica universali tradidimus. Ita ex. gr. quæ (§. 142. *& seqq. Arithm.*) de generibus & speciebus rationum rationalium docentur, insinuant modum ex dato genere inveniendi genera inferiora eorundemque species: quo etiam Dignitatum Quantitatum divisio facit (§. 252. *Arithm.*). Huc etiam pertinent fictiones, quarum exemplum habemus in fractionibus spuriis (§. 221 222. *Arithm.*).

§. 122. Qui Geometriæ studio sese dedunt, similiter aut soli praxi student, theoriæ nullam prorsus rationem habentes, veluti agrimensores & architecti militares, aut in praxi nuda acquiescere nolunt, sed ejus demonstrationes expetunt. Qui vero theoriæ addiscendæ sese dedunt, aut usum in ceteris Matheseos partibus intendunt, aut hoc faciunt intellectus perficiendi causa.

§. 123. Quibus in nuda praxi acquiescere visum est, iis satisfaciunt definitiones & problemata, omissis demonstrationibus. Nullum est problema, quod usui esse non possit, adeoque prætermittendum sit: sed definitiones quædam omitti possunt, veluti figuræ in genere, lateris, tangentis, secantis, &c. Sufficit enim didicisse definitiones angulorum & figurarum, atque lineæ perpendicularis & linearum parallelarum. Ceterorum notiones confusæ ipso usu terminorum in casu dato insinuabuntur, quæ praxi soli intentis satisfaciunt.

§. 124. Quænam observanda sint circa definitiones & problemata eorundemque resolutiones, ex iis intelliguntur, quæ de acquirendo gradu primo cognitionis in anterioribus præcepimus (§. 5. *& seqq.*), nisi quod definitiones sequentes non opus sit resolvi in antecedentes, quia sufficit eas referri ad schemata oculis subjecta, cum non requiratur adæquata entium geometricorum notio, sed vel in confusa

fusa eorundem notione acquiescie possit.

§. 125. Praxis duplex est: alia, quæ exercetur in charta; alia, quæ in campo. Qui praxi unice se dat, eam exercere intendit. Non igitur sufficit resolutiones problematum intelligere; verum etiam requiritur, ut facias, quæ fieri jubentur. Ad praxin igitur in charta exercendam ad manus esse debet circinus, regula, instrumentum transportatorium, norma & parallelismus, una cum triangulo ex ligno ebenino & scala modica; ad eandem vero in campo exercendam baculi cum catena vel fune cannabino in pedes & decempedas illorumque digitos legitime diviso una cum instrumentis ceteris, quorum usus explicatur.

§. 126. Juxta resolutionem problematis uniuscujusque instituenda est operatio, sive in charta, sive in campo, ut videas, num ea facere possis, quæ jubentur. Quorum vero problematum resolutiones arithmeticæ sunt, ac eoque calculo absolvuntur; eæ tentandæ sunt in exemplis non modo iis, quæ ipsimet in medium attulimus, verum etiam aliis, qualia comminisci haud difficile, ubi in locum numerorum datorum surrogantur alii pro arbitrio nostro. Quemadmodum enim consultum est, ut una eademque operatio sive in charta, sive in campo aliquoties repetatur, donec exacte facere possis quod jubetur; ita etiam exempla cumulanda. Hoc nimirum non tantummodo facit, ut resolutionem problematis uniuscujusque rite intelligas, eandemque memoriæ firmius infigas; sed & ut habitum exacte faciendi, quod faciendum erat, acquiras. Qui enim praxin exercere vult, non modo intelligere debet, quid fieri debeat, sed & ut omni exactitudine id facere possit requiritur. Habitus docendo communicari nequit, sed crebro exercitio, seu idem sæpius faciendo acquiritur. Qui adeo docet, officio suo satisfecit, si ea tradit, quæ, ut recte facias quod faciendum, nosse debes.

§. 127. Quoniam multa dantur problemata geometrica, quorum resolutiones per calculum expediuntur; geometria practica

practica arithmeticam practicam supponit. Illam igitur si addiscere volueris, hanc ante addiscas necesse est.

§. 128. Ex nostris adeo Elementis Geometriæ absque ullo negotio Geometria practica extrahi poterat, ne verbo quidem immutato: cui quod utiliter addatur compendium Arithmeticæ practicæ ex Elementis Arithmeticæ exscribendum (§. 120), nemo est, qui non videt (§. 127.).

§. 129. Enimvero etsi praxis absque theoria commode addisci possit, & Elementa nostra ita conscripta sint, ut brevissima ad eandem via ducant absque ulla theoria; meo tamen, si quid valet, consilio omnes agrimensores & Architecti militares, & si qui alii praxin geometricam exercere voluerint, tantum theoriæ sibi acquirere deberent, quantum ad praxin demonstrandam sufficit. Quemadmodum enim theoria accurata praxin accuratam parit; ita etiam probe intellecta exercitium praxeos reddit exactum. Immo succurrunt subinde in praxi casus nonnulli, in quibus hæret ac facile aberrat, qui theoria instructus non est. Non opus esse videtur, ut hoc multis rationibus adstruatur; qui enim consilio nostro aurem benignam præbere voluerit, veritatem dicti reipsa experietur. Nemo non novit, si plures agrimensores aream ejusdem campi investigent; haud raro magnum esse dissensum in quantitate ejus definienda, certo indicio, quod non eadem accuratione singuli fuerint usi, etsi omnem diligentiam adhibuisse sibi videantur. Diligentia oculata esse debet, quæ ab accuratione nulla in re deficit. Ut hæc oculata sit, theoriæ debetur.

§. 130. Equidem non diffitemur, theoriam adeo exactam non requiri in iis, qui Geometriam practicam exercent, qualem nos intellectus perficiendi gratia condidimus, unde & in Elementis nostris Germanicis ab ea abstinuimus eandemque in compendium contraximus: quodsi tamen visum fuerit omnem retinere theoriam, quam dedimus, ea multiplici utilitate sese commendabit etiam praxin exercentibus. Per eam enim obtinebis, ut nulla in re patiaris deside-

desiderari attentionem tuam & vel in minimis te præbeas circumspectum. Taceo, quod omnibus usui sit, si facultatum cognoscendi legitimum usum facere queant, & ipsa obligatione naturali nemo negligere teneatur occasionem, qua eundem in potestatem suam redigere valet.

§. 131. Neque est quod excipias agrimensoribus & architectis militaribus aliisque praxin geometricam exercentibus non convenire theoriam, sed eam captum ipsorum transcendere, immo ipsos eandem naturali quadam aversione fastidire: hoc enim quam sit a veritate alienum, & experientia me docuit, & ratio convicit. Si qui theoriam contemnunt, non alia de causa hoc faciunt, quam quod eam non didicerint, nec ignoti ulla sit cupido, & quod eadem in praxi sua carere posse sibi videantur. Aliter vero sentirent, ubi mature theoria eorundem animis instillaretur. Quod vero eam capere nequeant, si rite eandem doceantur, adeo verum non est, ut experimento contrario refellatur. Ne difficultatem præter necessitatem facessas, doce ipsos primum praxin solam, sed ea methodo, ut distincte concipiant singula, quæ fieri debent, quemadmodum nos urgemus: ita enim futurum, ut notionibus distinctis adsueti, quid inter has atque confusas intersit facile internoscant. Adde demonstrationes, quas diximus, mechanicas, ut veritatem eorum, quæ docentur, experiantur: quam ubi percepisse sibi videntur, eosdem mone experimenta hæc loqui nonnisi veritatem in casu singulari, nec reiterata eandem prodere in universali. Neque difficile est convincere quemvis a posteriori, quod a particulari ad universale non valeat argumentatio, cum ubivis prostent exempla, quibus idem doceri potest. Cum hoc modo excitaveris cupidinem sciendi, quod scire delectet; commodum jam erit ad theoriam progredi. Et ubi quis in cognitionis gradu primo acquirendo nostro more versatus fuerit, ad secundum consequendum præparatus accedit, in quo si denuo morem a nobis præscriptum sequaris, absque ulla

ulla molestia in theoria addiscenda progredi dabitur.

§. 132. Qui theoriæ operam navant, propter usum in disciplinis ceteris mathematicis; illi non modo omnes propositiones sibi familiares reddere, verum etiam habitum demonstrandi comparare tenentur. Quamobrem universa Elementa Geometriæ eo modo pertractare debent, quem acquirendi secundi & tertii cognitionis gradus causa capite primo præscripsimus, & definitiones ac propositiones pure enunciatas memoriæ firmiter infigere tenentur: quo plurimum confert accurata demonstrationum analysis, in quibus definitiones & propositiones pure enunciatæ tanquam principia adhibentur. Hoc enim pacto demonstrationum sequentium evolutio repetitionis vicem sustinet, qua definitiones ac propositiones pure enunciatæ memoriæ mandantur & discenti familiares evadunt, quales supponuntur ad ceteras Matheseos partes absque difficultate pertractandas.

§. 133. Quod problemata attinet, quæ praxin continent, notandum est, praxin in charta exercendam usui esse in ceteris Matheseos partibus; quæ vero exercetur in campo, ea nullum habere in reliquis usum, nisi in Architectura militari & in Astronomia atque Geographia nonnulla ex iis cognita atque perspecta supponi. Praxis accurata in charta magis ornat Mathematicum, quam necessaria est, si in sola theoria acquiescere voluerit. Neque is multo instrumentorum apparatu indiget; sed sufficit regula cum circino & graphio, cujus tamen vicem supplet penna ex corvorum alis evulsa (§. 123. *Geom.*) Problemata, quæ praxin in campo docent, non tamen prorsus negligenda. Eorum enim theoretica cognitio discentem præparat ad ceteras Matheseos partes facilius addiscendas. Necesse igitur est, ut resolutionem distincte concipiat & demonstrationem nostro more resolvat ac analytice exprimat, omni cura ac sollicitudine animi observans, quæ de iis secundi cognitionis gradus acquirendi gratia præcepimus, qui theoreticam Matheseos universæ cognitionem curæ cordique habet.

§. 134.

§. 134. Eadem tenenda sunt, si quis intellectus perficiendi gratia Geometriæ studet, sive tantummodo ad secundum cognitionis gradum, sive simul ad tertium extra Mathesin adspiret. Utilitatem percipiet, qui in Philosophia morali & civili accurata diligentia versari eandemque ad usum vitæ transferre & theoriam physicam ad artes perficiendas applicare voluerit.

§. 135. Qui a Geometria & Trigonometria ad Algebram progredi voluerit, is cognitionis gradum tertium in Mathesi intendit. Quamobrem ea ipsi observanda sunt, quæ de tertio cognitionis gradu acquirendo inculcavimus capite primo. Inprimis autem animum attendere debet ad præparationem, quæ demonstrationi præmittitur, cum ea opus quoque habeat in resolutione problematum geometricorum in Algebra & in solutionibus præsertim algebraicis problematum in ceteris Matheseos partibus.

§. 136. Elementa Arithmeticæ & Geometriæ per Mathesin universam & in omni cognitione mathematica, quam philosophicæ contra distinguimus (§. 14. *Disc. prælim.*), apprime necessaria sunt, ita ut eorum notitia nemo carere possit, qui in ceteris Matheseos partibus ad cognitionis gradum secundum atque tertium adspirat. Quo majore igitur studio ac industria in illis fuerit versatus, eo felicius in reliqua Mathesi progredietur. Id etiam obtinebit, quod hodie in plerisque Mathematicis & in seipso desideravit Vir summus *Newtonus* (§. 101.), ut methodum Geometrarum veterum cum algebraica recentiorum conjungat & utriusque compos reddatur: cujus insignem experietur usum, si ad summa quævis in Mathesi contendat & exemplo *Newtoni* naturam mathematice tractare voluerit, inprimis si quando volupe fuerit mathematicam rerum naturalium cognitionem in systema redigere, quantum fert ætas nostra, præsertim ubi ante officio suo satisfecerint Philosophi.

§. 137. Trigonometria plana non minus, quam Sphærica primum in usum Astronomiæ fuit inventa. Quamobrem indispensabilis usus est in Astronomia, adeoque eam negligere

nequit, qui nobilissimæ huic scientiæ operam dare decrevit. Postea quoque ad praxin geometricam in campo fuit applicata, quemadmodum capite ultimo Trigonometriæ planæ ostendimus. Quamobrem eidem quoque studere tenentur, qui praxin geometricam in campo exercere voluerint. Applicata eadem fuit ad varia problemata in Geographia, Hydrographia, Gnomonica, Mechanica, Architectura militari & Opticis disciplinis: ut adeo commendanda veniat ad hasce quoque Matheseos partes animum appellentibus. Multo igitur illustrior est ejus usus, quam qui olim fuerat.

§. 138. Qui in sola praxi acquiescunt, iis satisfaciunt perpauca ista problemata, quæ capite secundo continentur, addituri ea, quæ continentur tertio, ubi Geometriam practicam curæ cordique habent. Hoc unicum notandum est, quod usum Canonis sinuum & tangentium una cum Canone Logarithmorum tam sinuum atque tangentium sibi familiarem reddere teneantur, qui in usum praxeos Trigonometriam planam addiscunt, additis problematis, quibus in Arithmetica usus Logarithmorum docetur (§. 349. *& seqq. Arithm.*), una cum definitione Logarithmorum, & theorematis eorum naturam explicantibus (§. 334. *& seqq. Arithm.*); sed absque demonstratione.

§. 139. Exempla, quibus calculum trigonometricum illustravimus, adeo distincte repræsentavimus, ut ideam exemplarem resolutionis problematum animo insinuent, & resolutionis vicem tueri possint. Quamobrem ii, quos sola praxis juvat, eandem sibi familiarem reddere tenentur: id quod uno alteroque exemplo facile obtinetur. Exempla autem complura facile comminiscitur, qui numeris in exemplo proposito datis substituit pro arbitrio alios. Inprimis etiam suademus omnibus, quotquot praxin geometricam in campo exercere voluerint, ut exempla proprio Marte addant problematis, quæ hunc in usum traduntur capite tertio. Reperiuntur autem ad imitationem eorum, quæ dedimus capite secundo. Nimirum non alia re opus est, quam ut data

data numeris exprimantur: id quod nihil difficultatis habet, præſertim cum in expendendis problematis data a quæſitis ſemper veniant diſtinguenda (§.26). Quodſi hoc feceris, calculus erit idem, qui in problematis citatis: quæ etiam ratio eſt, cur eundem in textu non apposuerimus, ne præter neceſſitatem eſſemus prolixiores.

§. 140. Qui praxin oculatam deſiderant, vel theoriæ tantummodo rationem habent; illos demonſtrationes ſuperaddere & in Trigonometria eodem modo verſari debere, quem pro ſecundo & primo cognitionis gradu acquirendo ſupra præſcripſimus, me vel tacente intelligitur. Nihil adeo prætermittere tenentur, quæ in Elementis noſtris continentur. Et quamvis Canon ſinuum atque tangentium cum naturalis, tum artificialis jam fuerit conſtructus, ut nullus amplius problematum, quæ in capite primo in hunc finem traduntur, videatur uſus; ea tamen negligenda non ſunt, ut appareat, quomodo Canones iſti conſtrui potuerint & quomodo ex theoria praxis, ad quam tendit, deducatur.

§. 141. Inprimis hoc proderit iis, qui ad cognitionis gradum tertium adſpirant. Ex hiſce enim perſpiciunt, quomodo ex cognitis alia incognita ratiocinando colligantur, & quomodo haud raro praxes prorſus inexpectatæ eædemque longe utiliſſimæ ex theoriis deriventur, quarum tantam prævidere non licebat utilitatem. Sane non alia de cauſa, poſtquam Canon ſinuum & tangentium jam fuit conſtructus, Mathematici tamen recentiores alios eosdem conſtruendi excogitarunt modos, quam quibus uſi ſunt illorum conditores. Non alia de cauſa, poſtquam docuimus Canonis ſinuum atque tangentium conſtructionem, adjecimus ſcholion (§. 27. *Trigon.*), in quo monemus, eundem adhuc multis aliis modis conſtrui poſſe laudavimusque *Urſinum*, qui nonnulla præclara dedit, & in Algebra, ubi de ſerierum doctrina agitur, oſtendimus, quomodo pro ſinibus & tangentibus, nec non pro logarithmis repeRiantur ſeries infinitæ, ex quibus per approximationem deducuntur numeri, qui ſatisfaciunt.

§. 142. Trigonometria non modo pars quædam Artis inveniendi ſpecialis eſt, cujus uſus in aliis Matheſeos partibus elucet (§. 137.); ſed tota etiam ita digeſta, ut appareat, quomodo ſingula fuerint inventa, modo obſervare volueris, quæ de acquirendo cognitionis gradu tertio præcepimus capite primo. Ab ea igitur regulas generales artis inveniendi non modo abſtrahere licet, verum ſi præſcripto a nobis modo, ad quem hic provocamus, pertractetur, ad ipſam quoque artem inveniendi acquirendam aliquid conferet. Quamobrem ſtudium trigonometricum rite inſtituendum tam iis, qui ad tertium cognitionis gradum in Matheſi adſpirant, quam illis, qui artem inveniendi in genere acquirere volunt, commendandum.

CAPUT IV.

De

Studio Algebræ, ſeu Analyſeos mathematicæ in ſpecie.

§. 143.

Analyſis mathematica eſt ipſa ars inveniendi, qua hodie utuntur Mathematici in veritatibus mathematicis inveſtigandis. Huic adeo operam dare debent, quotquot ad cognitionis gradum tertium in Matheſi adſpirant. Etſi enim demonſtrationum more noſtro facta reſolutio etiam analytica ſit, ut eodem modo ex hypotheſi data inveniri poſſit, quo demonſtrandum, quod demonſtratur; non tamen iis detegendis ſufficit, ad quæ Analyſis recentiorum ducit, tota vulgo Algebræ nomine appellari ſolita. Etenim per Algebram paucis cognitis invenire licet, quæ, ſi more veterum detegenda eſſent, longam rerum inventarum ſeriem ſupponerent. Quid quod facili labore eruantur, quæ Herculeo inveſtiganda eſſent? Hæc ſane ratio eſt, cur inventa Mathema-

thematicorum recentiorum longissimo intervallo post se relinquant inventa veterum & quod uno seculo plura fuerint detecta, quam tot seculis inveniri potuerint, quibus Mathesis antea fuit exculta Sane si *Archimedes* & *Apollonius* nostro ævo reviviscerent, in stuporem raperentur, visis inventis recentiorum, quæ per Algebram fuerunt in apricum producta: neque enim unquam sibi persuasissent, patere ad talia mortalibus aditum.

§. 144. Non tamen omnia per calculos algebraicos erui possunt, quæ ad Geometriam spectant. Patet id ex ipsa Geometria elementari. Etenim quæ ibidem de lineis perpendicularis, de parallelismo linearum, de angulis, de congruentia & similitudine triangulorum aliisque nonnullis demonstrantur, per Algebram investigari nequeunt. Pendent enim hæc a situ linearum, quem ad se invicem habent. Calculus vero algebraicus est calculus magnitudinum, non situs. Unde *Leibnitius* in Analysi recentiori adhuc desiderari monuit calculum situs, a calculo magnitudinum prorsus diversum, quem tamen nec ipse dedit, nec dedit adhuc alius, sed in desideratis numeramus.

§. 145. Similiter analysin veterum, qualem loquitur nostra demonstrationum analysis, non eam esse, qua Algebra inventa carere possimus, haud difficulter ostenditur. Etenim antequam problemata geometrica, vel alia in Mathesi mixta ad Geometriam puram reducta per Algebram solvuntur, reducendæ sunt ad æquationes. Hæc vero reductio non modo supponit præparationem methodo veterum inveniendam, verum etiam ipsamet per eandem methodum eruenda. Accedit subinde occurrere problemata etiam in altioribus, quæ methodo veterum multo brevius & elegantius solvuntur, quam per calculum algebraicum, qui haud raro admodum perplexus & nimis longus est. Accedit, quod absque omni theoria calculo algebraico minime sit locus. Hinc qui problemata physico-mathematica, vel etiam mechanico-physica solvunt, quædam tanquam cognita sumere tenentur. Contingit autem haud raro, ut sumant nondum satis explorata,

vel

vel si ea demonstrare voluerint, quæ certa sunt & methodo veterum rigide demonstrari poterant in dubitationem adducant, ut adeo, quæ per calculum ex assumtis eruuntur, vel incertitudini obnoxia fiant, vel suspecta reddantur acutioribus, rigori veterum adsuetis. Immo nullum est dubium, quin plura irrepserint a veritate aliena, ita ut inventa recentiorum Mathematicorum revisione quadam indigerent & haud pauca firmiori fundamento superstrui mererentur. Nec alia ratio est, cur inter recentiores Mathematicos agitentur controversiæ, quales veteribus erant ignotæ. Optime igitur sibi consulunt, qui methodum veterum cum algebraica recentiorum conjungunt. Et merito dolemus cum *Newtono* (§. 101.), quod illa neglecta cito nimis pede ad hanc hodie properent, qui inter Mathematicos eminere volunt.

§. 146. In Analysi nostra primo loco occurrit Arithmetica speciosa, quam etiam literalem appellare solent. Primo loco agitur de signis tam primitivis, quam derivativis. Occurrunt nempe signa quantitatum & operationum arithmeticarum, quas vulgo species Arithmeticæ vocant. Quantitates cum sint numeri indeterminati (§. 13. *Arithm.*), per determinatos explicabiles sunt. Quamobrem suadendum tyronibus, ut literas, quibus indigitantur quantitates, per plures numeros diversos explicent. Quoniam vero eædem quantitates etiam sub se comprehendunt quamlibet magnitudinem, igitur non minus consultum est, ut etiam per magnitudines, veluti per lineas explicentur. Linearum enim & magnitudinum quarumvis determinatarum ratio ad aliam homogeneam, quæ pro unitate sumitur, per numeros determinatos definiri potest, cum numeri revera omnes tam rationales, quam irrationales nonnisi ratinonem ad unitatem exprimant. Nimirum quod literis generaliter, hoc est, indeterminate designatur, per numeros determinate exprimitur, itidemque per magnitudines determinatas, quatenus harum ratio a aliam homogeneam pro unitate assumtam numeris, sive rationalibus, sive irrationalibus

exprimi

exprimi potest: sit ita, quod hoc variis modis fieri possit pro diversitate ejus, quæ pro unitate sumitur, nec semper hoc præstare valeamus. Qui theoriam entis universalis ab ipsa Mathesi abstrahendam perspectam habet, multo intimius quæ dixi perspiciet, quam qui ab omni philosophia prorsus alienum habet animum.

§. 147. Qui artem inveniendi in genere curæ cordique habent, modo universalia a specialibus abstrahere didicerint, multa animadvertent ad characteristicam universalem spectantia, quam esse partem Artis inveniendi ipsa Arithmetica universalis & calculus differentialis docet, suoque ostendemus loco, si quando ad Artem inveniendi explicandam ordo nos deducet. Ipsa autem Ars Characteristica universalis plurimum lucis affundet tum notationi numerorum in Arithmetica, tum signis, quibus utimur in calculo literali sive communi, sive differentiali. Ceterum hic notandum est, signa primitiva, quæ in alia resolubilia non sunt, respondere notionibus confusis; derivativa vero distinctis: quemadmodum suo loco demonstrabimus. Qui enim novit differentiam, quæ inter notiones distinctas & confusas quoad usum earundem intercedit, quantæ sit utilitatis huc adverti animum facile perspiciet.

§. 148. Ipsum Algorithmum in integris satis perspicue explicavimus. Tyrones sibi eundem familiarem reddent, ubi diversis modis exempla literalia explicaverint per numeros determinatos, si ita visum fuerit, etiam per concretos, quemadmodum ostendimus (§. 28. 30. *Analys.*). Qui in Arte inveniendi generali proficere volunt, iis consultum est, ut ex ipsis hisce exemplis in numeris concretis datis addiscant, quomodo Algorithmus literalis ex notionibus communibus deducatur, per quas primum inventoribus innotuerunt regulæ, quibus in eodem utimur, quamvis idem, utut non eadem facilitate, jam ex Elementis Arithmeticæ ac Geometriæ addisci poterat. Plurimum enim prodest ut noris, omnem tandem cognitionem humanam ex notionibus commu-

nibus fuisse deductam in quocunque scientiarum genere. Et in Ontologia jam me monuisse memini, *Euclidem* Elementa sua reduxisse ad notiones communes, consequenter per ea omnem Mathesin. Hoc notasse etiam usui erit in Mathesi mixta: demonstrabitur autem in arte inveniendi generali, aliter fieri hoc minime posse.

§. 149. In multiplicatione quoad usum signorum fictiones occurrunt, veluti si quantitas sive positiva, sive negativa per privativam multiplicanda venit (§. 34. 36. *Arithm.*). Unde liquet usus fictionum ad conservandam notionum universalitatem. Etsi autem regulas in subsidium vocata Geometria demonstravimus, ut ad imaginationem reducantur, quæ vi intellectus concipienda; consultum tamen est, ut tyrones exempla statim in numeris addant, in iis regularum veritatem perspecturi, vel ipsas etiam regulas ex iisdem deducturi, quemadmodum in Elementis Germanicis feci. Clarius enim in numeris liquet, cur addendum sit, quod plus fuerat subtractum, vel subtrahendum, quod plus fuerat additum, ubi conceptibus universalibus, utpote nimium abstractis, nondum fueris adsuetus: id quod initio studii algebraici supponi nequit.

§. 150. Algorithmus fractorum literalis cum numeroso idem est, cum quantitates, quæ literis designantur, sint numeri indeterminati, regulæ autem hujus algorithmi ex notione numeri generali fluant, consequenter ex iis deducantur, quæ numeris determinatis & indeterminatis communia sunt. Hinc tyrones sibi consulunt, si literis numeros substituant determinatos, ut clarius appareat, nihil hic occurrere diversitatis. Quæ vero problemate 7 & ejus corollariis ac scholiis (§. 45. & *seqq. Analys.*) de seriebus infinitis per divisionem prodeuntibus docentur, initio prætermitti possunt ab iis, quorum attentio facile defatigatur, donec multo inferius in doctrina de seriebus infinitis iisdem habuerint opus, ubi attentio nihil amplius difficultatis facessit, cum multo usu jam major gradus fuerit acquisitus.

§. 151. Multiplicatio & divisio

sio potentiarum & elevatio ad potentiam atque extractio ex radice a Logarithmorum doctrina pendet, quam in Arithmetica tradidimus. Quamobrem nisi hic in tenebris versari volueris, illam ante tibi perspectam reddere debes, quam ad Algorithmum dignitatum accedas. Inprimis autem hic notanda est reductio quantitatum irrationalium ad formam rationalium & unitatis ad x^0 (§. 57. 55. *Analys.*), quoniam hæc reductio non modo multiplicem, eundemque prorsus eximium & inexpectatum in altioribus habet usum; verum etiam apertissime loquitur, quantum intersit inter characteres primitivos & derivativos: id quod Arti characteristicæ generali, quam partem quandam Artis inveniendi esse supra jam monuimus, notiones fœcundas suppeditat.

§. 152. Usus hujus reductionis analyticus in Arithmetica irrationalium conspicitur, præsertim ubi ea, quæ nos de eadem tradimus, cum illis conferre velis, quæ vulgo in eadem docentur, veluti cum calculo irrationalium in Elementis Algebræ *Ozanami*. Sane tractatio nostra tota vere analytica est, qualem requirit Analysis recentiorum mathematica. Et qui ad cognitionis gradum tertium adspirant, hinc discunt, quemnam facere teneantur characterum derivativorum usum, cumque inferius per Algebram eruamus (§. 146. *Analys.*), quæ hic ex charactere derivativo regulis Artis characteristicæ generalis convenienter deducuntur; hinc porro discere licet, quomodo ex characteribus derivativis modo magis naturali & ad Analysin veterum propius accedente eruantur, ad quæ Algebra via quadam extraordinaria ducit: sit ita quod tyrones, quibus intimius singula perspicere nondum datur, Algebræ magis fidant, quam arti characteristicæ, quemadmodum indigitavi in scholio prolematis 10 (§. 60 *Analys.*). Illustratur quoque doctrina fictionum in Arte inveniendi utilium radicibus imaginariis, de quibus in scholio tertio problematis 13 (§. 71. *Analys.*) diximus. Et perplexa *Euclidis* de irrationalibus doctrina ope hujus characteristicæ ab omni perplexitate liberari eidemque plena lux affundi potest, ut non

amplius habeant, quod de obscuritate illius conquerantur, qui eandem ex Elementis hodie vulgo eliminare solent.

§. 153. Quibus calculus irrationalium sub initium molestus est, ii eundem prætermittant, & statim ad usum calculi literalis in inveniendis theorematis se transferant, absoluto algorithmo integrorum & fractorum, donec multo usu calculum literalem magis familiarem sibi reddiderint, majusque acumen acquisiverint, ejus applicatione & attentione majori uti didicerint. In ipso autem progressu patebit, quandonam calculo irrationalium habeas opus, ut gradum sistere & ad ea, quæ in anterioribus neglecta fuerunt, regredi tenearis.

§. 154. Sola Arithmetica literalis sufficit ad invenienda longe plurima, quæ in Elementis *Euclideis* docentur, ita ut, qui eam didicit, absque ullo negotio eadem facilitate theoremata *Euclidea* reperire possit, qua exemplis illustrantur. Ostendimus hoc capite tertio. Neque in problematis resolvendis, quæ ibidem proponuntur, alia notanda sunt, quam ut attendatur, quomodo datorum denominatio fiat, & ut literis designatæ quantitates numeris quoque exprimantur, quo pateat quid intersit discriminis inter exempla universalia & singularia, & hisce illis lux quædam affundatur, qua indigent tyrones. Observandum tamen, calculum in casu singulari instituendum esse juxta regulas calculi universalis seu literalis, ubi iste pleniori luce fulgere debet. E. gr. in problemate 20 (§. 81. *Analys.*) jubemur determinare differentiam quadratorum, quorum radices unitate differunt. Diximus radicem unam n, alteram $n+1$. Dicantur in casu singulari 7 & $7+1=8$. Quodsi quadratum majoris per calculum universalem reperias, erit $7.7+2.7+1=64$, Quadratum minus $=7.7$, Differentia $2.7+1=14+1=15$. Ita nimirum constabit, calculum universalem etiam exerceri posse in numeris, & sic absque calculo literali eadem detegi posse, quæ per literalem eruuntur, quemadmodum & in Arithmetica fecimus, ubi v. gr. in genesin numerorum quadratorum & cubicorum inquisi-

quisivimus. Consultius tamen est uti calculo literali, qui hoc commodo gaudet, ut numeri determinati ab indeterminatis sua sponte sese distinguant: cum si notis numericis uti volueris, artificiis demum opus sit, quibus hoc fiat. Ita in allato exemplo $2.7+1=14+1$, numerus binarius 2 est determinatus, idem in omnibus exemplis, sed 7 est indeterminatus, qui in omni exemplo alio alius. Collatio autem calculi literalis cum calculo universali in exemplis singularibus usui esse poterit ad invenienda artificia, quibus absque ulla confusione calculus universalis in numeris utiliter exercetur. Nostrum non est ea hic docere uberius, quæ Ars inveniendi jure suo sibi vindicat. Etsi autem calculus universalis in numeris instituendus superfluus videri poterat, literali invento; falluntur tamen, qui ita sentiunt. Facit enim ad facile demonstrandum haud pauca in gratiam eorum, qui ad Analysin animum appellere nolunt, nec difficiles demonstrationes capiunt, quemadmodum patet per ea, quæ de genesi numerorum quadratorum & cubicorum in Arithmetica docentur. Neque nullus quoque ejus usus est in Analysi speciosa, prout ex sequentibus constabit. Taceo alia, quæ in ejus favorem dici poterant.

§. 155. Multa hic facillime absque ullo fere negotio eruimus theoremata, quæ in Elementis *Euclidis* extant eorumque plura erui poterant, nisi hæc specimina sufficerent. Alia vero investigavimus per Algebram. Enimvero jam supra monuimus (§. 144.), per calculum literalem, qui nonnisi magnitudinum calculus est, non omnia in Geometria demonstrari posse theoremata, sed quædam pendere a situ, ad quæ investiganda & analytice demonstranda peculiaris requiratur calculus situs. Quodsi Analysis situs fuisset reperta, non inconsultum foret integra Elementa *Euclidis* analytice demonstrari, ut inter methodum veterum & Analysin recentiorem clarius pateret differentia. Quodsi quis eam investigare voluerit, is novas condere tenetur definitiones situs notionem involventes, veluti quod *Punctum* sit situs sui unicum, quod *Circulus* sit figura

plana, in cujus perimetro singula puncta ad punctum quoddam intra eam dato eundem situm habent, quod *Linea* una sit ad alteram *perpendicularis*, si punctum quodcunque in ea assumtum sit situs sui ad idem punctum alterius unicum. Dicitur autem *situs sui unicum*, quod ad aliam magnitudinem datam seu punctum aliud datum eum habet situm, ut nullum aliud præter ipsum eundem situm habere possit. *Eundem* vero *situm* habent, inter quæ idem extensum, veluti eadem linea, recta poni potest (§. 5. *Geom.*). Præterea opus est novo calculo, calculo nempe situs: quem investigaturus perpendere tenetur, calculum in genere esse inventionem characteris derivativi ex aliis sive primitivis, sive derivativis per continuam æquivalentium substitutionem (§. 298. *Psych. empir.*). Hinc enim conficitur, diversos determinandos esse situs possibiles eorumque excogitandos characteres & ut hos legitime combinare liceat, requiri axiomata quædam generalia aut, si mavis regulas quasdam generales, quibus perficitur combinatio & substitutio. Sed nobis minime vacat, ut in talibus investigandis ingenii nostri vires exerceamus, qui magnum adhuc campum emetiri tenemur, antequam Philosophiam universam ad umbilicum perduxerimus. Sufficit aliis monstrasse viam, qua sit ad metam contendendum. Reddat eandem proprio ingenio & propria industria perviam, qui hanc attingere voluerit.

§. 156. Quanta vero sit vis Artis characteristicæ, non modo ex singulis problematis, sed vigesimo præsertim nono ejusque corollariis (§. 95. & *seqq. Analys.*) perspicitur, in quo binomium ad dignitatem quamcunque evehere docemur, quod deinde ad extractiones radicum (§. 98. *Analys.*) & ad infinitinominum ad dignitatem datam evehendum transferimus (§. 102 *Analys.*). Huc animum advertere debent non modo, qui in Analysi recentiorum feliciter progredi voluerint; verum etiam qui eidem Artis generalis inveniendi causa operam navant.

§. 157. Quoniam vero non uno artificio analytico utimur

in

in problematis istis per calculum literalem solvendis; singulis autem artificiis insint generales notiones, quæ ad Artem inveniendi generalem spectant, eas inde abstrahere tenentur, qui Artis generalis inveniendi gratia in Analysi Mathematicorum versantur: ut vero hoc facere possint, acquirere sibi tenentur acumen pervidendi abstracta in concretis, quod quomodo comparetur docebimus in philosophia morali, ubi praxin virtutum intellectualium, inter quas etiam sibi acumen istud locum vindicat, exposituri sumus. Quodsi vero quis in addiscenda Mathesi eo modo versatus fuerit, quem capite primo præscripsimus, & inprimis in repræsentatione definitionum, propositionum & demonstrationum symbolica industriam suam exercuerit, atque inprimis ad animum probe revocaverit, quæ in scholio generali ad algorithmum integrorum de abstrahendis regulis generalibus, juxta quas intellectus in eodem dirigitur, inculcavimus; is se hujus acuminis compotem fieri animadvertet: quod quomodo fiat, nunc exponere non lubet, ne extra oleas evagari videamur. Quemadmodum vero Mathesis & Philosophia mutuas sibi suppetias ferunt, ita quoque ad acumen istud ipso usu acquirendum haud parum confert Logica, qualem nos tradidimus idiomate Latino. Immo Ontologia etiam & Psychologia adjumento esse poterit. Quamobrem autor fui, ut, absolutis Arithmeticæ ac Geometriæ elementis, studium Philosophiæ cum mathematico conjungatur. Et si quis in arte inveniendi generali ex studio Matheseos proficere voluerit, ei suademus, ut, postquam in Philosophia fuerit cum laude versatus, Mathesin universam denuo pertractet & huc inprimis animum advertat, quod ad usum facultatum in veritate cognoscenda usui esse potest. Nullus enim dubito fore, ut perspicillis philosophicis usus plus videat, quam cum iisdem destitueretur.

§. 158. Inprimis autem opera danda est, ut tempestive adsuefiamus formulis algebraicis tum per numeros, quam per lineas explicandis. Quamobrem consultum est, ut data expriman-

mantur tum numeris, tum lineis, & tam in formula ſubſtituantur pro literis numeri, quam figuræ conſtruantur juxta formulam: id quod cum in præſenti capite facillime ſuccedat, plurimum confert ad formulas per Algebram erutas geometrice præſertim minori moleſtia conſtruendas. Ex. gr. in problemate 24 (§. 90. *Analyſ.*), partes totius ſunt Q & q, & prodit aggregatum ex Q^2 & $Q^2 + 2Qq + q^2 = 2Q(Q+q) + q^2$. Quodſi fiat $Q=4$ & $q=3$, erit $Q+q=7$, $Q^2=16$, $(Q+q)^2=49$, adeoque $Q^2 + (Q+q)^2 = 65$. Sed $2Q=8$, adeoque $2Q(Q+q)=56$. Eſt vero $q^2=9$. Quare $2Q(Q+q)+q^2=65$. Habes itaque etiam examen, quali inprimis indigent tyrones, ut tanto clarius perſpiciant, quod per calculum fuit erutum a veritate non eſſe alienum. Etſi enim exempla ſingularia non evincant veritatem in univerſali, tyronibus tamen magis ſatisfaciunt, quam ſi animum ad calculum advertentes nullibi a ſe aberratum eſſe obſervent. Neque deſtituitur ſumma probabilitate, ſi quidem formula analytica cum exemplo in numeris conſentit. Quoniam enim numeri nullo conſilio eliguntur, ſed potius ſumuntur, prout eos caſus obtulerit; vix credibile eſt te caſu incidere in numeros, qui ex ratione ſingulari ſatisfaciunt formulæ, in omni caſu minime veræ. In præſenti caſu dubium hoc eſſe nullum, quod quis movere poterat, oſtendi nullo negotio poterat, ſi calculus univerſali ratione inſtituatur etiam in numeris. Etenim ſi $Q=4$ & $q=3$, habebis $2.\,4^2 + 2.\,4.\,3 + 3^2 = 2.\,4(4+3) + 3^2$, h. e. $2.\,16 + 2.\,12 + 9 = 8(4+3) + 9$, ſeu $32 + 24 + 9 = 32 + 24 + 9$. Vides autem pro numeris 4 & 3 ſubſtitui poſſe duos alios quoscunque, ceteris ſemper eodem modo ſeſe habentibus. Sed nolim tyrones talibus defatigari, niſi tempeſtive adſuefieri voluerint calculo univerſali ratione in numeris inſtituendo: quo in caſu conſultum foret, ut numeri determinati, in omni caſu iidem, qualis hic binarius ter occurrit, virgula transverſa notentur, nempe ut ſcribatur $\not{2}.\,4^2 + \not{2}.\,4.\,3 + 3^2 = \not{2}.\,4\,(4+3) + 3^2$. Quodſi Q & q explices per lineas & conſtruas tam Quadratum ex compoſita $Q+q$, quam ex

ex una Q, & deinde rectangulum ex composita Q & q in rectam Q bis sumtam atque quadratum lineæ alterius q. formulam geometrice repræsentabis. Sed utriusq; figuræ æqualitatem intuitive non cognosces, quemadmodum numerorum, qui calculo secundum formulam instituto prodeunt. Hoc tamen non obstante figurarum constructio non omni utilitate caret. Neque enim figuræ eum in finem construuntur, ut examinis vicem subeant; sed ut discamus, quomodo formulæ analyticæ geometrice construantur, & earum sensus per figuras explicetur. Subinde tamen accidit, ut non minus veritatem formulæ intuendam præbeant figuræ, quemadmodum numeri. Taceo quod mechanicæ demonstrationi, de qua supra diximus, hic sit locus, si ad principium congruentiæ confugias & partes a figura una rescissas alteri superimponas, prout ipse usus docuerit. Enimvero quibus talia inutilia videntur, is ea prætermittat. Neque enim omnia conducunt omnibus.

§. 159. Nimirum calculus literalis & ejus applicatio ad solutionem problematum doceri poterat pueros & adolescentes, quorum captui consulitur, si, quæ abstracta sunt, ad sensum & imaginationem reducantur. In omni philosophia utilis est hæc reductio, ut eidem nunquam satis adsuefieri possit, qui in hac inoffenso pede progredi voluerit. Quamobrem qui intellectus perficiendi gratia in Algebra versantur, talia negligere non debent, quæ superflua ac puerilia videntur aliis, qui in nuda veritatum mathematicarum cognitione acquiescunt. Maximæ quoque utilitatis est ad recte philosophandum, si actus imaginationis ab operationibus intellectus discernere valeas, ne abortus imaginationis cum notionibus realibus confundas: quemadmodnm accidit summis etiam Mathematicis, qui imaginaria a realibus separare non didicere, neglectis exercitiis, quæ huc facere poterant.

§. 160. Difficilis est tyronibus doctrina de ratione Quantitatum, quam in Arithmetica demonstravimus, præsertim si theoremata non exponantur per numeros, & demonstratio ad ex-

empla applicetur. Delectabuntur itaque, quando in problemate 32 (§. 124. *Analys.*) videbunt, quomodo per calculum literalem absque ullo negotio omnia pateant, ut ad ea capienda sensuum magis usu, quam intellectus operationi opus sit. Hæc ipsa autem voluptas non modo amorem studii algebraici, sed & alacritatem idem prosequendi instillabit. Consultum vero est, ut literæ non minus per numeros rationales, quam irrationales explicentur: id quod non modo universalitatem theorematum per calculum erutorum confirmabit, verum etiam exercitio calculum irrationalium reddet magis familiarem. Immo ne multitudine theorematum hic coacervatorum obruaris, sed ut singula absque molestia memoriæ infigantur, nisi hoc jam factum fuerit in Arithmetica, hoc ipso obtinebis. Quoniam vero theoremata verbis pure enunciata in usum futurum memoriæ mandanda sunt (§. 21); non minus consultum est, ut singula verbis enuncies. Hoc modo enunciatorum facilior quoque erit comparatio cum theorematis in Arithmetica propositis, cumque ea tota nitatur distinctis notionibus, faciet idem institutum ad notiones confusas ad distinctas revocandum & animum impatientem reddet ad acquiescendum in confusis, per quas nobis veritatem perspicere videmur: id quod haud parum proderit in philosophia ad præcavendam præcipitantiam, qua in periculum errandi adducimur & in errorem haud raro præcipites damur. Theorema primum, quo investigatur ratio factorum communem efficientem habentium, multiplicatis scilicet duabus, quantitatibus rationem quamcunque inter se habentibus *a* & *ma* per eandem tertiam *c* ita repræsentatur:

$$\begin{array}{c} a : ma \\ c \quad c \\ \hline ac : mac = a : ma \end{array}$$

Per numeros rationales explicabitur hoc modo:

$$\begin{array}{c} 8. \quad 12 \\ 3 \quad 3 \\ \hline 3 \cdot 8 : 3 \cdot 12 = 8 : 12 \\ \text{seu } 24 : 36 = 8 : 12 \end{array}$$

Quodsi 24 dividas per 36 & 8 per 12, fractionibus $\frac{24}{36}$ & $\frac{8}{12}$ redu-ctis

ctis, prodibit utrobique $\frac{2}{3}$, idem nempe exponens (§. 136. *Arithm.*), quemadmodum requirit proportio (§. 149. 155. *Arithm.*).

Per numeros irrationales explicabitur hoc modo:

$$\sqrt{5} : \sqrt{3}$$
$$\sqrt{7} : \sqrt{7}$$
$$\sqrt{5}.\sqrt{7} : \sqrt{3}.\sqrt{7} = \sqrt{5}.\sqrt{3}$$
$$\text{seu } \sqrt{35} : \sqrt{21} = \sqrt{5} : \sqrt{3}$$

Quodsi denuo $\sqrt{35}$ dividas per $\sqrt{21}$ & $\sqrt{5}$ per $\sqrt{3}$, prodibit utrobique exponens idem $\sqrt{1\frac{2}{3}}$.

§. 161. Quodsi existimes, committi hoc pacto circulum vitiosum, cum fractionum reductio ad minores terminos supponat rationum doctrinam & calculus quoque irrationalium eadem nitatur; non unum est, quod respondeo. Primum constat, calculum fractionum & irrationalium erui posse per Algebram, quemadmodum specimine quodam docuimus (§. 146 *Analys.*) & quod idem imitari detur in casibus aliis, etiam in Algorithmio fractionum, monuimus (§. 147. *Anal.*). Sane per Algebram reperiri posse reductionem fractionum ad minores terminos, quod dubio careat, exemplo singulari hoc docere lubet. Sit fractio reducenda $\frac{9}{12}$ Fiat

$$\frac{9}{12} = y$$
$$\text{erit } 9 = 12y$$
$$3 = 4y$$
$$\frac{3}{4} = y$$

adeoque $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

Quodsi pro $\frac{9}{12}$ substituas $\frac{a}{ma}$, vel, si mavis $na : ma$; habebis regulam, quæ in Arithmetica ad fractiones ad minores terminos reducendos præscribitur. Cumque calculus hic nitatur axiomatis notissimis, intelligi etiam poterit ab iis, qui Algebram nondum didicerunt. Deinde notandum est, nos calculum fractorum & irrationalium jam tradidisse independenter a problemate 32 (§. 124. *Analys.*), adeoque absque circulo vitioso a nobis illustrationis gratia adhiberi posse, quæ aliter jam demonstrata sunt, ut eorum, quæ traduntur, appareat consensus. Quamprimum vero scrupulus iste te angit, tollitur extemplo eo, quem diximus, modo. Quodsi quis Elementa Arithmeticæ & Geometriæ methodo analytica recentiorum demonstrare vel-

let, is calculum literalem cum numeroso in Arithmetica combinare poterat & algorithmum fractorum, nullis suppositis de ratione quantitatum theorematis per Algebram elicere tenetur, antequam per calculum literalem demonstrat theoriam rationum. Ceterum hic notari velim, quam facile committatur circulosus vitiosus, qui non advertitur, ab iis, qui extra systema propositiones aliquas demonstrare volunt, ut agnoscatur necessitas systematum veri nominis in omni scientiarum genere & ut principia, quibus utimur in demonstrando, desumantur ex systemate, in quo propositiones demonstrandæ vel non occurrunt, vel saltem non anteriore loco, quam principia ista, collocantur. Videmus etiam per præcipitantiam judicare eos, qui demonstrationi cuidam circulum vitiosum simpliciter imputant, qui nonnisi in relatione ad certum aliquod systema committitur, ubi nondum demonstraverunt, non posse condi systema, in quo veritates ita sibi invicem subordinantur, ut demonstrationi isti absque circulo vitioso sit locus. Ad talia omnino animum advertere tenentur, quotquot intellectus perficiendi curam gerunt.

§. 162. Inprimis etiam attentionem meretur problema 29 (§. 95. *Analys.*), quo theorema generale pro binomio ad dignitatem quamcunque evehendo investigatur, ope solius calculi literalis, quatenus scilicet ostendit, quomodo theoremata infinita ad unicum reduci possint, ita ut unum æquipolleat infinitis, ut præjudicium illud evellatur animo, quasi intellectus finitus nonsit capax infiniti. Falsum enim esse hinc intelligitur, quod aliis quoque speciminibus comprobabitur in sequentibus, intellectum infinita comprehendere non posse, cum hic formulas numero infinitas sub una quadam contentas exhibeamus. Rationem, cur hoc fieri possit, perspiciet, qui attenta mente perpendere voluerit, quæ hic docentur. Nec minus idem problema singularem attentionem meretur ob artificia singularia, quibus in eodem solvendo utimur, & quorum usus etiam est in aliis, immo quæ artificia heuristica generalia suggerunt extra Mathesin etiam usurpanda.

§. 163.

§. 163. Elementa nimirum Analyseos ita conscripsimus, ut paucas præscripserimus regulas, reliqua vero artificia ipso usu insinuentur: quibus cum utendum sit non modo in eo problemate, ubi primum adhibentur, verum etiam in aliis, ubi adhiberi possunt; si reflectendo super iisdem distincta eorundem notio animo imprimitur, & facilius eadem memoria retinentur, & eorum statim meminimus, quando iisdem denuo opus habemus, nec tentatis demum frustra aliis in ea casu incidimus. Generalia vero Artis inveniendi præcepta ut inde abstrahat, qui artificia, quibus utimur, nondum distincte animo concepit, & in rationes eorum inquisivit, prorsus impossibile est. Quoniam generalia constituuntur similitudine latente in specialibus, ingenii quoque acumen mirifice augetur generalium ista abstractione, quam juvant regulæ de notione generis ex data notione speciei formanda (§. 710. *Log*) & de notione generum superiorum ex notionibus inferiorum derivanda (§. 711. *Log.*), quemadmodum ad applicationem extra Mathesin adjuvant regulæ de notionibus specierum ex notione generis (§. 712. *Log.*) & de notionibus specierum aliarum ex notione speciei unius deducenda (§. 714 *Log.*), quas singulas & ipsas a Mathesi abstrahi posse, exempla docent, quibus problemata hæc illustravimus in Logica.

§. 164. Nemo a nobis requisiverit, ut artificia specialia, quibus utimur, ad notiones generales revocemus & alias speciales determinemus, quibus extra Mathesin in aliis veritatibus investigandis opus est. Hæ enim pertinent ad Artem inveniendi generalem, quam suo loco, si Deo visum fuerit, explicaturi sumus: ubi in notis adjectis doceri poterit, quomodo ab artificiis analyticis Mathematicorum abstrahantur, quæ in ea ex notionibus ontologicis & psychologicis aliisque Philosophiæ principiis demonstrantur. Sufficit excitasse attentionem illorum, qui studium Philosophiæ cum mathematico conjungunt, ea methodo philosophantes, qua nos utimur.

§. 165. Enimvero progrediamur ad Algebram proprie dicti-

ctam. Algebra primum non erat nisi regula arithmetica, quæ instar regulæ trium in eadem docebatur & in numeris tantummodo exercebatur. Arithmetica literali a *Vieta*, Gallo, inventa latior patebat ejus usus, cum sub literis non solum numeri seu quantitates discretæ, sed & magnitudines seu quantitates continuæ comprehenderentur. Unde calculum literalem *Vietæ* ad Geometriam elementarem applicabat *Ghetaldus* Italus in libris de Resolutione & Compositione mathematica. Cum *Harriottus*, Anglus, Arithmeticam literalem ope Characteristicæ magis perfecisset, & *Cartesius* genuina characteristica potentiarum usus, quemadmodum jam obiter monuerat *Keplerus* in Harmonica & rationem designationis perspicue multo ante docuerat *Stifelius* in Arithmetica integra, numerorum cossicorum naturam ex genuinis fundamentis eruens, Algebram quoque ad Geometriam superiorem applicaret; illustrior adhuc ejus evasit usus. Nos igitur ut in tradenda Algebra gradatim progrederemur, primum eam exercere docuimus in problematis arithmeticis determinatis, deinde etiam in indeterminatis, mox in problematis Geometriæ elementaris, tandemque in problematis Geometriæ sublimioris. Quoniam vero Geometria sublimior aliud adhuc calculi genus requirit, in quo quantitates supponuntur infinite parvæ, methodo a *Keplero* in Stereometria primum quasi obiter indicata, a *Cavalerio* in Geometria Indivisibilium magis promota & a *Stephano* præsertim *de Angelis* atque *Gregorio a S. Vincentio* ulterius exculta; hoc quoque calculi genus cum reductione quantitatum ad series infinitas per divisionem *Mercatoris* & extractiones radicum *Newtonianas* combinatum explicavimus, & Algebræ usum adhibito hoc calculo in Geometria sublimiori multo latiorem exposuimus. Ceterum cum in Geometria elementari omiserimus theoremata nonnulla, quæ difficilius demonstrantur, qualia sunt de multisectione anguli seu divisione circuli & arcus in partes quotcunque æquales & de investiganda soliditate corporum regularium, nec non de inscriptione quorundam polygonorum

rum

rum in circulo ab *Euclide* demonstrata, Geometriam vero sublimiorem methodo veterum demonstratam prorsus non attigerimus; quæ hic desiderari poterant, per Algebram investigare docuimus, ut una eademque opera & ars inveniendi exerceretur, & theorematum scitu necessariorum cognitio acquireretur. Quoniam enim non cujusvis est in numeris & lineis atque figuris consenescere, & ab omnibus studium Philosophiæ cum mathematico conjungi consultum sit, plerique etiam non alio fine Mathesin puram tractare debent, quam ut in Philosophia aliisque studiorum generibus felicius progrediantur; Elementa Arithmeticæ ac Geometriæ abunde sufficere existimavimus, ut genuinam methodum, sine qua ad solidam rerum cognitionem in quocunque scientiarum genere perveniri minime datur, nobis familiarem reddamus, præsertim si demonstrationes nostro more resolvantur & singula analytice repræsententur, quemadmodum capite primo præcepimus, & ceterarum veritatum mathematicarum facillimo modo acquirendam esse duximus

§. 166. Studium algebraicum ut facilitaremus, primas tantummodo exposuimus regulas (§. 141. 143. *Analys.*), easque statim applicavimus ad exempla, problematis eo consilio electis, ut vel artificium aliquod analyticum animo insinuent, vel veritatem quandam cognitu necessariam doceant. Ita problemate statim 38, quod in hoc genere primum est, (§. 144. *Analys.*) ostendimus, dari proprietates numerorum singulares, quibus ab omnibus aliis distinguuntur, & quæ differentiam eorum numericam constituunt. Hoc ipso illustratur doctrina de differentia numerica individuorum, in Ontologia a nobis tradita, & in Cosmologia ac Psychologia demonstrata, ex doctrina autem de origine idearum in intellectu divino prorsus a priori deducta ex ipsa natura & attributis Dei, entis omnium primi, multo clarius elucescens, scholæ autem non satis animadversa, multo minus expensa. Quoniam vero exemplum nonnisi singulare est, numeri nempe nonnisi duodenarii, sequente statim problemate (§. 145. *Analys.*) theorema generale eruere docemus,

tum ut pluribus exemplis confirmetur idea tam nobilis multique per philosophiam omnem tam practicam, quam theoreticam usus, tum ut uberius explicetur artificium problemata particularia, immo singularia, ad universalitatem revocandi, cujus jam specimina quædam dedimus in anterioribus, veluti cum problema generale de binomino ad dignitatem quamcunque evehendo (§. 95 *Analys.*), de radice quacunque inde extrahenda (§. 98. *Analys.*) & de infinitinomio ad dignitatem quamcunque evehendo proponeremus (§. 102. *Analys.*), & regulas de permutatione quantitatum seu variatione ordinis earundem ad universalitatem revocaremus. Similiter problemate 40 (§. 146. *Analys.*) specimine quodam docui per Algebram investigari posse talia, quæ aliis etiam modis erui possunt, & in scholio (§. 147. *Analys.*) monui, idem in aliis quoque eodem modo procedere. Quod vero utilitate sua non destituatur, eandem veritatem pluribus modis diversis investigari supra jam monuimus (§. 161). Illustravimus differentiam, quæ intercedit inter solutionem problematum in numeris abstractis & concretis (§. 161 *& seqq. Analys.*) & artificia reductionis insinuavimus (§. 163. 183. 184. *Analys.*). Cum de proportione harmonica & contra harmonica, nec non de numero pronico & numeris polygonis aliisque figuratis nihil diximus in Arithmetica, ne ejus theoriam nimium extenderemus & a studio Geometriæ nimis diu detineremus tyrones, studii mathematici facile effecturi desertores; defectum istum hic supplemus, dum theoremata præcipua ad theoriam istorum numerorum spectantia per Algebram eruere docemus (§. 186. *& seqq. ac* §. 206 *& seqq. Analys.*). Idem a nobis factum esse in reliquis capitibus, qui animum huc advertere libuerit, facile deprehendet.

§. 167. Inprimis autem singularem attentionem meretur artificium prorsus singulare, quo in summandis quadratis & cubis, quorum radices in serie numerorum naturali progrediuntur, utimur (§. 200 *Analys.*) & quod mox ad summandas potentias quascunque numerorum naturalium transferimus (§. 203. *Analys.*)

Analyf.), ac deinde ad summandos numeros polygonos (§. 212 *Analyf.*) & ad summandos quoque pyramidales adhibemus (§. 216. *Analyf.*). Quantum enim eodem præstetur, abunde intelliget, qui quæ hac methodo eruuntur conferre voluerit cum Arithmetica infinitorum *Wallisii* & inprimis *Bulliadi.* Facile autem apparet, methodum hanc ad alia problemata arithmetica solvenda transferri posse, perinde ac calculus summatorius in Geometria amplissimum habet usum. Nec puto faciliori modo potentias & numeros figuratos summari posse. Loquuntur autem hæc ipsa problemata & problema de binomio ad dignitatem infinitam evehendo ac radice quacunque ex eodem extrahenda, ut alia taceamus, quam ardua problemata per calculum literalem & Algebram solvi possint, etiamsi paucissima theoria fueris instructus, ut adeo methodi hæ in arte inveniendi præ methodo veterum sese maxime commendent. Per eas enim aditus ad ea patet, quæ a nostra cognitione intervallo quam longissimo adhuc sunt remota. Clarius idem elucescet in sequentibus. Unde si quis in Mathesi inventorem agere voluerit, ei Analysis Mathematicorum recentiorum nunquam satis commendari potest.

§. 168. Per universam Analysin in solvendis problematis calculum integrum distincte exhibuimus, ut quilibet tyro proprio Marte intelligat, quomodo problema fuerit solutum, & quomodo ordine in solutione sit progrediendum, quem præscribunt regulæ generales ab initio expositæ. Lineis quoque distinximus ea, quæ ex anterioribus concluduntur, ab iis, ex quibus colliguntur per communem algorithmum. Non tamen hoc ipso solutiones reddidimus prolixiores, quin potius in minus easdem spatium haud raro coarctavimus. Et qui citra confusionem, quæ errorem facile parit, absque ulla molestia problemata solvere voluerit; eo modo calculum instituere tenetur, quo eundem in contextu repræsentamus. Quilibet adeo experie-

rietur, nullibi ipsi esse hærendum, modo attentionem afferre voluerit. Equidem brevitatis gratia nonnisi speciminibus quibusdam ostendimus, quomodo formulæ algebraicæ verbis explicentur, ut prodeant regulæ, per quas problema solvitur in dato quocunque casu particulari, nec non quomodo theoremata ex calculo eruantur. Suadendum tamen tyronibus, ut idem faciant in singulis problematis. Sentient utilitatem, ubi in hoc labore sese præstiterint diligentes. Explicavimus formulas per numeros, ut discant tyrones, quod eædem instar regulæ sint, quæ per calculum eruuntur universalem. Initio tamen utilitate sua non caret, si solutionem algebraicam tententin exemplis singularibus, numeris in locum literarum, quibus quantitates datæ designantur, surrogatis, quemadmodum exemplo aliquo ostendere lubet. In problemate 41 (§. 148. *Analys.*), datur duarum quantitatum summa & eorundem factum, quæruntur quantitates ipsæ. Quare si sit summa $a = 14$, factum $b = 48$; resolutio talis erit:

Sit summa $= 14$ semidiffer. $= x$
factum $= 48$ erit Quant.

$$\text{maj.} = 7 + x$$
$$\text{min.} = 7 - x$$
$$\overline{ - 7x - x^2}$$
$$49 + 7x$$
$$\overline{\text{Factum} = 49 - x^2}$$

Ergo

$$49 - x^2 = 48$$
$$\overline{1 - x^2 = 0}$$
$$\overline{1 = x^2}$$
$$\overline{1 = x.}$$

Quare $7 + x = 8$ & $7 - x = 6$.

§. 169. Quodsi problemata quoque per Algebram numerosam solvas, non modo hinc elucescet discrimen inter Algebram numerosam & speciosam & hujus præ illa præstantia agnoscetur, cum per istam nonnisi exempla computentur, per hanc vero solutiones, adeoque veritates universales detegantur; verum etiam calculus algebraicus reddetur familiarior & clarior. Hoc vero suademus nonnisi primis tyronibus. Qui enim in calculo jam fuerint versati, istiusmodi exercitiis non amplius habebunt opus. Consultum vero est exemplum calculi

culi numerosi conferri cum calculo specioso, tum ut appareat, quantum conveniant, quantum differant, tum ut numerosus lucem affundat specioso. Quodsi quis universalitatem in calculo numeroso conservare velit, haud difficulter idem præstabitur, quemadmodum exemplum modo allatum & hic alia forma exhibitum docet:

$$7^2 - x^2 = 48$$

$$7^2 = 48 + x^2$$

$$7^2 - 48 = x^2$$

$$\sqrt{(7^2 - 48)} = x$$

Vides nimirum in quolibet casu a quadrato semisummæ 7^2 subtrahendum esse factum & ex residuo extrahendam radicem, ut habeas semidifferentiam numerorum quæsitorum. Quodsi veteres hoc animadvertissent, per Algebram numerosam ante inventum calculum literalem non minus veritates universales eruissent, quam nunc per speciosam erui solent. Si enim in calculo numeroso universalitatem conserves, specioso prorsus æquipollet, quemadmodum collatio utriusque calculi intuenti extemplo prodit. Immo hoc pacto etiam eodem successu per Algebram numerosam solvi poterant problemata geometrica, quemadmodum nunc solvuntur per speciosam. Sed de hoc dicemus suo loco. Ratio in aprico est. Per calculum speciosum obtinentur solutiones universales, quia idem in omni casu particulari, & pro literis, quibus quantitates datæ designantur, numeri quilibet substitui possunt, salvo calculo integro. Idem vero succedere eodem modo in calculo numeroso, qui universalitatem conservat, per se patet. Quoniam signa primitiva, qualia sunt, quibus exprimuntur quantitates datæ, prorsus arbitraria sunt, notis autem numericis significatum universalem imponere licet, universum a singulari, quem habent, veluti ut 14 non significet summam ex duobus numeris determinatis (quas hic esse 8 & 6 solutio prodit), sed summam ex duobus quibuscunque numeris, immo generalius ex duabus quibuscunque quantitatibus compositam, veluti si significet lineam in duas quascunque partes divisam, & similiter 48 non denotet factum ex duobus numeris determina-

tis iisdem cum anterioribus, quorum ſumma eſt 14, ſed potius factum ex duobus quibuscunque aliis cum illis tantummodo iisdem, qui ſummam conficiunt, vel generalius ex duabus quibuscunque quantitatibus cum illis iisdem, ex quibus ſumma componitur, veluti quando 14. ſignificet lineam in duas quascunque partes diviſam, ſi 48 denotet rectangulum ex parte una in alteram.

§. 170. Non difficile fuiſſet veteribus hæc animadvertere, ſi quidem in univerſalia in iis, quæ cognoſcebant, latentia mentis aciem intendere voluiſſent, & a notatione numerorum notiones Artis characteriſticæ univerſales abſtraxiſſent: ad quod faciendum non defuit ipſis acumen, ſed defecit tantummodo attentio ad ea, quæ pro ſcopo præſente ſatis cognita atque perſpecta deprehendebant. Diſcant hinc velim omnes, quibus puerilia, aut ſaltem ſuperflua videntur, quæ ad tractandam Matheſin præcipimus; quantum non modo ſibi, verum etiam ſcientiæ deſint, qui, quæ ſe ſatis intelligere arbitrantur, ea nulla amplius attentione dignantur, & vulgarium meditationem ad ſublimia nitentibus non convenire arbitrantur. Multo luculentius hæc patebunt, ubi Artem inveniendi explicare licuerit. Nos experti, quantum valeat vulgarium meditatio, nulli dubitamus, quin in Philoſophia univerſa, præſertim in Phyſica & Philoſophia morali, immo ipſa civili, dudum principia certa, per quæ ad remotiora paratur aditus, conſtituiſſent Philoſophi, ſiquidem ad notiones communes ex maxime vulgaribus derivandas ſufficientem attentionem afferre voluiſſent. Neque vero exiſtimandum eſt, convenire hæc iis, quibus ad ſublimiora non conceditur aditus. Etenim non leve acumen requiritur, ut notiones communes, quas ſuppeditant obvia, non modo ad diſtinctas & determinatas revoces, ſed & inde univerſales abſtrahas. Quænam enim, quæſo, ratio eſt, cur notionum communium admodum fertilium, quemadmodum vel *Euclidis* Elementa teſtantur, immo ipſa quoque Algebra confirmat, non eum hactenus fecerint uſum Philoſophi, nec etiam

in

in dirigendis actionibus viri prudentes, quem facere poterant, nisi quod negligantur ab iis, qui acumine alios vincunt. Sane cur Mathematici summi, quorum acumen accusari nefas, genuinam demonstrationis formam non apprehenderint, ratio alia non est, quam quod eandem attentione sufficiente dignati minime fuerint, sine qua distinctam ejus notionem consequi minime datur. Constat autem, quantum sibimetipsis defuerint, tum ubi demonstrationes more veterum in ipsa Mathesi dare voluerunt, tum quando extra eandem veritates quasdam demonstrare conati sunt. Quo majore acumine maxime vulgaria perlustrantur, eo profundiora in iis latentia in apricum proferuntur.

§. 171. Postquam usum Algebræ in solvendis problematis Arithmeticis determinatis ostendimus, ad problemata indeterminata progredimur capite secundo. Applicamus in eo Algebram ad problemata pleraque *Diophanti*, a quo horum solutio *Analysis Diophantea* appellari suevit. Ex quo Algebra ad Geometriam, præsertim sublimiorem, & inprimis ad problemata physico-mechanica applicata fuit, Analysis Diophantea negligi cœpit, ita ut præter *Ozanamum* in Elementis Algebræ vix quisquam fuerit alius, qui ultra *Diophanteos* limites eandem promovere conatus fuerit. Quam minus recte autem hoc fiat, jam *Leibnitius* monuit, qui ejus præclarum usum in Analysi infinitorum observavit. Singularibus in iis artificiis haud raro opus est, tum si denominationem spectes, tum si reductionem consideres. Quamobrem suadeo, ut, qui horum problematum solutionem expendit, in rationem inquirat, cur denominatio hoc modo fuerit facta & reductio hoc modo instituatur, ubi aliquid inusitati occurrit. Ex. gr. in problemate 92 (§. 230 *Analys.*), quo summam duorum quadratorum in duo alia quadrata dividere jubemur, ubi latus quadrati majoris dicitur, a, minoris b; latus quæsiti unius appellatur $a-z$, latus alterius $yz-b$. Ratio denominationis non patet per communes regulas: per eas enim dicendum erat latus unum x, alterum y (§. 141. *Analys.*). Enimvero si denominatio hoc

modo fiat, habebimus $a^2 + b^2 = x^2 + y^2$, consequenter $x = \sqrt{(a^2 + b^2 - y^2)}$. Sed hæc solutio nulla est, cum in Analysi Diophantea solutio quæriatur in numeris rationalibus. Quamobrem in scholio (§. 231. *Analys.*) monuimus, cur ad vitandam irrationalitatem latera quadratorum quæsitorum sumserimus $a - z$ & $yz - b$. Enimvero cum idem non fecerimus in ceteris, sed propriæ discentis meditationi reliquerimus; necesse est ut ad rationem generalem animum advertens specialem ex conditione calculi eruat.

§. 172. Quoniam in problematis indeterminatis facilius aberratur, ubi singularia artificia adhibenda sunt; tyronibus suadendum, ut problemata generaliter soluta etiam in numeris aliquoties solvant, quo artificia ista ipsis magis familiaria reddantur. Consultum etiam est, ut, ubi formulas generales per numeros explicaverint, examen addant, quo numeros repertos conditionem in problemate præscriptam habere innotescit. Ex. gr. in problemate 87 (§. 225. *Analys.*), reperiuntur numeri 11 & 6, quorum partes aliquotæ numeris suis additæ efficere debent eandem summam. Quoniam 11 est numerus primus, quem quippe sola unitas metitur (§. 75 *Arithm.*), præter unitatem partem aliquotam aliam non habet (§. 30. 74 *Arithm.*). Unitas igitur si eidem addatur, sur... efficitur 12. Ast senarii partes aliquotæ sunt 1, 2 & 3, quas ubi addas ipsi numero 6; habebis itidem summam 12. Similiter per formulam generalem determinantur duo numeri 104 & 116. Illius partes aliquotæ sunt, 1, 2, 4, 8, 13, 26 & 52: hujus vero 1, 2, 4, 29 & 58. Est vero 1 + 2 + 4 + 8 + 13 + 26 + 52 + 104 = 210, & 1 + 2 + 4 + 29 + 58 + 116 = 210. Nec inconsultum est, ut etiam in hac Analysi formulæ algebraicæ verbis explicentur, quemadmodum supra præcepimus (§. 168.), si quis præsertim Mathesin non sibi soli discit, sed intellectus potissimum perficiendi gratia eidem incumbit. Etenim non leve exercitio opus est, ut, quicquid animo concipis, verbis distincte enuncies. Nisi vero hac facultate polleas, in studio philosophico

phico & quocunque alio scientiarum genere accurata methodo nunquam uteris. Extra Mathesin non habemus characteres & figuras, quibus imaginatio juvatur & defectus distincte enunciandi, quæ concipiuntur vi intellectus, suppletur. Inprimis autem usui est, ut quam maxime abstracta verbis perspicuis accurate enunciare valeas, ubi tibi propositum fuerit ex perceptionibus obviis eruere notiones universales, quæ iisdem insunt & veritatibus in casu particulari agnitis omnem suam tribuere amplitudinem, quam habere possunt: id quod mirifice conducit ad omnem cognitionem promovendam & prudentiam, qua ad recte agendum opus habemus, amplificandam. Immo augebitur eodem medio notiones distinctas formandi facultas, quæ non adeo facile acquiritur, quemadmodum vulgo putatur, præsertim ubi cum abstractis tibi fuerit negotium. Scholastici in distinguendis iis, quæ diversa sunt, satis fuerunt acuti; sed quæ confuse perceperunt, distincte concipere & verbis perspicuis accurate enunciare non valuerunt. Quamobrem Metaphysicam tenebris involverunt, nec ratiocinando quicquam ex notionibus confusis colligere potuerunt, ut scientia nobilissima in terminologiam versa fuerit ac proinde a nonnullis perperam pro Lexico quodam philosophico habita. *Cartesius* vero, qui notionum distinctarum usum indispensabilem in scientiis perviderat, Ontologiam in eorum numerum retulit, quæ contemni merentur, & in Physicis imaginaria cum realibus confudit, ut ad veritatem liquidam pertingere non potuerit, Philosophiam vero practicam, quam excoli maxime interest, prorsus intactam reliquerit, etsi ipsi propositum esset Philosophiam reformare, cujus defectus abunde agnoscebat.

§. 173. Sed dicta sufficiant de applicatione Algebræ ad problemata arithmetica. Progrediamur itaque ad problemata geometrica, quæ capite tertio traduntur. Problemata geometrica duo singularia habent. Etenim plerumque artis est invenire æquationem, nec ea tam obvia est, quemadmodum in problema-

blematis arithmeticis puris, ubi ſcilicet numeri dantur abſtracti. Deinde non minoris artis eſt formularum algebraicarum, per quas determinatur quæſitum, conſtructio geometrica. Immo ſubinde difficultate non caret, ut reperias, quid quæri debeat, ut in commodam incidas ſolutionem. Quamvis vero problemate 110 (§. 250. *Analyſ.*) præſcribantur regulæ generales de invenienda æquatione, eædem tamen non ita determinatæ ſunt, ut in dato quolibet caſu ſtatim appareat, quanam earum utendum ſit ad æquationem inveniendam, ſed haud raro variis id tentandum eſt modis. Similiter in problemate 111 & 112. (§. 252. 253. *Analyſ.*) docuimus, quomodo conſtruantur æquationes ſimplices & quadraticæ omnes; monuimus tamen in ſcholio (§. 254. *Analyſ.*), quod hoc modo raro incidamus in conſtructiones concinnas, quales ſunt, quæ in Elementis Geometriæ extant, cum tamen concinnæ potiſſimum deſiderentur. Quamobrem modus, quo pervenitur ad æquationem, & quo æquatio ultima, per quam determinatur quæſitum, conſtruitur, majorem attentionem meretur, quam qua in problematis arithmeticis uſi fuimus, ut pateant artificia, quibus utimur, in aliis caſibus ſimilibus, quando occurrunt, imitanda. Ut autem conſtructionem concinnam reperias, primo tentanda eſt per regulas generales, quæ præſcribuntur. Deinde diſpiciendum, quomodo omnes linearum determinationes eidem ſchemati includantur, in quo lineæ ſingulæ commodum nanciſcantur ſitum, ut prodeat ſchema, quod viſum minime offendit, & in quo citra moleſtiam lineæ ex loco uno in alterum transportantur. Nulla adhuc datur conſtructionum elegantium theoria, in qua elegantia, quam ipſi tribuimus, ad notiones diſtinctas reducitur, quamvis ea non impoſſibilis ſit. Pendet ea a principiis generalibus pulchritudinis entis compoſiti, quam & ipſam nemo hactenus explicavit. Inſunt Architecturæ civili notiones quædam generales, quæ huc faciunt; ſed nemo hactenus ad eas, quantum publice conſtat, animum advertit. Quamobrem hactenus in caſu omni demonſtrari

strari nequit, constructionem, quam dedisti, esse eam, in qua nihil desiderari possit. Et haud raro casui magis, qam arti tribuendum, quod in constructionem incidas, quæ pulchritudine sua sese commendat. Neque vero existimandum est, si vel in nostris Analyseos elementis, vel apud autores alios occurrunt constructiones elegantes; eas ex formula algebraica juxta regulas generales resoluta primo statim conamine deductas fuisse: Quin potius pro certo tenendum, eas haud raro multum negotii fecisse inventoribus, antequam ad eam formam deducerentur, quam habent. Ceterum ut dicta intelligantur, specialia quædam addenda sunt.

§. 174. In problemate 113. (§. 255. *Analys.*), quo ex data perimetro & area trianguli rectanguli hypothenusam invenire, ipsumque triangulum construere docemus, non minus æquationis investigatio, quam trianguli constructio singularia quædam habent, quæ attentionem merentur. Quodsi in investiganda æquatione via ordinaria, quam monstrant regulæ generales, incedere voluissemus, hoc modo æquatio inventa fuisset.

$AB + BC + CA = a \qquad AC = x$

$\text{Area} = b^2 \qquad AB = y$

erit

$AB + BC = a - x$

$BC = a - x - y$

Duæ cum inveniendæ sint æquationes, alteram suppeditat theorema Pythagoricum, vi cujus $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (§. 417 *Geom.*), alteram vero area trianguli $= \frac{1}{2}$ AB. BC (§. 392 *Geom.*). Habemus itaque

$x^2 = 2y^2 + a^2 - 2ax + x^2 - 2ay + 2xy$

$o = 2y^2 + a^2 - 2ax - 2ay + 2xy$

$2ax - 2xy = 2y^2 + a^2 - 2ay$

$x = \frac{2y^2 + a^2 - 2ay}{2a - 2y}$

$b^2 = \frac{1}{2}ay - \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}y^2$

$\frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}ay \cdot \frac{1}{2}y^2 - b^2$

$xy = ay - y^2 \cdot 2b^2$

$x = \frac{ay \cdot y^2 - 2b^2}{y}$

Quamobrem

$\frac{2y^2 + a^2 - 2ay}{2a - 2y} = \frac{ay - y^2 - 2b^2}{y}$

$2y^3 + a^2y - 2ay^2 = 2a^2y - 4ay^2 \cdot 4ab^2 + 2y^3 + 4b^2y$

$o = a^2y - 2ay^2 + 4b^2y - + 4ab^2$

$$\frac{2ay^2 - 4b^2y - a^2y = -4ab^2}{y^2 - \frac{4b^2 - a^2}{2a}y = -2b^2}$$

Fiat $\frac{4b^2 + a^2}{2a} = m$,

erit $y^2 - my = -2b^2$
$\frac{1}{4}m^2 \quad \frac{1}{4}m^2$

$$y^2 - my + \frac{1}{4}m^2 = \frac{1}{4}m^2 - 2b^2$$

$$y - \frac{1}{2}m = \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 - 2b^2)}$$
$$\frac{1}{2}m - y$$

$$y = \frac{1}{2}m \pm \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 - 2b^2)}$$

Vides hic, quam prolixus evadat calculus, si viam ordinariam ingrederis stricte inhærens regulis generalibus. Incidis in æquationem quadraticam affectam, cum in solutione, quam in textu dedimus, æquatio sit simplex, adeoque primi gradus. Quodsi y per constructionem geometricam determinare volueris, primo eruendus est valor ipsius m. Est vero $m = \frac{4b^2 - a^2}{2a} = \frac{2b^2}{a} - a$. Unde patet, te eadem opera, si æquatione in contextu utaris, reperisse hypothenusam, qua hic valorem m reperis, quo in constructione geometrica æquationis ultimæ hic opus habes: ut adeo dubitari non possit, constructionem quoque fore multo prolixiorem, & intricatiorem ea, quam in contextu exhibemus. Abbreviatur calculus & æquatio multo simplicior eruitur, quia problema ad æquationem reducturus uteris theoremate de compositione quadrati, cujus radix binomia (§. 261 *Arithm.*), adeoque plures veritates cognitas supponis, quam si viam ordinariam ingrederis & ad circumstantias particulares animum attendis, quarum viam ordinariam ingressus nullam habes rationem. Nihil itaque hic singulare occurrit, quod non eodem modo locum habeat in aliarum regularum generalium applicatione. Qui ea attentione utitur in addiscenda Mathesi, quam in capite primo inculcavimus; rationem hanc jam didicit in Practica Italica, ubi ob circumstantias singulares ope theorematum, quæ tanquam cognita præsupponuntur, & quorum in regula trium opus non habemus, calculus abbreviatur. Discas hinc velim, quod, si nostro more in studio Arithmeticæ & Geometriæ versatus acu-

acumen quoddam tibi compararereris, te in studio quoque algebraico fore acutiorem, & dum eidem incumbis, in majore luce versaturum. Acumen vero hoc studio algebraico auctum non uno nomine sese tibi commendabit, ubi ad philosophiam & alia addiscendum progredieris, immo in ipsa praxi vitæ. Enimvero constructio quoque trianguli rectanguli ex perimetro & area datis attentionem meretur. Vulgo triangula rectangula construimus ex datis cruribus, quibus ad angulum rectum junctis determinatur hypothenusa: quæ etiam ratio est, cur problema per regulas generales solventes investigamus cruris y valorem. Construi vero etiam potest triangulum rectangulum data hypothenusa & altitudine: quæ constructio denuo uberiorem theoriam supponit, quam communis, quod facile animadvertes, ubi fundamentum, quo nititur constructio, perpendere volueris. Unde vides, cur inventa hypothenusa etiam quæsiverimus altitudinem. Et quoniam inventa in numerum cognitorum refertur, x non amplius spectatur tanquam magnitudo incognita, sed pro cognita habetur, ut adeo constructionem præter necessitatem efficeres prolixiorem & intricatiorem, si pro x valorem inventum in æquatione $y = b^2 : \frac{1}{2}x$, $= 2b^2 : x$ substituere velles. Immo commodius accidit, si retineas $y = b^2 : \frac{1}{2}x$, quam si reductione modo ordinario facta sumas $y = 2b^2 : x$. In quo denuo latet quoddam artificium, quod in geometricis constructionibus formularum algebraicarum utile est, & quo etiam in sequentibus utimur.

§. 175. Regulas arithmeticas non adscripsimus brevitatis gratia, non modo, quod geometricarum constructionum hic potissimum habetur ratio; verum etiam quod ex anterioribus satis manifestum supponimus, quomodo formulæ algebraicæ arithmetice explicentur, & regulæ arithmeticæ inde deducantur. Non tamen ideo tyrones negligere debent formularum per numeros explicationem & regularum arithmeticarum enunciationem. Etsi vix opus esse videatur, exemplo præsenti rem declarari; ut tamen consula-

sulamus minus perspicacibus, id fecisse non nocebit. Æquatio itaque $x = \frac{1}{2} a - 2b^2 : a$ hanc suppeditat solutionem arithmeticam, adhibito artificio, quod sub finem paragraphi præcedentis commendavimus: 1. Quæratur ad perimetrum dimidiam $\frac{1}{2}a$ & latus quadrati areæ æqualis b tertia proportionalis, quæ erit $\frac{2b^2}{a}$. 2. Hæc subtrahatur a semiperipheria $\frac{1}{2}a$, relinquetur hypothenusa quæsita. Arithmetice explicabis formulam hoc modo. Sit $a = 12$, $b^2 = 6$. Erit $\frac{1}{2}a = 6$, adeoque $x = 6 - \frac{12}{12} = 6 - 1 = 5$.

§. 176. Qui ex solutionibus problematum proficere voluerit, quantum datur, is negligere minime debet theoremata, quæ offerunt æquationes. Quamobrem in problemate, quod nunc perlustramus, docuimus, quomodo theorema ex æquatione secunda, seu penultima eruatur. Enimvero ipsa etiam æquatio ultima theorema non inelegans suppeditat. Cum enim $2b^2 : a$ vel $b^2 : \frac{1}{2}a$ sit differentia inter semiperimetrum trianguli rectanguli $\frac{1}{2}a$ & hypothenusam x; exemplo patet theorema sequens: *Differentia inter hypothenusam & semiperimetrum trianguli rectanguli est tertia proportionalis ad semiperimetrum & latus quadrati areæ trianguli æqualis.* Non video quid obstet, quod minus hoc theorema ceteris Geometriæ elementaris adscribi possit, nisi quod usum, quem habere possit, non prævideas: nullum enim esse demonstrare minime vales. Sane si hæc ratio sufficeret ad theoremata ex Mathesi eliminanda, multa ex eadem arcenda & olim fuissent, & nunc essent, quorum egregius prorsus successu temporis comparuit usus, & in posterum comparebit. Ecquis prævidere poterat usum, quem habet comparatio progressionum arithmeticarum & geometricarum, cui inventum logarithmorum longe utilissimum deberi constat, & qua *Stifelius* usus in algebraicis æquationibus intimius explicandis? Quodsi igitur hanc comparationem tanquam inutilem rejicere voluissent Mathematici, locum in Mathesi eidem denegaturi, quod usum ejus minime præviderent; logarithmorum doctrina & ardua illa, quæ in Mathesi sublimiori

miori ab eadem pendent, forsan hodienum non essent detecta. Inventores non solliciti esse debent, num, quod investigandum sibi sumunt, utile sit, sed num quod investigaverunt sit verum. Utilitas enim sua veluti sponte sese manifestabit, ubi in veritate investiganda progrediuntur, quam prævidere nullo modo poterant. Multum obest incremento scientiæ, si qui eam promovere possunt ac volunt, hoc præjudicio tenentur, quod de veritatis inveniendæ utilitate prima moveri debeat quæstio. Hæc enim cura tangere debet nonnisi eos, qui ab aliis inventa certo fine addiscunt, etsi cautione multa opus sit, ubi utilitatem ex vero æstimare voluerint, ne, quemadmodum plerumque accidit, quæ maxime utilia sunt præ inutilibus reputentur.

§. 177. Forsan non inconsultum judicaveris, ut constructiones ex calculo erutæ, itemque theoremata hinc derivata etiam more veterum seu synthetice demonstrentur. Non improbo consilium, ubi hoc facile fieri potest, & ea fini problemata quædam per leges rationum reduximus, quemadmodum problema 116 (§. 259. *Analys.*): ubi ipsa reductio demonstrationem quæsitam continet, modo singulæ analogiæ verbis enuncientur. Enimvero cum per Algebram solvantur problemata, quæ a cognitione nostra adhuc procul sunt remota, defectu principiorum ad ratiocinandum requisitorum, per quæ ratiocinando colligi poterat quæsitum, quemadmodum in Geometria fecimus; multa haud raro theoremata intermedia essent invenienda, antequam demonstratio synthetica dari posset. Unde facile intelliges eam non esse in potestate tua. Sume exempli loco theorema, quod modo (§. 176.) elicimus: In triangulo rectangulo differentia hypothenusæ a semiperimetro est tertia proportionalis ad semiperimetrum & latus quadrati triangulo æqualis. Si demonstrationem syntheticam dare volueris, hæc analogia ex aliis notis colligenda per theoremata de ratione quantitatum. Enimvero in Geometria elementari nihil adhuc demonstratum est de perimetro trianguli rectanguli.

Quamobrem alia adhuc invenienda essent heoremata, antequam demonstrationem consummatam dare possis, quales dedimus in Geometria. Nobis jam non vacat eam in rem inquirere, ut exemplo dicta confirmaremus. Nemini igitur suademus, ut tempus in quærendis istiusmodi demonstrationibus fallat, quod longe utilius in exercenda Analysi consumere datur. Quodsi vero obvia fuerit demonstratio, eam addi non dissuademus.

§. 178. Si existimaveris demonstrationes syntheticas dari posse, si vestigiis calculi insistens verbis enuncies, quæ per eum patent, & in reddendis rationibus ad leges calculi confugias; totus falleris: neque enim forma demonstrationis mutabitur, si characteribus expressa verbis enuncientur. Abunde hoc videre licet in Phoronomia *Hermanni*, cujus prætensæ demonstrationes syntheticæ seu lineares, quas vocat, quantum distent a demonstrationibus *Euclideis* nullo negotio deprehendet, qui cum fuerit in resolvendis demonstrationibus more nostro versatus resolutionem demonstrationum Hermannianarum tentare voluerit. Præstat igitur in analysi acquiescere, quam per eandem reperta minus recte demonstrare. Sane ipse *Newtonus* (quod citra injuriam in maxima Viri summi merita dictum esto,) multa corollariorum instar absque ulla demonstratione subjicit propositionibus, quæ subinde prolixam desiderant demonstrationem, si *Euclideo* more evincenda eorundem veritas, immo corollariorum loco habet, quæ absque ulla demonstratione pateant lectori, quæ posita propositione minime ponuntur. Exempli loco est, quando problema inversum virium centripetarum in sectionibus conicis pro corollario directi habet, cum tamen conversio per se minime pateat, nec quis ferret in Geometria elementari, si ex parallelismo linearum demonstrata angulorum æqualitate per modum corollarii absq; demonstratione inferret: Ergo etiam parellæ sunt lineæ, si anguli alterni fuerint æquales. Non omnes propositiones posse con-

verti, ex doctrina logica de conversione satis manifestum est. Quamobrem ubi conversio per rationes logicas non statim patet, conversa utique demonstranda est. Immo cum ex principiis logicis demonstrandum foret, propositionem converti posse; Geometris veteribus consultius visum ex principiis propriis, aliunde non supponendis demonstrare conversam. Nos vero, qui omnibus justum statuere pretium solemus, demonstrationes logicas in numerum artificiorum heuristicorum referimus, per quas reperire, nonnunquam saltem conjectare licet, propositionem aliquam datam & demonstratam converti posse. Qui intellectus perficiendi gratia Mathesi operam navat, is a rigore demonstrandi ne latum quidem unguem recedere tenetur, ne methodi confusæ notiones & de eadem concepta præjudicia noceant extra Mathesin: quod quam facile fieri possit, jam in superioribus monuimus (§. 100. 101.).

§. 179. Ceterum cum demonstrationibus syntheticis confundendæ non sunt demonstrationes, quibus evincitur constructionem juxta formulam per calculum erutam rite esse factam. In his enim supponimus quæsitum eo modo determinandum esse, quemadmodum exigit formula algebraica. Quoniam nos constructiones ad formulam retulimus, earundem demonstrationes in ipsa constructionum explicatione jam continentur. Quod si vero illas verbis enunciare velles, demonstratio ubique adjicienda foret, de qua hic sermo est. Ita in exemplo nostro, ubi triangulum rectangulum construendum ex formulis $x = \frac{1}{2}a - 2b^2 : a$ & $y = b^2 : \frac{1}{2}x$. (§. 255. *Analys.*); constructio pure enunciabitur hoc modo: 1. Erigatur ad perimetrum BD perpendicularis AB, quæ sit ad latus quadrati areæ trianguli æqualis in ratione dupla, fiatque BG ipsi lateri huic æqualis. 2. Quæratur ad BD, AB & BG quarta proportionalis BH. 3. Fiat BC semiperimetro æqualis & ex C in I transferatur modo inventa BH. 4. Super BI describatur semicirculus & ad BO dimidiam ipsius BI, & BE dimidiam ipsius AB quæratur tertia proportionalis BK. 5. Ducatur denique

Fig. algeb. Tab. XII. a Fig. 113.

denique ex puncto K diametro BI parallela KL. Quodsi 6. punctum L cum extremis diametri B & I rectis BL & LI connectatur, prodibit triangulum rectangulum quæsitum BLI. Hoc modo si enunciaveris constructionem, ut prodeat resolutio problematis, quali forma exhibentur resolutiones in Geometria elementari; demonstratio sequens adjicienda utique est, ut manifestum evadat, suppositis formulis algebraicis tanquam veris, seu, uti loqui amamus, iisdem concessis, constructionem esse veram. Nimirum quoniam $BD = a$, $AB = 2b$, $BG = b$; erit quarta proportionalis $BH = 2b^2 : a$. Quare cum sit $BC = \frac{1}{2}a$ & $CI = BH$, erit $BI = x$, seu hypothenusa trianguli rectanguli construendi per formulam primam. Jam quia porro $BO = \frac{1}{2}x$, $BG = BE = b$, erit $BK = b^2 : \frac{1}{2}x$, adeoque altitudo trianguli rectanguli construendi. Quoniam itaque recta KL est ipsi BI parallela & BLI semicirculus super hypothenusa trianguli descriptus; erit BLI triangulum rectangulum, cujus hypothenusa $\frac{1}{2}a + 2b^2 : a$ & altitudo $= b^2 : \frac{1}{2}x$. Quod erat construendum. Suppono nimirum hic tanquam notum, quomodo triangulum rectangulum datæ altitudinis supra hypothenusa sit construendum. Quodsi enim notum non sit, demonstratio ex principiis Geometriæ elementaris facile contexitur. Etenim angulus BLI cum sit in semicirculo *per constr.* rectus est (§. 317 *Geom.*), adeoque BLI triangulum rectangulum, cujus hypothenusa BI (§. 91. 95. *Geom.*). Linea KL est diametro BI parallela & KB ad BC perpendicularis *per construct.* consequenter perpendicula inter easdem intercepta KB & ex L in BI demissum æqualia sunt (§. 226. *Geom.*). Enimvero KB est altitudini trianguli æqualis *per construct.* & perpendiculum ex L in BI demissum ipsa trianguli BLI altitudo (§. 227. *Geom.*). Patet itaque si supra hypothenusa describatur semicirculus & in ejus altero extremo erigatur perpendicularis altitudini æqualis, per ejus vero summitatem ducatur recta diametro parallela & punctum, in quo hæc secat semicirculum, connectatur cum extremis diametri; triangulum rectangulum datæ altitudinis supra hypothenusa data

esse

eſſe conſtructum. Problema hoc cum ſua demonſtratione Elementis Geometriæ inſeri poterat, ex cujus quippe principiis eodem prorſus modo demonſtratur, quo problemata cetera ibidem demonſtrantur.

§. 180. Cum formulæ algebraicæ contineant regulas, per quas ex datis determinatur quæſitum, & per calculum ac demonſtrationem æquationis, niſi hæc in conditione ſeu hypotheſi problematis continetur, verum eſſe conſtet, quod ſic determinetur quæſitum, quemadmodum vult formula; qui conſtructiones ex formulis erutas pure enunciat & easdem deinde hiſce convenienter factas demonſtrat, in demonſtrando ſeſe non minus exercet, quam ſi in demonſtrationibus Arithmeticæ & Geometriæ elementaris verſetur. Quamobrem qui methodum demonſtrandi ſibi familiarem reddere intendunt, eadem extra Matheſin feliciter uſuri; iis omnino ſuadendum, ut conſtructiones pure enuncient & ad eam formam redigant, qua reſolutiones problematum in Geometria elementari exhibentur, atque deinde demonſtrationes, cum quibus jam nobis negotium eſt, ſuperaddant.

§. 181. Et quoniam problematum ſimplicium reductio per leges rationum, cujus exempla quædam dedimus (§. 259. 266. 289. *Analyſ.*), & reductio quadratici ordinis ad lineas reciprocas (§. 263. 265. 278. *Analyſ.*) propius accedit ad Analyſin veterum & demonſtrationes ad formam veterum componendas formaliter continet; eam negligere minime debet, qui methodum veterum cum methodo recentiorum conjungere voluerit. Probe nimirum notandum eſt, ſignorum uſu non variari ipſam methodum, quæ in modo ratiocinandi conſiſtit, ſed tantummodo facilitari & clariorem reddi, quemadmodum demonſtrationes veterum eædem manent, ſi noſtro more reſolutæ ope artis characteriſticæ ſymbolice repræſentantur. Sane per hoc, quod in Geometria elementari utamur ſignis, quorum in Algebra uſus eſt, demonſtrationes non fiunt algebraicæ, quemadmodum hebetiores judicant, ſed tantummodo brevius & clarius exprimuntur. Vocabula non

minus signa sunt, quam signa alia, quæ in locum eorum surrogantur. Quemadmodum itaque eadem manet demonstratio, si vocabula idem significantia sibi mutuo substituis, prouti in versionibus accidere solet, ubi v. gr. Latinis substituis Germanica vel Gallica; ita nec alia evadit, si vocabulis alia signa substituis, quæ cum ipsis idem significant. Ita perinde est, sive dicas, triangulum BDE simile est triangulo BAC, sive scribas, △ BDE ∽ △ BAC: etenim si verbis reddere volueris, quæ ita scripsisti, verbis istis eadem efferre teneris, perinde ac dicendum est, **das Dreyecke** BDE **ist dem Dreyecke** BAC **ähnlich**, ubi Germanice reddere volueris, quod Latine dictum fuerat.

§. 182. In problemate 114. (§. 257. *Analys.*), quo data area trianguli rectanguli, cujus latera sunt in proportione continua, inveniri jubentur latera, & reductio, & constructio singularia habet, quæ attentionem tyronum merentur. In reductione notandus est modus, quo eliminatur quantitas alterutra incognita, utpote a regula generali recedens (§. 141. *Analys.*). Notanda quoque est applicatio calculi irrationalium, qua formula efficitur simplicior. In constructione autem notatu dignum est artificium, quo numeri irrationales in lineis exhibentur & radices quoque quadrato quadratæ per Geometriam elementarem construuntur. Quæ enim in aliquo problemate singularia occurrunt, ad ea advertendus est animus, cum eidem insinuentur artificia, quibus utendum in casu simili, quoties is occurrit. Et selecta dicuntur problemata, quæ vel in veritatum cognitu necessariarum notitiam nos deducunt, vel artificia suggerunt, quibus ars inveniendi locupletatur, ipso usu rectius discenda, quam per præcepta, cum hæc non satis intelliguntur, nisi per exempla. Quamobrem qui in Analysi proficere voluerit, non sine singulari attentione circa singula problemata versari tenetur, ut, si qua nova occurrunt, ea comparatione cum regulis generalibus instituta advertat & memoriæ infigat.

§. 183.

§. 183. Non commemoramus hic alia, quæ in ceteris problematis annotabit attenta mente & solutionem, & constructionem perlustrans, ne præter necessitatem justo prolixiores videamur. Unum tamen est, quod notasse non piget, scilicet ex problemate 124 (§. 275. *Analys.*) patere, per Algebram subinde prodire formulas, quæ statim dant constructionem, quam veteres suo modo invenerunt. Patet in hoc problemate ratio, quod in æquatione investiganda insistamus iisdem principiis, quibus usi veteres in eruenda constructione. Et quamvis problema sequens (§. 279. *Analys.*) de latere Pentagoni inveniendo contrarium insinuare videatur; videbis tamen, si attentius rem consideres, nos totos in eo esse, ut investigemus relationem lateris Pentagoni ad latus Decagoni & Hexagoni regularis eidem circulo inscriptorum simul, qua nititur constructio veterum. Eam vero non dare regulas reductionis generales; sed utendum hic esse singulari artificio substitutionis, quo neglecto, per æquationem $x^2 = 4b^2 - b^4 : a^2$, vel per $\frac{10}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ longe alia prodiret constructio, quam dedere veteres. Immo nisi relatio lateris Pentagoni ad latus Decagoni & Hexagoni simul ex inventis veterum nobis cognita & perspecta fuisset; non facile adfuisset ratio, cur de ista substitutione cogitassemus. Duo igitur hic probe notari velim, cum in veritate investiganda multum relictum sit tentaminibus, in problematum resolutionibus algebraicis & præsertim in formularum constructionibus operam dandam esse, ut problema & ejus constructio efficiatur dependens a veritatibus aliis jam inventis, quæ dependentia in methodo veterum, qua usi sumus in Geometria elementari, & in demonstrationibus propositionum syntheticis unice attenditur, & ut ea fini tententur substitutiones, quibus locus esse potest. Elucescit hinc usus, quo commendatur studium in veritatibus nobis jam notis analytice investigandis, si nempe proponantur tanquam quærendæ. Istiusmodi enim investigationes efficient, ut animum attendas ad artificia, quæ alias eundem non subirent, & quibus posthac felici successu usurus es in

in investigandis iis, quæ nondum cognita, sed adhuc latent. Neque enim sufficit, artificia quædam esse in potestate nostra, verum etiam requiritur ratio, cur eadem mentem nostram subeant, quando iisdem commode utimur: id quod ex principiis nostris Psychologicis abunde patet. Ratio autem ista non semper a nobis pendet, sed à casu, qui potestati nostræ subducitur. Quodsi vero artificia nobis fuerint familiaria, quoniam iisdem jam ante usi ea attentione convenienti memoriæ infiximus, probe conscii varia esse tentanda, ubi veritas latens eruenda, eadem nobis in memoriam revocamus: id quod denuo per principia nostra psychologica manifestum est, ut nihil affirmetur, quod non ex iisdem demonstrari possit, si demonstratio exigatur, quamvis defectum demonstrationis hic suppleat experientia domestica, si quis dictis fidem habere voluerit.

§. 184. Forsan nec inconsultum erit quædam addi ut moneri circa examen Regulæ Renaldinianæ polygonum regulare quodcunque circulo inscribendi. Constat ex Elementis *Euclidis*, constare modum, quo trigonum, quadratum, pentagonum, octogonum, decagonum, Quindecagonum circulo inscribitur, & idem patet ex anterioribus. Quamobrem totum examen huc redit, ut investigetur valor lateris cujusdam polygoni, aut saltem partis ejusdem per regulas demonstratas, deinde vero idem valor eruatur per regulam *Renaldini*, quæ si vera fuerit, valor per eam inventus erit alteri æqualis. Quodsi ergo hosce duos valores æquales ponas, & exinde eruas contradictionem; hinc patebit, regulam Renaldinianam esse falsam, cum alteram veram esse constet. Nimirum hinc agnoscitur illam contradicere veritati manifestæ, adeoque per principia logica, quibus nititur tota methodus demonstrandi per indirectum, colligitur, eam falsam esse debere. Examen adeo præsens pendet a principio contradictionis & in applicatione methodi demonstrandi per indirectum consistit. Eodem artificio utimur etiam in aliis, veluti si quis dederit Quadraturam circuli, sumta diametro pro unitate, valorem peripheriæ erui-

eruimus in fractionibus decimalibus, quia constat numeros *Ludolphi* notissimos cum veritate consentire. Quodsi enim ab his diversi prodeant, prætensam Quadraturam circuli veritati contradicere, adeoque falsam esse colligitur. Novi equidem quod huic examini manus victas dare nolint, qui circuli quadraturam sibi invenisse videntur: sed hi sunt, qui ignorant, quomodo numeros suos eruerit *Ludolphus* & quales sint methodi recentiorum, quibus investigantur series infinitæ pro circulo, unde iidem numeri deducuntur. Valeat hic pervulgatum istud: Cum ignorante principia non est disputandum.

§. 185. Quantum intersit discriminis inter constructionem elegantem & minus elegantem, clarissime elucescit, ubi utramque constructionem trianguli rectanguli ex data area una cum angulo uno obliquo inter se conferre volueris. Ipsa vero hæc collatio etiam manifestabit rationem, cur constructio secunda prima sit elegantior. Constructio secunda simplicitate sua sese ita commendat, ut in Geometriam referri possit. Habet autem hoc singulare constructio, quod recta simul repræsentet sinum totum & rectam datam, sicque loco quartæ proportionalis invenienda sit tertia, singulari modo per constructionem trianguli rectanguli determinata, qui ab eo longius recedit, quem in Elementis Geometriæ docuimus, etsi hujus quoque fundamentum in illis ipsis contineatur. Quodsi quis constructionibus æquationum in Algebra sedulam operam navaverit; is varias solutiones ex Elementis demonstrandas deteget, quæ in usum constructionum elegantium in Algebra non sine tyronum commodo posthac Geometriæ elementari inserentur, ut hæc ampliorem nanciscatur usum & studium construendi formulas algebraicas facilitetur.

§. 186. Problema 152. cum duobus sequentibus (§. 325. *& seqq. Analys.*) inter difficilia referri solet. Ita autem eadem resolvimus, ut nec tyronibus quicquam difficultatis facessant. Præmittitur in resolutione primi theorema, quod tanta facilitate ex principiis Geometriæ ele-

mentaris demonstratur, ut ipsum in iisdem Elementis locum mereatur. Hoc ipso autem exemplo docemur, quod in usum Analyseos & Geometriæ sublimioris supplementum quoddam Elementorum Geometriæ conscribi posset, quo studium algebraicum & Matheseos mixtæ multum facilitaretur. Sane si hoc ipsum theorema, quod ad resolvendum problema præsens primus adhibuit *Newtonus*, ab *Euclide* jam fuisset traditum, Mathematici alii non tantopere in resolvendo hoc problemate desudassent. Confirmat igitur problematis præsentis resolutio ea, quæ superius (§. 176.) inculcavimus de non contemnendis theorematis, quæ nullum usum habere videntur, seu quorum saltem usum prævidere minime licet. Vi hujus theorematis solo calculo literali absque regulis Algebræ ex sinu & cosinu anguli simpli eruuntur sinus & cosinus dupli, tripli, quadrupli, quintupli, sextupli, septupli &c. ita ut hoc problema jam superius c. 3. exhibere potuissemus, ubi usus calculi litteralis in inveniendis theorematis explicatur. Apparent adeo denuo, quam ardua solo calculo literali eruantur, etiamsi Algebra prorsus ignota supponatur. Inprimis vero animum attendi convenit ad artificium, quo ex theorematis particularibus eruitur universale. Consistit hoc in reductione ad theorema generale de binomio ad dignitatem quamcunque evehendo, & reductio ipsa nititur comparatione formularum particularium problematis præsentis cum formulis particularibus problematis superioris. Principium hoc reductionis amplissimum habet usum in omni arte inveniendi, etiam extra Mathesin, quemadmodum jam in Psychologia me monuisse memini. Inprimis autem reductio problematis unius ad aliud, quod notius & simplicius, in Geometria sublimiori & in calculo integrali usum prorsus eximium habet. Quamobrem consultum est hoc artificium tempestive observari. Tollit reductio hæc in casu præsente omnem laborem, eumque valde molestum, quo alias opus foret, si eodem modo legem progressiones in infinitum, quam formulæ particulares loquuntur, ex earundem comparatione eli-

cere velles, quemadmodum supra fecimus, cum theorema generale de binomio ad dignitatem quamcunque evehendo investigaremus. Ostendi etiam, quomodo ex formula cosinus multipli expungatur valor sinus simpli per legem substitutionis, ut cosinus multipli determinetur per solum simplum atque sinum totum. Hoc modo eruuntur alia theoremata particularia & universale quoque aliud prodiret, si eadem substitutione valores b^2, b^4, b^6, b^7, &c. eliminare velles. Quem calculi molestia non deterret, is eundem tentare potest, quamvis non opus habeamus hisce theorematis, cum dato sinu facile reperiatur cosinus (§. 16. *Trigonom.*). Ceterum hic quoque elucet, quomodo infinita theoremata comprehendantur uno generali. Sed cum hic nihil occurrat, quod non jam animadversum fuerit in problemate 29. (§. 95. *Analys.*); plura ea de re non addimus. Corollarium vero, quod adjicitur, attentionem meretur, ut notes alibi etiam profutura. In eodem scilicet ostendimus, quod idem theorema inserviat determinandis chordis arcuum multiplorum, quo sinus angulorum multiplorum determinantur: immo quod hinc etiam pendeat multiplicatio arcus & consequenter anguli per datum numerum. Notandum igitur hic est, in scientiis problematum quoque æquipollentiam esse perpendendam non modo, ne entia præter necessitatem multiplicentur; verum etiam ut in solutione problematis investiganda seligamus illud, quod facilius solvi potest. Sane in nostro casu non adeo prona erat solutio, si loco sinus anguli multipli investigandam tibi proposuisses chordam arcus multipli. Neque enim meditatio te duxisset ad theorema geometricum, cui debetur solutionis problematis præsentis facilitas. Multum in philosophia usum habet, ut æquipollentia agnoscantur. Quamobrem qui intellectus perficiendi gratia Mathesi operam navant, ea probe notare tenentur, ad quæ hic attentionem excitamus.

§. 187. Problema de tangente arcus multipli ex data tangente simpli invenienda, quod ope-

operosissime solvitur ab aliis, hic nullo fere negotio solvitur, si nostram solutionem cum aliis solutionibus compares. Notanda igitur sunt artificia, quæ facilitatem solutionis pariunt. Primum artificium idque palmarirum in eo consistit, quod problema hoc consideretur tanquam dependens ab altero de inveniendo sinu anguli multipli ex dato sinu simpli. Unde intelligitur, quantæ sit utilitatis, ut dependentiæ problematum a se invicem habeatur ratio. Quoniam vero hoc pacto prodit formula, tangentem anguli multipli ex datis sinu & cosinu simpli, non ex tangente simpli determinans, quod quærebatur; ideo per legem substitutionis valores sinus & cosinus simpli eliminamus, ut eorum loco introducatur tangens anguli simpli. Duæ sunt quantitates exterminandæ, nimirum *a* & *b*. Singulari autem ratione hic accidit, ut cum una earundem *a* eliminetur etiam altera *b*: quod nisi succederet, substitutione nihil efficeres, propterea quod valorem ipsius *a* per tangentem *t* expressum ingreditur simul *b* & vicissim valorem *b* per *t* expressum simul *a*. Atque hæc forsan ratio fuit, cur problema nostrum independenter a problemate sinus & cosinus anguli multipli inveniendi solvendum esse visum fuerit. Unde patet veritatem investigaturum non nimis tribuere debere iis, quæ apparent, nec ubi impossibilitas fuerit demonstrata, non obstante apparentia tentandum esse, quod successu cariturum videtur. Tentaminibus enim in veritate investiganda multum esse tribuendum nemo diffitebitur, nisi qui eorum usum nondum fuit expertus. Ceterum hic quoque attentionem meretur artificium, quo utimur in abbreviando calculo eumque a perplexitate tædiosa liberando, dum pro coëfficientibus substituimus literas majores, pro quibus deinde calculo absoluto iterum reponuntur earundem valores. Etsi enim eodem artificio jam antea fuerimus usi, velutis in problematis 54 & 81 (§. 165. 213. *Analys.*); applicatio tamen in casu præsenti non statim cuilibet succurrit, nisi qui in anterioribus ad idem artificium animum attendit & distincta notione comprehensum memoriæ infixit,

quem-

quemadmodum ex natura animæ vi principiorum nostrorum psychologicorum facile demonstratur. Ea enim dedimus in Psychologia principia, per quæ ratio a priori dari potest in casu dato eorum, quæ in anima contingere observamus. Denique notandum est, quomodo formula pure enuncietur, ut prodeat solutio facillima intellectu, in locum formulæ surroganda. Continet ea legem progressionis in infinitum, qua nituntur formulæ particulares, qualem in anteriori problemate deduximus ex formulis particularibus in usum generalis eruendæ. Ceterum quæ hic annotavimus de problemate tangentis multipli ex tangente simpli arcus inveniendæ, eadem etiam tenenda sunt de problemate secantis anguli multipli ex data secante simpli invenienda (§. 328. *Analys.*).

§. 188. Quæ hactenus de Algebra tradidimus, non progrediuntur ultra terminos ab Arabibus assignatos, a quibus eandem accepimus, nisi quatenus ope Arithmeticæ literalis, seu calculi universalis, ad quem animum non adverterunt Arabes, multo amplior efficitur illius usus, ut per eam pateat accessus ad ea, quæ inaccessa videbantur. Ante inventam vero Arithmeticam literalem Algebram ulterius provehere studuerunt Itali, nec infelici prorsus successu. Cum enim Arabes in æquationibus quadraticis subsisterent, *Scipio Ferreus* ulterius progressus dedit regulas ex æquationibus cubicis extrahendi radicem, a *Cardano* publici juris factas, *Ludovicus* vero *Ferrariensis* etiam ex æquatione biquadratica radicem extrahere docuit. Neque Algebra in hunc usque diem ulterius promota, ex quo ope calculi literalis & calculi differentialis adeo amplificatus est ejusdem usus, ut nihil videatur a cognitione nostra adeo remotum, quin ad ipsum aperiat aditum. Etsi enim *de Tschirnhausen* invenisse sibi visus est methodum universalem quamcunque æquationem affectam reducendi ad puram, eamque Analysi suæ demonstratæ inserere nullus dubitavit *Carolus Reyneau*, tentanti tamen apparebit, eam non succedere nisi in æquationibus cubicis, ad quam etiam eandem tantummodo applicavit *de Tschirn-*

hausen & qui eandem approbavit *Reyneau*: eandem enim methodum ad æquationes altioris gradus applicaturus incides in æquationes, quæ superioris gradus sunt quam resolvenda; id quod monendum utique fuerat, ne Algebra complementum suum videatur nacta, a quo tamen longissimo intervallo adhuc distat. Non difficile fuerat DN. *de Tschirnhausen* hoc observare, modo applicationem in superioribus æquationibus tentasset, nec nimia forsan in vires suas confidentia, quæ ipsum non in unum errorem seduxit, difficultates oblatas pro superabilibus reputasset, quæ omnino insuperabiles sunt, saltem hactenus superari minime possunt. Quoniam itaque methodus universalis extrahendi radicem exactam ex æquatione quacunque data desiderabatur, nec adeo facile erat eandem reperire; ad extractionem radicis per approximationem confugerunt Analystæ & methodum ingeniosam jam dedit *Franciscus Vieta*. Alii alio modo idem tentarunt, quod prolixe recenseri nostri jam non est instituti: neque enim nobis propositum est historiam Algebræ scribere, sed ea tantummodo enarrare, quæ scitu necessaria sunt lectori Elementorum nostrorum Analyseos, ut majore luce fruatur, nec quasi in tenebris versetur ignorans, cur ea de extractione radicum ex æquationibus altioribus tradamus, quæ capite quinto continentur. Nos hic retinuimus methodum facillimam, quam Arithmetici Nostrates (die Rechenmeister) in Algebra numerosa *Cossicam mechanicam* appellarunt, & quam etiam adhibuit *Newtonus* & *Raphson* in peculiari Tractatu multis exemplis illustravit, sed nostro more captui tyronum magis accommodatam, qua radix æquationis reperitur in fractionibus decimalibus tam exacta, quantum desideratur. Et quoniam *Hallejus* regulas duas universales investigavit, alteram rationalem, alteram irrationalem, quæ merito commendatur; easdem eadem methodo investigare docuimus, qua in exemplis singularibus usi sumus, & quæ breviori ac trita magis via ad easdem ducit, quam qua *Hallejus* ad easdem pervenit. Methodus hæc in praxi satisfacit, nec ea ulteriorem Algebræ perfectio-

fectionem desiderat. Neque enim in praxi desiderantur numeri irrationales, quales prodeunt per inventas generales formulas radicum in æquationibus cubicis (§. 358. *Analyf.*); sed numeri rationales. Quando vero ex irrationali actu extrahenda radix, eam quærimus in fractionibus decimalibus, quales reperimus per methodum, de qua jam nobis sermo est. Applicatio autem formularum irrationalium plerumque plus pareret laboris quam methodus approximandi. Immo si in formula substitutis numeris pro literis extrahenda foret radix altioris gradus, non inutiliter recurreremus ad methodum approximandi, qua statim uti poteramus (§. 365. *Analyf.*). Non tamen ideo damnamus, si quis in extrahendis radicibus ex æquationibus superioribus ulterius progrediatur: facit enim ad perfectionem theoriæ seu incrementum scientiæ & ad artem inveniendi locupletandam. Enimvero cum de commoda methodo extrahendi radicem ex æquatione quacunque data sive exacte, sive per approximationem laborarent Mathematici, in naturam æquationum inquisiverunt & quomodo eædem præparentur, sicubi opus est, investigarunt. Unde enata sunt problemata ista, quæ intio hujus capitis explicantur.

§. 189. Problemata ista intellectu facilia sunt ei, qui in anterioribus attentionem suam sumque acumen desiderari minime passus, ut adeo opus non sit quædam de iis moneri. Calculum in singulis adeo perspicue repræsentavimus, ut in eodem versantes levi saltem attentione opus habeat ad problematum solutionem intelligendam. Usus autem eorum, quæ de natura æquationum docentur, elucescit ex problemate 165. (§. 351) de extrahenda radice rationali, si quam habet æquatio; id quod rarissime accidit. Duplicem proponimus methodum. Altera nititur principio substitutionis; altera vero principio de natura æquationum, quod scilicet æquationes altiores prodeant per multiplicationem simplicium. Atque hæc posterior ingeniosior est priori. Non amplius turbabit tyrones, quod alterum æquationis membrum hic ponatur *o*,

modo in anterioribus fuerint ſatis attenti, quoniam per reductionem aliquoties prodit talis æquationum forma. Quando primum tale quid occurrit, attoniti quaſi hærent tyrones, quod aliquid nihilo æquale eſſe debere exiſtiment non advertentes ad diverſitatem ſignorum, ut ipſis ſuccurreret axioma: ſi æqualia ab æqualia ſubtrahuntur, nihil relinquitur. Nimirum hic differentia nulla eſt: differentia autem nulla per fictionem quandam nihilo æqualis ponitur. Proprie enim loquendo ei, quod non eſt, nullum prædicatum poſitivum competere poteſt juxta canonem tritiſſimum ſcholaſticorum: Non entis nulla ſunt prædicata. Æqualitas eſt prædicatum, quod quantitatibus convenit: quod vero nullum eſt, cum non ſit in quantitatum numero, nec æquale dici poteſt alteri. Fingitur adeo nihil quantitatis eſſe aliquam quantitatis ſpeciem, ut de eo prædicatum, quod nonniſi quantitatibus convenire poteſt, enunciari poſſit fiducia axiomatis, quamlibet quantitatem æqualem eſſe ſibimetipſi. Nugari videretur, qui extra uſum in calculo talia proponeret, veluti ſi demonſtrare vellet, nihilum æquale eſſe nihilo. Hac tamen demonſtratione ſubſiſtit fictio adeo utilis in calculo algebraico. Simile quid obtinet, ſi alterum æquationis membrum fuerit quantitas privativa, ubi tyrones perſpicaciores ad diverſitatem ſignorum in altero æquationis membro non attenti, vel ſaltem ignari, quantitates privativas excedere poſitivas, hærent exiſtimantes aliquid poni minus nihilo, ſeu quod aliquid eſt æquale eſſe debere ei, quod nihilo minus eſt, cum tamen revera minus nihilo ponatur ei, quod minus nihilo eſt æquale, quatenus in calculo fingimus quantitatis defectum per eam, quæ deficit, æſtimabilem eſſe veram quantitatem. Fictiones iſtiusmodi plurimum habent utilitatis in calculo, nec iisdem carere poſſumus. Nodum in ſcirpo quærit, qui contra eas difficultates faceſſit. Ad fictiones recurrendum eſt etiam extra Matheſin, niſi neſcire velis, quæ ſcitu maxime neceſſaria ſunt. Ita in Jure naturali Civitatem fingimus inſtar perſonæ liberæ, quæ ſui juris eſt & cui per naturam

ſuam

suam certa competunt jura, immo individuum unum physicum in plura moralia dividimus & individuum morale physico contradistinguimus tanquam personam diversam ab eo, immo unum eundemque hominem distinguimus a se ipso, quasi duæ sint personæ, quarum una alteri obligatur, & uni in alteram competunt certa jura: qua fictione utitur ipse Apostolus, dum hominem novum veteri contradistinguit. Nec ignotæ sunt istiusmodi fictiones in jure Romano. Exemplo sit postliminium, ut taceamus alia, ubi fictiones non adeo manifestæ sunt, alio loco a nobis commemorandæ. Quodsi dicas in explicanda æquationum natura poni $x = -b$, adeoque quantitatem positivam æqualem privativæ: id quod utique contradictorium sit, cum quantitates privativæ positivis heterogeneæ sint, adeoque ratio æqualitatis, qualem supponit æquatio, inter eas intercedere nequeat (§. 24. *Analys.*). Enimvero cum in æquationibus compositis radix non minus quantitas negativa, quam positiva esse possit, ea autem designetur litera x, quamdiu valor ejus ignoratur signum eidem adjiciendum dubium est: in casu autem dubio signo + afficitur: id quod etiam in sequentibus fiet, ubi utile est non attendi signorum diversitatem. Quando itaque in formatione æquationum sumitur $x = -b$, non supponitur, quantitatem positivam privativæ æqualem esse, sed tantummodo sumitur, eadem litera x indigitari posse non minus quantitatem positivam, quam negativam, cum signa primitiva sint prorsus arbitraria, & quantitatem primitivam subinde utiliter considerari instar positivæ, quando fictionem istiusmodi fert natura rei, nec ea in errorem seducit.

§. 190. In resolutione problematis 168 (§. 358. *Analys.*), quo ex æquatione cubica extrahi jubetur radix, singulare occurrit artificium, quo quantitas incognita x dividitur in duas partes indeterminatas y & z & harum ope æquatio data transmutatur in aliam, quæ duas incognitas indeterminatas continet. Etenim hoc ipso obtinetur, ut lege comparationis terminorum utraque determinetur,

& sic inveniatur quæsitum per partes. Nimirum quia y & z indeterminatæ sumuntur, ideo licet ponere $3y^2z + 3z^2y = py + pz$ & $y^3 + z^3 = q$, non alia de causa, quam quia commodum accidit, ut per primam æquationem eruatur valor unius indeterminatæ z, qui in æquatione altera substitutus dat valorem ipsius y atque z determinatum. Æquatio $y^6 - qy^3 = -\frac{1}{27}p^3$ duas habet radices, quarum altera quod sit $= y$, altera vero $= z$, ex eo liquet, quia ex æquatione prima $3y^2z + 3z^2y = py + pz$, reperitur $y = p : 3z$ perinde ac $z = p : 3y$ & valor ipsius y in altera $y^3 + z^3 = q$ substitutus dat æquationem $z^6 - qz^3 = -\frac{1}{27}p^3$ eandem cum anteriore. Manifestum enim est æquationem, quæ ducit ad valorem determinatum quantitatis cognitæ, duas habere debere radices, quarum una denotat y, altera vero z, etsi perinde sit quam ipsi y, quam vero ipsi z tribuere velis, cum quantitates y & z pro arbitrio assumantur, ut pro majore & minore habere possis, quam volueris. Hoc artificio jam usi sumus in investiganda regula tollendi secundum terminum ex æquatione data (§. 343 *Analys.*), ut nempe coëfficiens secundi termini propter indeterminatam t poni possit nihilo æqualis. Diversa tamen in præsenti casu ejus applicatio est.

§. 191. Limites æquationum eo modo investigare docuimus, (§. 356. *Analys.*), qui in Commentariis ad Geometriam *Cartesii* proponitur. Habet enim hoc singulare ea methodus, quod Algebram, quæ tota nititur ratione æqualitatis, extendat ad rationem inæqualitatis, ubi inæqualia mediante signo $>$ vel $<$ eodem modo inter se comparantur, quo in Algebra æqualia mediante signo $=$ & reductio per similia axiomata instituitur, quo eadem in Algebra fieri consuevit. Hanc ipsam vero methodum, etsi hactenus attentione sua indignam eam judicaverint Analystæ, etiam alibi usui esse posse, exemplo aliquo facili monstrare lubet. Ponamus quæri, qualis sit ratio, quam habent duæ quantitates inæquales ad eandem tertiam. Resolutio problematis ita sese habet:

sit Major $= x$ Data tertia $= a$
minor $= y$

erit

erit

$$x > y$$

$$ax > ay$$

Fiat $x : a = t : v$

erit $x = \frac{at}{v}$

adeoque $\frac{a^2 t}{v} > ay$

$$\frac{at}{v} > y$$

$$\frac{t}{v} > \frac{y}{a}$$

Ergo ob $\frac{t}{v} = \frac{x}{a}$

$$\frac{x}{a} > \frac{y}{a}$$

hoc est $x : a > y : a$

Habemus adeo theorema: *Majus ad idem majorem rationem habet, quam minus*, istiusmodi analysi investigatum, qua problemata algebraice solvuntur. Non alio fine proponimus hoc problema, quam ut ideam quandam hujus methodi animo tyronum ingereremus. Consultum igitur erat, ut exemplum eligeremus facile & ex anterioribus jam notum. Videbimus deinceps applicatione methodorum, quæ nobis innotescunt, ad exempla notissima & maxime vulgaria haud raro detegi maxime ardua: sit ita, quod methodorum inventores, ne ardua nullo fere negotio detexisse videantur, eas applicent ad exempla, quæ sublime quid spirant & intellectu difficilia deprehenduntur.

§. 192. Extractio radicis ex serie infinita (§. 366. *Analys.*) etiam artificium quoddam singulare habet, quod consistit in diversa applicatione assumtionis quantitatum indeterminatarum lege comparationis determinandarum, quo supra jam usi sumus in tollendo secundo termino ex æquatione data (§. 343. *Analys.*) & in extrahenda radice ex æquatione cubica (§. 358. *Analys.*). Series enim assumtitia, qua exprimitur valor ipsius x, qui quæritur, coëfficientes habet indeterminatos, lege comparationis determinandos. Ut vero determinari possint, perinde ac superius lege substitutionis æquatio proposita, cujus coëfficientes determinati sunt, trans-

transmutatur in aliam, quam coëfficientes indeterminati cum determinatis ſimul ingrediuntur, quemadmodum fecimus in extractione radicis ex æquatione cubica (§. 358. *Analyſ.*), etſi alio principio hic nitatur coëfficientium indeterminatorum determinatio, cujus ratio ex ipſo contextu liquet, & quod affine eſt ei, quo eodem fine uſi ſumus in tollendo ſecundo termino ex æquatione data (§. 343. *Analyſ.*), quamvis ob aliam rationem. Patet hinc, quam utile ſit ut artificia analytica, quibus in reſolutione problematum utimur, inter ſe conferantur, quo pateat eorum, quæ eadem ſunt, diverſa applicatio. Quodſi enim in rationem applicationis inquiſiveris, id non modo efficiet, ut eadem in caſu eodem recurrente facilius memoriam ſubeat; verum etiam hoc ipſo conſequeris, ut eandem prout caſus exigit ipſemet variare poſſis. Iſtiusmodi autem disquiſitiones apprime neceſſariæ ſunt ei, qui in arte inveniendi generali proficere vult ſtudio Algebræ & intellectui conciliare geſtit eam habitudinem, qua ad artificia heuriſtica diverſimode applicanda opus habet. Problema, de quo jam loquimur, maximæ utilitatis eſt: continet enim methodum, quæ *Regreſſus ſerierum* nomine venit & cujus maxima eſt utilitas in Geometria ſublimiori, quemadmodum ſuo loco oſtendemus. Equidem problema hoc tanta perſpicuitate expoſuimus, ut tyro in anterioribus cum laude verſatus idem absque ulla difficultate intelligat, niſi calculi moleſtias fugiat; quodſi tamen quis ab iisdem abhorreat, idem tamdiu ſeponat, donec regreſſu ſerierum ad ſolvenda problemata opus habuerimus.

§. 193. Extractiones radicum ex æquationibus, de quibus diximus in capite præſente, uſum tantummodo habent in ſolutionibus problematum arithmeticis. Quamobrem docendum quoque erat, quomodo æquationes altiores geometrice conſtruantur. Per rectas & circulum eædem conſtrui nequeunt: ſed confugiendum hic eſt ad lineas curvas. Quamobrem cum de lineis curvis præter circulum nihil doceatur in Geometria elementari; noſtrum erat ante docere,

cere, quomodo Algebra ad Geometriam sublimiorem, quæ de curvis agit, applicetur, ut ejus ope curvarum descriptiones & proprietates ac symptomata, hoc est, prædicata absoluta & conditionata inveniantur. Applicationem hanc debemus *Cartesio*, qui eam docuit in Geometria, sed non ad captum tyronum. Facile tamen reperiri poterat, si quis ad vulgaria animum attendere voluisset. Tota enim in hoc consistit, ut curva definiatur per æquationem & ex ea adhibitis artificiis in Algebra usitatis eliciantur curvarum constructiones, proprietates & symptomata. Ecce igitur tibi facillimam ad hanc methodum, quæ inexhaustæ utilitatis est in Geometria sublimiori, viam. Constat ex elementis Geometriæ (§. 327. *Geometr.*), semiordinatam PM esse mediam proportionalem, inter abscissam AP & complementum diametri PB, si utamur terminis in doctrina de Curvis receptis & initio capitis sexti explicatis. Quare si sit diameter $AB = a$, abscissa $AP = x$, semiordinata $PM = y$, erit complementum diametri $PB = a - x$, consequenter

Tab. II. Fig. 17.

(*Wolfii Mathesis Tom. V.*)

$$AP : PM = PM : PB$$
$$x : y = y : a - x$$

adeoque $y^2 = ax - x^2$

Habemus adeo æquationem, quæ circulum definit. Quodsi jam ponamus, nos nescire, qualis sit hæc curva, ea, quæ de eadem nobis innotescere possunt, hoc modo eruimus.

Sit $y = o$

erit $ax - x^2 = o$

$ax = x^2$

$a = x$

Patet itaque 1. curvam secare rectam AB in B,

Sit $x = o$

erit $y^2 = o$

$y = o$

Unde liquet 2. curvam secare rectam AB in A.

Sit $x = \frac{1}{2}a$

erit $y^2 = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^2$

$= \frac{1}{4}a^2$

$y = \frac{1}{2}a$

Videmus itaque, 3. si ex medio rectæ AB erigatur perpendicularis ED, curvam transire per punctum D.

Quoniam eadem curva transit per A & B (*ut num. 1. & 2.*);

evidens

evidens eſt, 4. eam concavitatem rectæ AB obvertere. Et quoniam patet, ſingula ſeſe eodem modo habere debere, ſi ſemiordinatæ ex altera parte ſumantur; porro liquet, 5. Curvam eſſe in ſe redeuntem. Quæratur jam magnitudo rectæ MC ex puncto C in medio rectæ AB aſſumto ad extremitatem ſemiordinatæ PM ſeu punctum in Curva M ductæ.

Sit $AC = \frac{1}{2}a \qquad MC = z$

$AP = x$

erit $PC = \frac{1}{2}a - x$

adeoque $PC^2 = \frac{1}{4}a^2 - ax + x^2$

$PM^2 = ax - x^2$ per naturam Curvæ.

Ergo $z^2 = \frac{1}{4}a^2$

$z = \frac{1}{2}a$

6. Recta igitur ex puncto C in quodlibet peripheriæ punctum M ducta æqualis eſt rectæ AC, ſeu dimidiæ rectæ AB, conſequenter rectæ omnes ex eodem puncto C in peripheriam ductæ æquales ſunt (§. 87. *Arithm.*): quæ eſt proprietas circuli, per quam definiri ſolet in Geometria elementari.

Hinc vero porro 8. liquet, Curvam hanc deſcribi, ſi recta CA circa punctum fixum C in gyrum agatur: quæ eſt definitio circuli realis.

Ponamus $y = \frac{1}{2}a$

erit $\frac{1}{4}a^2 = ax - x^2$

$x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = 0$

$x - \frac{1}{2}a = 0$

$\frac{1}{2}a - x$

$x = \frac{1}{2}a$

Quoniam ſuperius (n. 3) reperimus $y = \frac{1}{2}a$, ſi fiat $x = \frac{1}{2}a$; ideo patet, 9. In nullo alio puncto, quam in C ſemiordinatam rectæ dimidiæ AB æqualem eſſe poſſe. Si ſit $PM = y$, $PC = v$, $CM = \frac{1}{2}a$ (n. 6); erit per theorema Pythagoricum:

$\frac{1}{4}a^2 = y^2 + v^2$

adeoque $\frac{1}{4}a^2 > y^2$

$\frac{1}{2}a > y$

$y < \frac{1}{2}a$

Quamobrem 10. ubivis extra centrum ſemiordinata minor dimidia recta AB, conſequenter cum minor ſit ſemiordinata in centro erecta CD (n. 3), ſemiordinatæ autem ſint chordarum dimidiæ; 11. diameter chordarum maxima eſt.

Sit diſtantia ſemiordinatæ a centro $PC = v$, $PM = y$, erit

$\frac{1}{4}a^2 = y^2 + v^2$ (n. 6).

Et

Et si alia PC $= t$, PM alia $= z$,

erit $\frac{1}{4}a = z^2 + t^2$

Quare $z^2 + t^2 = y^2 + v^2$

sit $t > v$

erit $z^2 < y^2$

$z < y$

12. Semiordinata itaq; z tanto minor alia quacunque semiordinata y, quanto magis a centro distat, consequenter chordæ tanto minores, quanto a centro remotiores.

Tab. II. Fig. 18. Sit AB $= a$, AP $= x$, erit PB $= a - x$, adeoque

$AP^2 = x^2$

$PM^2 = ax - x^2$ ex natura Curvæ

$AM^2 = ax$

Similiter $PB^2 = a^2 - 2ax + x^2$

$PM^2 = ax - x^2$

$MB^2 = a^2 - ax$

$AM^2 = ax$

$MB^2 + AM^2 = a^2 = AB^2$

Quoniam $AB^2 = AM^2 + PB^2$, triangulum AMB rectangulum est, consequenter 13. angulus AMB in semicirculo rectus.

Et quia $AM^2 = ax$, $BM^2 = a^2 - ax$;

erit $a : AM = AM : x$

$a : BM = BM : a - x$

hoc est AB : AM = AM : AP

AB : BM = BM : PB

Est igitur 14. Chorda media proportionalis inter diametrum AB & segmentum adjacens.

Quod si quæratur recta TM ex puncto quocunque T intra circulum assumto in peripheriam ducta; ducatur per centrum C & punctum T recta AB, quæ erit diameter circuli & ex puncto peripheriæ M demittatur perpendicularis MP, quæ erit semiordinata. Sit jam Tab. II. Fig. 19.

AC $=$ CB $= a$ AP $= x$

BT $= b$ erit PC $= a - x$

erit CT $= a - b$ PT $= 2a - b - x$

Porro

$PM^2 = 2ax - x^2$ ex natura circuli

$PT^2 = (2a - b)^2 - 4ax + 2bx + x^2$

$TM^2 = (2a - b)^2 - 2ax + 2bx$

$= (2a - b)^2 - 2(a - b)x$

$= TA^2 - 2 CT . AP$

Est adeo 15. Quadratum rectæ TM æquale excessui quadrati rectæ TA supra rectangulum ex duplo distantiæ puncti T a centro C in abscissam AP puncto M respondentem. Hoc theorema in Elementis non extat;

tat: ex eo tamen consequuntur, quæ in iis demonstrantur. Nimirum quia 2 CT constans est, decrescente abscissa AP descrescit quoque rectangulum ex AP in 2 CT & cum quadratum rectæ TA non minus constans sit. quo minus fuerit rectangulum ex 2 CT in AP, eo major evadet excessus quadrati rectæ TA supra hoc rectangulum, consequenter eo majus erit quadratum rectæ TM, quippe eidem æquale, adeoque etiam ipsa recta TM. Et quando TM incidit in diametrum, seu punctum M in A, quadratum ipsius TM æquale evadit quadrato ipsius TA, consequenter TA major est qualibet TM, adeoque maxima rectarum, quæ ex puncto T in peripheriam duci possunt. Incidimus adeo 16. in theorema 63 (§. 303. *Geom.*).

Tab. II. Fig. 18. Ante invenimus (n. 14) $AM^2 = AB. AP$, hoc est, quod quadratum chordæ sit æquale rectangulo ex diametro in abscissam. Quamobrem cum crescente abscissa AP crescat arcus AM, crescat etiam rectangulum ex diametro AB in abscissam AP; ideo patet 17. quadratum chordæ majoris esse majus quadrato chordæ minoris, consequenter chordam majorem subtendere arcum majorem, quam minor, seu chordam arcus majoris majorem esse, chordam minoris minorem.

Alia ex æquatione ad circulum deducuntur in ipsa Analysi præsertim infinitorum, qua in Geometria sublimiori carere minime possumus. Ex hactenus dictis abunde patet, quomodo applicatione Algebræ ad ea, quæ ex *Euclide* notissima sunt, methodus definiendi curvas per æquationes & ex iis deducendi earum geneses ac constructiones, proprietates aliaque symptomata innotescere potuerit. De sectionibus conicis *Appollonius* similiter demonstravit theoremata, quorum ope per æquationes definiuntur, quemadmodum in hoc capite fecimus. Quamobrem apparuit, eandem methodum ad conicas quoque sectiones applicari posse. Atque sic enata est methodus tractandi curvas per æquationes, seu Algebram ad Geometriam sublimiorem applicandi. Hæc non eo fine a nobis adducuntur, ut inventorum laudi detrahamus; sed ut discamus, vulgarium

rium meditationem ducere ad maxime ardua, & ea neglecta inventores sibimetipsis obesse, si quando per ambages quærunt, quæ obvia sunt recta via incedentibus, utque tyrones ideam hujus methodi animo concipiant, quæ in ejus applicatione ad altiora facem præfert. Qui recta via in inveniendo progreditur, ex iis, quæ cognita atque trita sunt, colligit quæ nondum patent, parum sollicitus, quamnam utilitatem sint habitura, quæ deteguntur. Sed de his dicemus, ubi Artem inveniendi ex instituto exposituri sumus.

§. 194. Diximus superius (§. 169.), nondum invento calculo universali Algebram numerosam jam applicari potuisse ad Geometriam, ut per eam detegerentur theoremata & problematum constructiones. Immo ipsa etiam applicatio ad Geometriam sublimiorem fieri poterat non sine successu. Dictis igitur fidem facere nostrum est uno alteroque exemplo. Ponamus ex. gr. quæri relationem recta-
Tab. II. rum AT & TE, ex eodem puncto T extra circulum dato ductarum, quarum altera AT circu- Fig. 20.
lum tangit in A, altera TE eundem secat.

Sit diameter $BE = 1$, $TB = x$
erit $AC = \frac{1}{2}$ $TC = \frac{1}{2} + x$
sit porro $AT = 2$ $TE = 1 + x$
Quoniam AT perpendicularis ad AC (§. 308. *Geom.*), erit

$TC^2 = AC^2 + TA^2$ (§. 417. *Geom.*)

adeoq; $(\frac{1}{2})^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x + x^2 = (\frac{1}{2})^2 + 2^2$

$2 \cdot \frac{1}{2}x + x^2 = 2^2$

sed $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ per cond. probl.

ergo $1x + x^2 = 2^2$
hoc est $(1 + x)x =$
sive $TE \cdot TB = AT^2$

Quamobrem $TE : AT = AT : TB$

Habemus itaque duo theoremata: 1. Quadratum tangentis in hypothesi problematis est æquale rectangulo ex secante in ejus portionem extra circulum. 2. In eadem hypothesi tangens est media proportionalis inter secantem & ejus portionem extra circulum.

In Algebra speciosa diametrum appellamus a, tangentem b. Cum hæc signa sint primitiva, perinde est sive diametrum a,

five 1. & num tangentem b, an vero 2 dicas, modo in calculo universalitatem conserves, ut in locum 2 quemcunque numerum alium surrogare possis sive rationalem, sive irrationalem, sive integrum, sive fractum, qui in dato casu exprimit rationem ad diametrum tanquam unitatem.

Tab. I. Fig. 3. Ana-lys. Ponamus porro problema 13. (§. 255. *Analys.*) solvendum esse per Algebram numerosam, sed universaliter, quemadmodum solvitur per speciosam. Solutio hæc erit:

sit $AB+BC+CA=6$ $AC=x$

Area $\Delta=2^2$ erit $BC+BA=6-x$

$AC^2=x^2$

Cum sit $AC^2=AB^2+BC^2$ (§. 417 *Geom.*) & $AB^2+BC^2=(AB+BC)^2-2\,AB.\,BC$ (§. 216 *Arithm.*); erit $AC^2=(AB+BC)^2-2AB.\,BC$ (§. 91 *Arithm.*). Est vero $(AB^2+BC)^2=6^2-2.6x+x^2$ & $AB.\,BC=4.\,2^2$ (§. 392 *Geom.*). Quamobrem

$$x^2=6^2-2.6x+x^2-4.2^2$$

$$o=6^2-2\,6x-4.2^2$$

$$2.6x=6^2-4.2^2$$

$$x=\frac{6}{2}-\frac{2.\,2^2}{6}$$

Patet itaque hypothenusam trianguli rectanguli x esse æqualem excessui semiperimetri $\frac{6}{2}$ supra tertiam proportionalem ad semiperimetrum $\frac{6}{2}$ & latus quadrati 2 areæ trianguli æqualis. Unde liquet, problema geometrice construi, si ad semiperimetrum & latus quadrati areæ trianguli æqualis quæratur tertia proportionalis & hæc ex semiperimetro auferatur.

Æquatio pro circulo erat $y^2=ax-x^2$, ubi a diametrum denotat, sive igitur diametrum dicas a, sive 1 aut 2, modo observes ea, quæ ad universalitatem calculi conservandam præcepimus, ex æquatione $y^2=1x-x^2$, vel $y^2=2x-x^2$ eadem erues, quæ paulo ante ex altera eruimus (§. 194).

Immo nondum invento calculo litterali poterant quoque quantitates datæ exprimi literis, quibus in Geometria lineas indigitamus, veluti in exemplo primo

Diameter $=BE$ $TB=x$ Tab. II. Fig. 20.

radius $=AC$ $TC=AC+x$

tangens $=AT$ $TE=BE+x$

Unde

Unde resultat æquatio

$$AC^2 + 2AC.x + x^2 = AC^2 + AT^2$$

$$2AC.x + x^2 = AT^2$$

$$(BE + x)x = AT^2$$

h. e $TE.\ TB = AT^2$

vel in problemate altero

Tab. I. Fig. 3. Analys. Peripheria $\triangle = AB + BC + CA$

$AC = x$

Area $\triangle = DE^2$ $\quad BC + BA = AB + BC + CA - x$

$AC^2 = x^2$

Unde reperitur ut ante æquatio:

$$x^2 = (AB + BC + CA)^2 - 2(AB + BC + CA)x + x^2 - 4DE^2$$

$$o = (AB + BC + CA)^2 - 2(AB + BC + CA)x - 4DE^2$$

$$2(AB + BC + CA)x = (AB + BC + CA)^2 - 4DE^2$$

$$x = \tfrac{1}{2}(AB + BC + CA) - 2DE^2 - 2DE^2 : (AB + BC + CA)$$

Tab. II. Fig. 17. Similiter si diameter circuli dicatur AB, semiordinata PM, abscissa AP; æquatio ad circulum est $PM^2 = AB.\ AP - AP^2$: unde eadem deducuntur, quæ æquatione $y^2 = ax - x^2$ deduximus.

Talia monemus, ut appareat veteribus plura in potestate fuisse, quam existimavere, propterea quod ad studium mathematicum non eam attentionem attulerunt, quam in superioribus commendavimus, ut methodos intimius perspicere ea discernentes, quæ sunt legum methodi, ab iis, quæ characteristicæ tribuenda & ut characteristicæ ubi vis commodum faciamus usum: neque enim iidem characteres æque satisfaciunt in omni casu, sed alii aliis non sine utilitate haud raro substituuntur. Neque vero est, quod excipias, nos in calculo universali numeroso & substitutis linearum appellationibus communibus adhibere artificia ex characteristica, qua in Algebra speciosa utimur, petita, veluti dum potentias linearum designamus per exponentes numeris vel literis majoribus, quibus lineæ denotantur, adscriptis instar apicum. Etenim hanc denotationem jam indicavit *Keplerus* in Harmonica, calculo literali adhuc ignorato, & per ea eadem patere poterat, quæ de natura numerorum cossicorum, quos vocat, tradidit *Stifelius* in Arithmetica integra multo ante, quam *Vieta* de Arithmetica literali cogitaret & *Hariottus* atque *Cartesius*

tesius eandem ulterius perficerent. Et quamvis recentior characteristica commodior sit, ipsa tamen methodus per eam non variatur, quæ etiam absque omni characteristica subsistit: sit ita, quod deficiente characteristica commoda subinde tantæ suboriantur molestiæ, quas devorare non est cujusvis, & ea requiratur attentio, ut ab errore immunem te præstes, quem non quivis afferre valet. Hæc ignorare non potest, qui ad characteristicam, qua hodie in Arithmetica utimur, eam attentionem attulerit, quam in superioribus commendavimus, & quæ acumen istud, quo ea, quæ sunt legum methodi, ab iis, quæ characteristicæ debentur, separantur, confert.

§. 195. Circulus per æquationem algebraicam definiri potest, quia punctorum omnium

Tab. II. Fig. 18. M ad diametrum AB constans quædam relatio est, quæ exprimitur per relationem semiordinatæ ad abscissam, demittendo scilicet ex puncto quolibet M perpendiculam PM in diametrum AB, ut abscindatur AP. Unde facile intelligitur idem succedere debere in aliis curvis ubi similis relatio obtinet. Quamobrem cum constet, *Apollonium* de parabola, hyperbola & ellipsi seu sectionibus conicis tale quid demonstrasse, statim prævidere licet, methodum, qua in circulo usi sumus, in iisdem quoque adhiberi posse. Enimvero possunt puncta curvæ referri ad quamcunque aliam rectam positione datam: id quod cum usui sit in sequentibus, exemplo circuli hoc ipsum declarare lubet. Ducatur recta AL, quæ circulum in C tangat, erit ea ad radium GC perpendicularis (§. 308. *Geom.*). Ducatur quoque Tab. II.
DA, quæ circulum tangit in D, Fig. 19.
adeoque ad radium DG perpendicularis (§. *cit.*), cum etiam CG sit perpendicularis ad GD (§. 143. 78. *Geom.*); erit AL diametro DE paralella (§. 258. *Geom.*) & AD ad eandem perpendicularis (§. 230. *Geom.*), adeoque semiordinata (§. 370. *Analys.*). Ducatur semiordinata alia quæcunque PM continuanda, donec diametro DE in Q occurrat, erit MQ ad DE perpendicularis. Sit $AC = DG = a$, $AP = x$; $PM = y$, erit $QM = a - y$, adeoque per naturam circuli, cum sit

QM

$QM^2 = DQ.QE$

$a^2 - 2ay + y^2 = 2ax - x^2$

Quae aequatio circulum definit respectu tangentis AL.

Fiat jam $x = o$, erit

$$a^2 - 2ay + y^2 = o$$
$$a - y = o$$
$$a = y$$

hoc est, in origine abscissae A semiordinata AD est radio circuli aequalis.

Sit $x = a$, erit

$$a^2 - 2ay + y^2 = 2a^2 - a^2 = a^2$$
$$y^2 - 2ay = o$$
$$y - 2a = o$$
$$y = 2a$$

hoc est, semiordinata CN diametro circuli aequalis, seu perpendicularis CN ad AC curvae in N occurrit.

Sit $x = 2a$, erit

$$a^2 - 2ay + y^2 = 4a^2 - 4a^2 = o$$
$$a - y = o$$
$$a = y$$

hoc est semiordinata LE radio circuli aequalis.

Quodsi quaeratur recta GM, cum sit per theorema Pythagoricum

$$GM^2 = MQ^2 + QG^2$$

erit $GM^2 = 2a^2 - 2ay + y^2 - 2ax + x^2$

est vero ex natura curvae

$$a^2 - 2ay + y^2 = 2ax - x^2.$$

Ergo $GM^2 = a^2$

$$GM = a$$

Quare si ponamus, nos ignorare, ad quam curvam sit aequatio; patet hinc eam esse ad circulum.

Nimirum quando ex aequatione data eruuntur, quae de curva cognosci possunt, tum semper supponitur, non constare, ad quamnam curvam sit aequatio. Quodsi semicirculus DNE ad rectam AL referretur, semiordinata PO foret y, adeoque $QO = y - a$. Quamobrem cum eadem prodiret, quae ante aequatio; alterum ejus membrum $a^2 - 2ay + y^2$ duas habet radices $a - y$ & $y - a$: id quod indicio est, semiordinatam recta AC & minorem, & majorem esse posse, consequenter ex ipsa aequatione intelligitur, Curvam a semiordinata secari in duobus punctis. Quoniam itaque in C eandem nonnisi in uno puncto N secat, id indicio est,

quod in C eandem tangat. Similiter quia in A & L semiordinata nonnisi unum valorem habet; hinc conficitur, quod semiordinatæ AD & LE curvam similiter tangere debeant. Unde liquet curvam esse in se redeuntem, & ejus puncta referri ad lineam, quæ tota extra curvam cadit, ab ea tamen non distat. Distantia enim a tota curva æstimatur ex perpendiculari minima, quæ hic nulla est.

Suadendum omnino est, ut tyrones notent, quomodo curvæ agnoscantur, & a se invicem distinguantur, nimirum relatione punctorum ad rectam quandam positione datam, & circulum referant ad varias rectæ positiones, ut totius methodi vim ac potestatem rectius ac intimius perspiciant. Hoc enim pacto non modo nihil difficultatis habebit, quod in capite præsenti occurrit; verum etiam doctrina de Locis geometricis, quæ omnem rectæ illius positionem possibilem supponit, non perturbabit tyronem. Immo in genere notandum est, si ad maxime obvia & notissima applicentur methodi novæ, in quas incidimus; haud raro talia offerri, circa quæ hærent etiam exercitatiores, ubi in applicatione methodi ad nondum cognita occurrunt. Exemplum suppeditat æquatio, quam modo dedimus pro circulo $a^2 - 2ay + y^2 = 2ax - x^2$. Etenim si sumis, eam explicare relationem quadrantis DMC ad rectam AC, & ponis AP = AC, seu $x = a$, per ea, quæ vidimus in æquatione præcedente (§. 193), prodire debere videtur $y = o$. Unde miraris, ubi prodit $y = 2a$. Verum enimvero ubi consideras, æquationem $a^2 - 2ay + y^2$ habere duas radices, alteram nimirum $a - y$, alteram $y - a$, & priori respondere QM, posteriori autem QO; hinc disces, per æquationem $a^2 - 2ay + y^2 = 2ax - x^2$ tam semicirculi superioris DNE, quam inferioris DCE ad rectam AL relationem exprimi, consequenter in puncto C, ubi valor unus ipsius PM sive $y = o$, etiam prodire debere valorem alterum ipsius $y = 2a$, recta nimirum PO in CN degenerante. Quodsi tale quid occurreret in tractatione æquationis, cui, quænam curva respondeat, adhuc ignoratur; unde hoc fiat, non adeo facile animadverteres, & multum omnino olei ac operæ perderes, antequam ex perturbatione eluctari

ctari valeres. Similiter ubi ponis $x = o$ & $x = 2a$, prodit $a^2 - 2ay + y^2 = o$, adeoque $y - a = o$ & $a - y = o$, quæ utraque æquatio dat eundem valorem nempe $y = a$. Unde vides in contactu D & E duas radices æquales habere æquationem, quemadmodum deinceps supponitur in methodo tangentium, & sine quo principio *Cartesius* ad methodum suam tangentium non pervenisset. Non addimus plura, cum hactenus dicta abunde sufficiant ad persuadendum utilitatem meditationis eorum, quæ nobis notissima sunt, ut eorundem ope detegantur alia, quorum alias cogitatio animum nunquam subiissent.

§. 196. Quodsi hanc methodum, quam adeo fœcundam experiris in circulo, etiam ad curvas alias, quas tractarunt veteres, adplicare volueris; non omnes promiscue per æquationes definiri posse animadvertes, ubi eodem modo puncta eorum refers ad rectam quandam positione datam. Non succedet in spiralibus *Archimedis*, nec in Quadratrice *Dinostratis*, quemadmodum sub finem capitis videbimus. Quoniam itaque ex iis, quæ de circulo diximus, & per sectiones conicas confirmantur, didiceris, quod æquatio curvam definiens supponat constantem relationem puncti cujuslibet ad eandem rectam positione datam, hinc utique patet, non dari posse æquationem ad curvam, cujus puncta ad rectam positione datam constantem relationem minime habent. Atque adeo non miraberis, nec hærebit aqua, ubi curva offertur, quæ per istiusmodi æquationem explicari nequit. Et patet ratio, cur *Cartesius* curvas distinxerit in algebraicas & non algebraicas, quarum illas vocat Geometricas, has vero mechanicas, propterea quod existimavit, illas solas in Geometriam recipi posse, has vero ex eadem excludi debere, propterea quod ignoravit æquationes differentiales, de quibus dicemus in Analysi infinitorum, & quarum ope non minus algebraice tractantur curvæ, quæ a *Cartesio* mechanicæ appellantur, quam quas geometricas appellat. Et sic patet ratio divisionis Curvarum in algebraicas & transcendentes, quam tradimus (§. 377. 380. *Analys.*).

§. 197. Notandum vero est artificium, quo æquatio curvæ particularis reducitur ad generalem, quæ infinitas curvarum species sub se comprehendit: id quod fit exponentium indeterminatorum surrogatione in locum determinatorum, quo artificio jam usi sumus in anterioribus, veluti in theoremate generali de binomio ad dignitatem quamcunque evehendo (§. 95. *Analys.*). Probe quoque notandum est, quod in istiusmodi æquationibus observanda sit lex homogeneorum, quæ præcipit, ut termini singuli æquationum habeant dimensiones numero æquales, hoc est, ut unus valor prodeat ductis tot rectis in se invicem, quot in se invicem sunt ducendæ, ut prodeat quilibet alter. Etsi enim in Geometria non detur magnitudo, quæ ultra solidum, quod trium dimensionum est, & tribus rectis in se invicem ductis resultat, assurgit; in Algebra tamen fictione non inutili admittuntur hypersolida, quæ ductu quotlibet rectarum in se invicem in infinitum resultant. Nititur hæc fictio principio, quod inter duas lineas infinitæ cadere possint lineæ mediæ continue proportionales, quemadmodum ex genesi potentiarum in infinitum progredientium liquet, veluti si ponas numeros in progressione geometrica 1. 2. 4. 8. 16. 32. &c. in infinitum, hoc est $1.\ 2^1\ 2^2.\ 2^4.\ 2^5$ &c. in infinitum, ubi inter 1 & 2^2 una, inter 1 & 2^3 duæ, inter 1 & 2^4 tres, inter 1 & 2^5 quatuor cadunt numeri medii continue proportionales, & sic porro in infinitum. Etsi enim hic numeri omnes, quorum ductu in se invicem resultant termini ulteriores, sint inter se æquales; constat tamen, vel ex Geometria elementari, in qua v. gr. rectangulum reducitur ad quadratum eidem æquale, & parallelepipedum ad cubum sibi æqualem, ea, quæ ductu linearum inæqualium in se oriuntur, reduci posse ad talia, quæ oriuntur ductu totidem æqualium in se invicem. Sufficiant hæc in gratiam tyronum dicta, ut ipsis aliqua lux affundatur in considerandis hypersolidis, quæ Algebra admittit. Inprimis autem attentionem meretur æquatio, quæ eminenter continet omnes æquationes ad algebraicas curvas. Etenim in eo latent tria arti-

artificia, nimirum 1. quod æquationis alterum membrum sit nihilum, de quo artificio jam supra diximus (§. 189.); 2. quod terminus unus repræsentet in casu particulari plures, ut adeo coëfficientes explicandi sint non uno, sed diversis modis, 3. quod in æquatione nulla habeatur ratio signorum, quæ in particularibus variant æquationibus, sed termini omnes afficiantur signo +, ne opus sit plures formare æquationes generales, ubi omnes particulares sub una comprehendi possunt, quod sane artificium maximi faciendum. Enimvero ut applicatio formulæ generalis manifesta evadat, lubet eam applicare ad circulum. Æquatio generalis est:

$$ay^m + bx^n + cy^r x^s + df = o$$

Æquatio ad circulum:

$$y^2 + ax - x^2 = o$$

Vides hic abesse xy, nec ullum adest membrum constans ex mere cognitis, adeoque $cy^r x^s + df = o$, consequenter formula generalis contracta hæc relinquitur:

$$ay^m + bx^n = o$$

Est igitur

$$\underline{ay^m = y^2}$$

adeoq; $a = 1$
$m = 2$

Porro

$$\underline{bx^n = + ax} \quad \underline{bx^n = - x^2}$$

adeoq; $b = a\ n = 1 \quad b = -1\ n = 2$

Docet adeo hoc ipsum exemplum, quomodo terminus unus in generali comparetur cum pluribus in particulari, ut coëfficientes indeterminati in generali determinentur ex particulari. Patet etiam, quomodo signum + in formula generali non obstet, quo minus coëfficiens negativus determinetur ex particulari, dum hic reperitur $b = -1$. Habet nimirum b in casu præsenti valorem duplicem, alterum positivum $+a$, alterum negativum -1.

§. 198. Qui quæ de circulo diximus probe perpendit, ei non hærebit aqua circa ea, quæ de sectionibus conicis aliisque curvis in præsenti capite, & de locis geometricis in sequente demonstrantur. Incepimus a parabola, quæ est sectionum Conicarum simplicissima. Æquatio ejus $y^2 = ax$. Quodsi fiat

$$\underline{x = o}$$
erit $\underline{y^2 = o}$
$$y = o$$

Atque adeo patet 1. in origine abscissæ A curvam secare rectam datam, ad quam refertur, AX.

Tab. II. Fig. 22. Sit alia abscissa AP $= v$, eidem respondens semiordinata PM $= z$, erit $z^2 = va$.

Ponamus $v > x$

erit $av > ax$

adeoque $z^2 > y$

$z > y$

2. Crescentibus adeo abscissis, semiordinatæ quoque crescunt, consequenter curva in infinitum continuari potest, & ab axe AX continuo magis magisque recedit.

Si fiat $x = a$

erit $y^2 = a^2$

$y = a$.

3. Quando igitur abscissa parametro æqualis, etiam semiordinata eidem æqualis est, consequenter si abscissa parametro æqualis, semiordinata & abscissa æquales sunt.

Sit $y = \frac{1}{2}a$

erit $ax = \frac{1}{4}a^2$

$x = \frac{1}{4}a$

4. Si ergo semiordinata semiparametro æqualis, quarta diametri parte a vertice A seu origine sua distat.

Quodsi æquationem ad parabolam cum æquatione pro omnibus curvis algebraicis conferre volueris; cum hæc sit:

$$ay^m + bx^n + cy^r x^s + df = 0$$

pro parabola vero

$$y^2 - ax = 0$$

& in hac deficiat xy & terminus constans ex mere cognitis respondens ipsi df, æquatio generalis contrahitur in

$$ay^m + bx^n = 0$$

estq; $ay^m = y^2$ $bx^n = -ax$

adeoq; $a = 1, m = 2$ $b = -a$, $n = 1$

Hæc addere libuit, ut appareat, eodem modo tractari posse æquationem ad parabolam, qua tractavimus æquationem ad circulum. Cetera enim patent per resolutionem problematum in hoc capite propositorum.

§. 199. De methodo tangentium, qua utimur problemat. 181. 189. 491. (§. 410. 440. 491. *Anal.*), quædam adhuc annotanda sunt. Tangentes curvarum facillime determinantur per calculum differentialem, quemadmodum in Analysi infinitorum docemus. Quoniam vero sectiones conicas referre mini-

minime licet ad diametrum, nisi praesupposita tangente, cui semiordinatae sunt parallelae & quae ex puncto contactus ducitur; ideo necessarium fuit tangentem determinari per Algebram communem. Adhibuimus itaque methodum *Cartesii*, quae nititur hoc principio, quod in contactu duae radices evadant aequales: id quod superius in circulo
Tab. II. Fig. 23. reperimus (§. 195.). Ponamus enim rectam TR secare curvam in M & N; evidens est, quod, si abscissae AP & AQ dicatur x eidem respondere duas semiordinatas PM & QN, per y in aequatione explicari potest. Ducatur alia tr, quae eandem curvam secat in punctis m & n: habebimus denuo duas semiordinatas pm & qn, per quas explicatur y in aequatione data. Patet autem abscissam unam PM continuo crescere, & alteram QN continuo decrescere, donec punctis M & N in contactu coincidentibus in aequatione data una alteri fiat aequalis. Ad haec qui animum advertit, nullo negotio deprehendet, quomodo ad methodum istam pervenire licuerit. Patebit autem suo loco, subtangentem per hanc methodum prodire eandem in sectionibus conicis, quae invenitur per calculum differentialem. Etsi autem haec methodus videatur universalis, ad tantas tamen in curvis altioribus calculi perplexitates deducit, quae vix videntur superabiles. Unde in ea perficienda plurimum desudarunt Geometrae, donec tandem ope calculi differentialis obtentum fuerit quod quaerebatur.

§. 200. In Ellipsi $ay^2 = abx - bx^2$ (§. 420. *Anal.*). Quodsi hic ponas

$$x = o$$

erit

$$\frac{ay^2 = o}{y^2 = o}$$

$$y = o$$

Quamobrem patet, 1. in origine abscissarum curvam secare rectam positione datam.

Si fiat $x = a$

erit $ay^2 = a^3 - a^3$
$= o$

adeoq; denuo $y = o$

Unde liquet, 2. curvam quoque secare rectam, ad quam refertur, si abscissa sit datae a aequalis, adeoque concavitatem obvertere eidem

eidem rectæ: ex quo porro sequitur, cum ex altera parte eodem modo sese habeant, quæ modo reperimus, curvam esse in se redeuntem.

Fiat $b = a$

erit $ay^2 = a^2x - ax^2$

$y^2 = ax - x^2$

3. Æquatio adeo ad ellipsin degenerat in æquationem ad circulum, ut circulus pro specie quadam ellipseos haberi possit, nacturus nomen ellipseos æquilateræ, nisi jam antea nomine circuli insignita fuisset hæc curva.

Quodsi a ponatur infinita, erit in æquat ione ad ellipsin

$$\frac{bx^2}{a} = 0$$

adeoque $y^2 = bx$

Cum adeo æquatio ad ellipsin degeneret in æquationem ad parabolam, ideo liquet 4. In locum ellipseos, cujus axis infinitus est, surrogari posse parabolam eandem cum ellipsi parametrum habentem.

Quodsi quis hæreat in infinitate axis elliptici, & in eo, quod hinc colligatur $\frac{bx^2}{a} = 0$; is evolvat, quæ in Ontologia de infinito mathematico demonstravimus.

§. 201. Eodem modo in hyperbola quoque generalia quædam ex æquatione ejus colliguntur. Æquatio ad hyperbolam est: $ay^2 = abx + bx^2$, seu $y^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$.

Sit $x = 0$

erit $y^2 = 0$

$y = 0$

Patet ergo 1. in origine abscissarum curvam secare rectam positione tadam, ad quam ea refertur.

Sit $x = a$

erit $y^2 = ab + \frac{a^2b}{a}$

$= a^2 + ab$

$y = \sqrt{(a^2 + ab)}$

Unde liquet. 2. si abscissa fuerit axi transvero æqualis, semiordinatam fore mediam proportionalem inter axem transversum & compositam ex axe transverso & parametro.

Sit

Sit $x = b$

erit $y^2 = b^2 + \frac{b^3}{a}$

$$y = \sqrt{\left(b^2 + \frac{b^3}{a}\right)}$$

Patet adeo 3. Si abscissa fuerit parametro æqualis, semiordinatam esse mediam proportionalem inter parametrum & tertiam proportionalem ad axem transversum atque parametrum.

Sit alia abscissa v, alia semiordinata eidem respondens z; erit per naturam curvæ

$$z^2 = bv + \frac{bv^2}{a}$$

Quare si $v > x$

erit $bv > bx$

$\frac{bv^2}{a} > \frac{bx^2}{a}$

$$bv + \frac{bv^2}{a} > bx + \frac{bx^2}{a}$$

$$y^2 > z^2$$

$$y > z$$

Patet itaque 4. crescente abscissa crescere semiordinatam, adeoque curvam continuo magis magisque ab axe recedere, consequenter in infinitum continuari.

Quodsi æquationem pro hyperbola cum generali pro omnibus algebraicis conferre volueris; cum sit

$ay^m + bx^n + cx^r y^s + df = a$

$ay^2 - abx - bx^2 = o$

erit $cx^r y^s + df = o$

$$ay^m = ay^2$$

$a = a \quad m = 2$

$bx^n = -abx \qquad bx^n = -bx^2$

$b = -ab \quad n = 1 \qquad b = -b \quad n = 2$

Reliqua in ipsa Analysi reperiuntur.

§. 202. Enimvero applicemus eandem methodum ad æquationem pro hyperbola intra asymptotas. Quoniam $xy = ab$,

erit $x = \frac{ab}{y}$

Fiat. $x = o$

erit $\frac{ab}{y} = o$

adeoq; y = infinit.

Patet itaque 1. in origine abscissarum semiordinatam esse infinitam.

Similiter cum sit $y = \frac{ab}{x}$

Si ponamus x = infinit.

$$\text{erit } \frac{ab}{x} = o$$

$$\text{adeoque } y = o$$

Unde liquet 2. rectam, in qua sumuntur abscissæ cum curva non concurrere nisi intervallo infinito, seu ab eadem non distare nisi intervallo infinite parvo, quatenus ab quantitas ordinaria per infinitam divisa dat particulam infinite parvam, quæ respective nihilum est.

Sit jam alia abscissa v, semiordinata alia z; erit per naturam curvæ $z = \frac{ab}{v}$.

$$\text{Ponamus } v > x$$

$$\text{erit } \frac{ab}{v} < \frac{ab}{x}$$

$$\text{adeoque } z < x$$

Videmus ergo 3. crescente abscissa decrescere semiordinatam, consequenter lineam curvam continuo magis magisque ad eam appropinquare rectam, in qua sumuntur semiordinatæ.

Quoniam itaque hæc cum curva non concurrit nisi infinito intervallo, aut potius ab eadem non distat nisi quantitate infinite parva, quando illa in infinitum continuatur (*vi num.* 2.), & in origine abscissarum semiordinata infinita (*vi num.* 1.); curva continetur inter duas rectas, quæ in infinitum excurrunt, & ad quas curva continuo propius propiusque accedit, nunquam tamen easdem secat. Continetur adeo inter asymptotos. Ex hoc exemplo apparet, quomodo ex æquatione colligatur, quod curva, quæ per eam definitur, habeat asymptotos.

§. 203. Sed demus etiam exemplum in curva quadam superioris generis, cujus æquatio perplexa videtur. Sit itaque $x^4 + 2bx^3 + y^2x^2 + b^2x^2 = a^2b^2 + 2a^2bx + ax^2$, quam invenimus pro conchoide prima sive superiore (§. 538. *Anal.*); erit

$$y^2x^2 = a^2b^2 + 2a^2bx + a^2x^2 - x^4 - 2bx^3 - b^2x^2$$

$$y^2 = \frac{a^2b^2}{x^2} + \frac{2a^2b}{x} + a^2 - x^2 - 2bx - b^2.$$

$$\text{Fiat } x = o$$

$$\text{erit } x^2 - 2bx = o$$

$$\frac{a^2b^2}{x^2} + \frac{2a^2b}{x} = \frac{a^2b^2}{o^2} + \frac{2a^2b}{o}$$

$$= \text{infin.}$$

adeo-

adeoque $a^2 - b^2 = o$, respectu $\frac{a^2b^2}{o^2} + 2\frac{a^2b}{o}$

Quare $y^2 = infin.$

$y = infin.$

Patet itaque 1. in origine abscissarum semiordinatam esse infinitam, consequenter curvæ asymptotum.

Fiat $x = a$

erit $y^2 = \frac{a^2b^2}{a^2} + \frac{2a^2b}{a} + a^2 - a^2 + 2ab - b^2$

$= b^2 + 2ab + a^2 - a^2 - 2ab - b^2$

$= o$

$y = o$

Quando igitur 2. abscissa fit ipsi *a* æqualis, semiordinata nulla est, adeoque curva rectam, in qua sumuntur abscissæ, secat.

Quoniam *y* ex infinita nulla evadit, dum *x* ex nihilo degenerat in *a*; necesse est 3. crescente abscissa decrescere semiordinatam.

Quia $y^2 = \frac{a^2b^2}{x^2} + \frac{2a^2b}{x} + a^2 - x^2 - 2bx - b^2$

$= (\frac{ab}{x} + a)^2 - (x + b)^2$

$y = \sqrt{((\frac{ab}{x} + a)^2 - (x + b)^2)}$

Est igitur *y* latus trianguli rectanguli, cujus hypothenusa componitur ex $\frac{ab}{x}$ & *a*, crus unum vero ex *b* & *x*. Unde liquet, 4. Si semiordinata infinita dicatur regula, recta *b* distantia poli a regula, recta vero *a* distantia verticis a regula, quemadmodum termini in Conchoide recepti sunt (§. 535. *Anal.*); semiordinatam esse crus trianguli rectanguli, cujus hypothenusa componitur ex tertia proportionali ad abscissam (ejus origine in regula constituta), distantiam regulæ a vertice & ejusdem a polo distantiam atque distantia ejusdem regulæ a vertice, crus vero alterum ex abscissa & distantia regulæ a polo.

Hinc 5. ex data abscissa BP, distantia regulæ a polo BC & a vertice BA reperitur semiordinata PM, si ex P intervallo BA intersecetur regula in O, & recta PO producatur, donec perpendiculari CH in polo erecta in H occurrat; tandemque intervallo CH intersecetur PM ad AB perpendicularis in M. Tab. II. Fig. 24.

Quoniam enim PB $= x$, PO $= a$, BC $= b$; erit OH $= \frac{ab}{x}$, con-

Uu 2 sequen-

gebracht werden.

sequenter $PH = \frac{ab+a}{x}$, trianguli rectanguli PCH hypothenusa. Quamobrem cum porro sit $CP = b+x$; erit $CH = \sqrt{\left(\left(\frac{ab+a}{x}\right)^2 - (b+x)^2\right)} = y$, consequenter quia $PM = CH$; erit PM semiordinata quæsita. Quodsi fiat $CL = PB$ & $CN = BA$, ac LN ad BC perpendicularis; recta CN producta statim resecabit semiordinatam PM.

Manifestum itaque est, quomodo ex æquatione eruatur modus determinandi geometrice punctum curvæ respondens cuilibet abscissæ, quamvis æquatio primo intuitu videatur admodum perplexa. Ceterum in applicatione methodi generalis adhibentur varia artificia, ex anterioribus equidem nota, quæ tamen tyroni non statim succurrunt. Quamobrem hinc elucescit, quod jam sæpe inculcavimus, artem exercendam esse per exempla, non per regulas particulares: etsi particulares annotandæ sint, ubi occurrunt; ut tanto facilius succurrant, quando denuo iisdem opus habemus. Non addimus de conchoide alia, quæ ex ejus æquatione deduci poterant, ne simus justo prolixiores.

§. 204. Etsi ex dictis appareat, ductum curvæ hac methodo facillime indagari posse, ut de reliquis taceamus; non tamen existimandum est, idem in qualibet promiscue curva eadem facilitate succedere. Etenim si in æquationibus altioribus occurrunt termini, quos duæ indeterminatæ ingrediuntur, nec earum separatio in promptu est, quemadmodum vidimus in Conchoide (§. 203.); hærebit aqua. Sit e. gr. $y^3 - axy = x^3$. Quodsi ponamus $x = a$, prodibit $y^3 - a^2y = a^3$, æquatio cubica affecta, ex qua radicis extractio difficilis & cujus constructio geometrica per inferiora demum patet. Similiter, quamvis per calculum algebraicum, quæ quæruntur, haud raro mira facilitate eruantur, quemadmodum supra vidimus in circulo (§. 193.) & plurima capitis præsentis problemata loquuntur, quæ de sectionibus conicis proposuimus; subinde tamen calculus prolixus & intricatus evadit, prouti videre licet in probl. 193. 195. 209. (§. 449. 454. 492. *Anal.*

§. 205. Nos sectiones Conicas consideravimus in plano & æquationes assumsimus, quæ eas definiunt. Hinc vero nondum

dum constat, curvas istas esse sectiones coni, nisi supponas theoriam sectionum Conicarum a veteribus traditam tanquam cognitam. Quamobrem consultum esse duximus analytice demonstrari, sectione coni prodire has ipsas curvas, quas in plano consideravimus, & quarum descriptiones, proprietates aliaque symptomata ex æquationibus assumtis deduximus (§. 511. & seqq. *Anal.*). Poteramus æquationes, quas assumsimus, eruere ex proprietatibus, quas ex sectione coni derivavimus: sed cur hoc minime fecerimus, jam monuimus (§. 514. *Anal.*). Ex. gr. pro Parabola ex sectione coni deduximus

$$y^2 : q^2 = x : z$$

ubi y & q denotant semiordinatas, x & z autem ipsis respondentes abscissas.

Quoniam etiam est

$$y^2 : x = q^2 : z$$

erit $y^2 : ax = q^2 : az$.

Quare si ponamus, constantem a talem assumi, ut sit $y^2 = ax$; evidens est fore etiam $q^2 = az$, atque adeo in omni puncto curvæ esse Quadratum semiordinatæ æquale rectangulo ex abscissa in eandem rectam constantem. Posse autem a talem assumi, ut sit $y^2 = ax$ patet, quia a tertia proportionalis est ad abscissam & semiordinatam. Idem etiam hoc modo patere poterat. Si alternando esse debet $y^2 : x = q^2 : z$ (§. 173. *Arithm.*) cum ratio non sit nisi homogeneorum (§. 126. *Arithm.*), x & z denotare debent rectangula, quorum latus unum unius est x, latus unum alterius z, latus vero alterum unitas seu recta, quæ pro unitate sumitur (§. 375. *Geom.*), utique eadem utrobique (§. 178. *Arithm.*). Quodsi ergo hæc recta efficere debet rectangulum, $1x$ æquale quadrato y^2, unitas ista degenerare debet in tertiam proportionalem ad x & y, quam fore eandem cum tertia proportionali ad q & z per modo demonstrata patet. Unde manifestum est, æquationem ad sectionem coni præsentem esse $y^2 = ax$, aut, si $a = 1$, $y^2 = x$. Notandum adeo hic est, si in æquationibus non appareat lex homogeneorum observata, termini pauciorum dimensionum coëfficientem esse unitatem, seu rectam quandam determinatam, quæ pro unitate

ſumitur. Cum autem quælibet recta pro unitate aſſumi poſſit, unitatem eſſe eandem non ſumendum, ſed demonſtrandum eſt. Ita ſumere licet $y^2 = x$, ubi coëfficiens ipſius x eſt 1; ſumere quoque licet $q^2 = z$, ubi coëfficiens ipſius z eſt 1. Enimvero non licet ſumere coëfficientes ipſarum x & z eſſe æquales; ſed hoc demonſtrandum, quemadmodum ex modo dictis claret. Nihil hic ſupponitur, quod non ſit ex notione numeri rationalis integri manifeſtum, quem in communi Arithmetica practica conſideramus, modo ad communia perpendenda omnem attentionem afferamus: qua neglecta haud raro hærent tyrones, ubi ſumuntur quæ per ea patent, & ad ardua magis applicantur, niſi fide Mathematicorum tanquam vera admittere velint, quorum rationem minime capiunt.

§. 206. Id quoque notandum eſt, in æquationibus, per quas definiuntur curvæ, originem abſciſſarum non ſemper aſſumendam eſſe in aliquo curvæ puncto, etiam ſi recta, ad quam curva refertur, eandem ſecat vel tangit; ſed eandem eſſe poſſe quodvis punctum aliud in eadem recta aſſumtum. Ita ex. gr. in circulo, ſi peripheriæ puncta referuntur ad diametrum AB, origo abſciſſarum ſtatui poteſt in centro C, ut ſit PC = x, PM = y & radius AC = MC = a. Quoniam enim $MC^2 = PM^2 + PC^2$ (§. 417. *Geom.*); habebimus $a^2 = y^2 + x^2$, adeoque $y^2 = a^2 - x^2$, quæ æquatio non minus circulum definit, quam altera, quam ſupra dedimus & unde circuli geneſin atque proprietates cum aliis ſymptomatis deduximus (§. 193.). Atque ex hac æquatione eadem deducere licet, quæ ibidem ex altera deduximus, ſi tanquam data ſupponatur, ut adhuc ignoretur, ad quamnam curvam ea ſit. Etenim ſi hic ponas Tab. I. Fig. 25.

$$x^2 = o$$

erit

$$y^2 = a^2$$

$$y = a$$

Unde liquet 1. in origine abſciſſarum ſemiordinatam eſſe conſtanti a æqualem.

Si vero ponas $x = a$

erit

$$y^2 = a^2 - a^2 = o$$

$$y = o$$

Unde

Unde patet 2. si abscissa fiat semiordinatæ, quæ in origine abscissarum est (*vi num.* 1.), æqualis, curvam secare rectam positione datam, ad quam refertur.

Quoniam $a^2 = y^2 + x^2$; ideo liquet, 3. Hypothenusam trianguli rectanguli, cujus crura sunt abscissa & semiordinata, ad quodvis punctum curvæ esse eandem, consequenter cum hæc hypothenusa constanter ex origine abscissarum ducatur, rectas omnes ex origine abscissarum ductas ad curvam esse inter se æquales. Æquatio adeo nos deducit ad genesin circuli non minus, quam ad definitionem ejus nominalem, &, ubi definitio circuli ex elementis nota supponitur, hinc discimus, æquationem esse ad circulum. Immo potest origo abscissarum etiam extra centrum statui, veluti in L, ubi AL constans est, & abscissa LP. Sit enim $AL = b$, $AB = a$, $LP = x$, $PM = y$, erit $AP = b + x$, $PB = a - b - x$, consequenter *ob*

Tab. II. Fig. 25.

$$PM^2 = AP . PB$$

$$y^2 = ab - b^2 + ax - 2bx - x^2$$

Quodsi hic ponas

$$x = o$$

erit
$$y^2 = ab - b^2$$
$$y = \sqrt{(ab - b^2)}$$

Unde liquet, 1. in origine abscissarum semiordinatam esse mediam proportionalem inter rectam quandam constantem b & differentiam ejus a constante alia a.

Quodsi fiat

$$x = a$$

erit $y^2 = ab - b^2 + a^2 - 2ab - a^2$
$= - ab - b^2$

Patet itaque 2. abscissam nunquam fieri posse ipsi a æqualem, sed semper eadem minorem esse debere.

Sit
$$x = a - b$$

erit $y^2 = ab - b^2 - 2ab + 2b^2 + a^2 - ab - a^2 + 2ab - b^2$

$$y^2 = o$$
$$y = o$$

Patet adeo, 3. si abscissa fiat differentiæ quantitatum constantium æqualis, curvam secare rectam positione datam.

Sit
$$x = \tfrac{1}{2} a - b$$

erit $y^2 = ab - b^2 - ab + 2b^2 + \tfrac{1}{4}a^2 - ab - \tfrac{1}{2}a^2 + ab - b^2$

$y^2 =$

$$y^2 = \frac{1}{4} a^2$$
$$y = \frac{1}{2} a$$

Videmus itaque 4. Si abſciſſa fiat $\frac{1}{2} a - b$, ſemiordinatam eſſe $= \frac{1}{2} a$.

Quodſi ponamus

$$b = o$$

erit $y^2 = ax - x^2$

Æquatio igitur degenerat in æquationem ordinariam pro circulo (§. 193).

Licet etiam originem abſciſſarum ſtatuere extra circulum, veluti in D, ut ſit, DP$=x$, adeoque ſi DA $=b$, AP $=x-b$. Et ſimiliter abſciſſas computare licet in aliqua a centro C diſtantia, ut earum origo vel ſit inter A & C, vel inter C & B. Hæc ſi notent tyrones, in doctrina de locis geometricis & conſtructione æquationum altiorum nihil prorſus ſentient difficultatis. Patebit etiam, quomodo ad formulas generales plana ſit via. Quæ vero hic annotamus de relatione curvarum ad rectam, quæ curvam in puncto quodam ſecat, eadem quoque locum habent, ubi eandem referre libuerit ad rectam extra curvam quomodocunque ſitam. Nec oleum atque operam perdunt tyrones, ſi in omni caſu poſſibili æquationem ad circulum inveſtigent, ut methodum definiendi curvas per æquationem intimius inſpiciant beneficio exempli omnium facillimi & notiſſimi, idem imitaturi in curvis aliis, quod in circulo fecere.

§. 207. Enimvero abunde ea docuimus, quæ in hac methodo lucem accendunt tyronibus, ne in tenebris palpitent ad magis ardua progreſſi, quemadmodum vulgo accidere ſolet. Sed dicenda quoque nonnulla ſunt de lineis non algebraicis, quarum nonnullæ ſub finem capitis definiuntur. Definimus Quadratricem *Dinoſtratis* per $ay = bx$, ubi x denotat arcum AN, a Quadrantem AB, b radium AC & y portionem radii AP, quæ ad radium eandem rationem habet, quam habet arcus AN ad Quadrantem. Quamobrem etſi æquatio alias definiat triangulum rectangulum æquicrurum, conſequenter in ea ſpectetur relatio rectæ, quæ hypothenuſa eſt ad crus unum, in quo ſumuntur abſciſſæ; præſenti tamen in caſu æquatio, quæ eadem

Tab. II. Fig. 67. al-geb.

eadem videtur, prorsus diversa est. Etenim in casu priori, quando est ad triangulum rectangulum æquicrurum, a & x denotant lineas rectas; in posteriori autem, quando ad Quadratricem est, a designat quadrantem, x arcum circuli quadrante minorem. Æquatio igitur algebraica non est, cum in ea singulæ literæ denotent totidem rectas. Hoc tamen non obstante æquationes istiusmodi, quas curvæ lineæ ingrediuntur, tractari possunt eodem modo, quo ante tractavimus algebraicas: quod succedere ipsa præsens æquatio docere potest. Etenim

Si fiat $x = o$

erit $ay = o$

$y = o$

Atque adeo patet, quadrantem concurrere cum radio in origine abscissæ.

Si $x = a$

erit $ay = ab$

$y = b$

Unde liquet, quamprimum x fit quadranti æqualis, rectam AP, quæ designatur per y, degenerare in radium.

Si $x = \frac{1}{2}a$

$ay = \frac{1}{2}ab$

$y = \frac{1}{2}b$

Evidens igitur est, dimidio quadranti respondere radium dimidium.

Eadem adeo eliciuntur, quæ per genesin Quadratricis manifesta sunt.

Quod vero etiam alia ignota hinc deduci possint, suo patebit loco (§. 55. *Anal.*): id quod omnino notandum, ne nullum in usum æquatio ista data videatur.

Singulare quid habet æquatio, quod non exprimat relationem ipsius curvæ ad rectam positionem datam per se, sed relationem potius curvæ alterius, nimirum Quadrantis circuli, cujus ope determinatur punctum M; quod rectæ AP & arcui AN, hoc est duabus indeterminatis y & x respondet. Exprimit scilicet relationem arcus AN ad rectam AP, qualis esse debeat, ut ipsi AP respondeat punctum M in Quadratrice. Data enim hac relatione datur etiam punctum M. Quoniam vero $y = \frac{ab}{x}$, adeo-

que AP quarta proportionalis ad arcum AN, quadrantem AB & radium AC; determinatio puncti M dependet a rectificatione indefinita circuli, consequenter a circuli Quadratura. Ceterum Quadratrix insinuat artificium reductionis constructionis curvarum ad curvas simpliciores, supposita harum quadratura vel rectificatione: neque enim in omnibus curvis rectificatio pendet a quadratura, prouti in circulo obtinet (*vi theor.* 3. §. 128. *Anal.*), quemadmodum suo loco videbimus, ubi de Quadratura & rectificatione curvarum agitur. Artificium hoc maximi momenti est in Analysi infinitorum ad Geometriam sublimiorem applicata, quemadmodum patet per problemata physico mechanica, qualia in Elementis Mechanicæ occurrunt. Quamobrem consultum est, ut tyrones, qui ad tertium cognitionis gradum adspirant, tempestive annotent, quomodo inventa veterum recentioribus Geometris insinuaverint artificia, aut saltem insinuare potuerint, siquidem attentionem suam deficere non fuerunt passi.

§. 208. Notandum adhuc est, posse etiam curvas referri ad curvas alias positione datas, quemadmodum referuntur ad rectas positione datas, ita ut abscissæ sumantur in curva positione data, quemadmodum sumuntur in recta positione data: quod ut facilius intelligatur, dabo exemplum. Sit AMO parabola *Appolloniana* seu primi generis. Producatur semiordionata PM in N, donec recta MN habeat ad arcum parabolicum AM eam relationem, quam habet semiordinata PM ad ejus abscissam AP; evidens est, si arcus AM $= x$, MN $= y$ & recta quædam constans $= a$, fore $y^2 = ax$. Æquatio hæc ab æquatione ad parabolam in eo differt, quod x denotet arcum parabolicum AM, cum in æquatione ad parabolam denotet rectam AP. Ceterum eadem ex æquatione hac deducuntur, quæ ex æquatione ad parabolam, nisi quod theoremata ingrediatur arcus parabolicus. Nimirum cum sit $y = \sqrt{ax}$; semiordinata MN est media proportionalis inter arcum parabolicum datum HM & rectam quandam datam constantem a, quæ tertia proportionalis Tab. II. Fig. 22.

tionalis

tionalis est ad quemvis arcum parabolicum & ipsi respondentem semiordinatam. Et quemadmodum in parabola quadrata semiordinarum habent rationem abscissarum, ita semiordinatæ curvæ ANR sunt in ratione arcuum parabolicorum ipsis respondentium. Hoc artificio jam usus est *Archimedes* in spiralibus qui eas retulit ad peripheriam circuli tanquam ad axem. Facile autem apparet, relationem semiordinatæ MN ad arcum AN exprimi posse per æquationem curvæ algebraicæ cujuscunque alterius. Ita si arcus AO $= a$, AM $= x$ & MN $= y$ curva AMR definiri potest per æquationem $y^2 = ax - x^2$, quæ est æquatio ad circulum (§.193.).

Si ponamus $x = a$

$$y^2 = a^2 - a^2 = 0$$

$$y = 0$$

Unde liquet punctum R cum puncto O coincidere, adeoque curvam AR parabolam AO secare in O.

Si fiat $x = \frac{1}{2}a$

$$y^2 = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2$$

$$y = \frac{1}{2}a$$

Patet itaque, si arcus parabolicus AO bisecetur, fore MN arcui dimidio æqualem.

Ponamus ex adverso $y = \frac{1}{2}a$; erit

$$\tfrac{1}{4}a^2 = ax - x^2$$

$$x^2 - ax = -\tfrac{1}{4}a^2$$

$$x^2 - ax + \tfrac{1}{4}a^2 = 0$$

$$x - \tfrac{1}{2}a = 0$$

$$x = \tfrac{1}{2}a$$

Unde manifestum est, in nullo alio puncto, quam in medio arcus AO arcum parabolicum AM rectæ MN æqualem esse.

§. 209. Præter sectiones conicas definivimus potissimum eas curvas, quæ a Veteribus fuerunt inventæ, & quas recentiores Geometræ addiderunt, antequam Algebra ad Geometriam sublimiorem applicaretur & doctrina curvarum amplificaretur. Veteres præter Circulum, parabolam, hyperbolam & ellipsin considerarunt Conchoidem, Cissoidem, Quadratricem atque spirales, & recentiores addiderunt Logarithmicam & Cycloidem, cui deinceps accessit Epicyclois. Tenendum nimirum est, veteres non animum advertisse ad curvas, nisi quatenus problematis geometricis solvendis inserviebant. Duo autem

apud ipsos celebrabantur problemata, alterum scilicet de inveniendis duabus mediis continue proportionalibus inter duas rectas datas, alterum de quadratura circuli. In usum prioris problematis solvendi *Nicomedes* invenit Conchoidem, *Diocles* Cissoidem; posterius autem problema per spirales solvere tentavit *Archimedes*, per Quadratricem *Dinostrates*. Recentius Quadratura circuli tentata per cycloidem, ad cujus imitationem, si genesin illius spectes, inventa Epicyclois. Cum vero Logarithmi essent inventi & tanta utilitate in Mathesin practicam recepti; in usum Logarithmorum reperta est Logarithmica, ad cujus imitationem deinceps excogitata Logistica spiralis. Nostrum erat lineas curvas veteribus celebratas non prætermittere silentio, qui lectorem nostrorum Elementorum ad Matheseos universæ cognitionem manuducere intendimus, præsertim cum inventis recentioribus ansam dederint, quæ a veteribus inventa fuerunt, quemadmodum jam hinc inde annotavimus. Logarithmica autem & cyclois usum præclarum nactæ sunt in problematis physico-mechanicis, prouti suo loco in Elementis Mechanicæ ostendimus. Earundem itaque mentionem injicere debuimus. Habet quoque usum prorsus eximium Epicyclois in Mechanica practica & aliis inventis recentioribus ansam dedit. Quamobrem nec hance silentio prætereriri fas erat. Quadratricem *Tschirnhausianam* & Lineam sinuum, Tangentium atque secantium non alio fine adjecimus, quam ut constaret, quomodo curvarum geneses excogitari possint: quem in finem etiam adjecimus problemata ultima hujus capitis (§. 579. & seqq. *Anal.*). Ex duobus tamen ultimis (§. 581. 583. *Anal.*) simul discimus, quomodo curvæ superiorum generum describi possint ope curvarum generum inferiorum. Ecce igitur tibi rationem, cur hasce potissimum curvas in præsente capite consideraverimus.

§. 210. Postquam ostendimus, quomodo Algebra utamur in eruendis curvarum descriptionibus, proprietatibus aliisque symptomatis; ad earum usum

ſum in conſtruendis problematis exponendum progredimur. Primum itaque docemus, quomodo problemata indeterminata conſtruantur. Atque eo fine capite ſexto agitur de locis geometricis. Doctrinam hanc invenere veteres Geometræ; ſed recentiores ad eandem Algebram applicare cœperunt, ubi conſtabat interſectione duorum locorum conſtrui æquationes altiores. Problemata indeterminata, quemadmodum vidimus ſuperius cap. 2. ſect. 2. duas habent quantitates incognitas, quarum una pro arbitrio aſſumta determinatur altera, quemadmodum vidimus in curvis algebraicis aſſumta abſciſſa pro arbitrio determinari ſemiordinatam: id quod etiam obtinere, ſi recta quædam poſitione data referatur ad rectam aliam itidem poſitione datam ex iis liquet, quæ in Geometria de lineis proportionalibus inveniendis demonſtrata ſunt. Ita in triangulo rectangulo ABC habet PM ad AP rationem conſtantem ipſius BC ad AB, atque adeo ſumta AP pro arbitrio, per rectam AC determinatur PM. Dum itaque problema indeterminatum conſtruimus, omnes reperimus rectas poſſibiles, quæ eandem datam relationem ad ſe invicem habent. Unde ſi ad rectam poſitione datam applicentur parallelæ, & quæritur in recta poſitione data punctum, quod ſit origo unius indeterminatæ, atque linea ſecans omnes iſtas parallelas, ut ad ipſas reſpondentes portiones in linea poſitione data habeant eandem relationem datam; problemati ſatisfactum. Hinc vero patet, cur linea iſta dicatur Locus, quia nempe continet omnes lineas rectas, quæ in problemate in locum indeterminatarum ſubſtitui poſſunt, ſeu quia in ea ſunt ſingula puncta, quibus terminantur rectæ una indeterminatarum pro arbitrio aſſumta determinandæ. Ex. gr. in triangulo rectangulo hypothenuſa AC eſt locus omnium rectarum proportionalium cruribus AB & BC: etenim continuatis rectis AB & AC in infinitum, intra crura hujus anguli continentur omnes iſtæ proportionales, quarum una ſumitur in AB, altera vero determinatur per rectam AC, & in recta AC ſunt omnia puncta M, qui-

Tab. II. Fig. 16.

terminantur indeterminatæ ad AB normales, ut fiant assumtis AP in data ratione proportionales. Ratio est relatio simplicissima, quam exhibet recta ad rectam aliam relata. Relationes vero ceteræ constantes repræsentantur per lineas curvas, qualis est in circulo, ut quadratum semiordinatæ sit æquale rectangulo ex segmentis diametri. Videmus adeo æquationes, quæ duas involvunt lineas incognitas, geometrice construi posse, quatenus eædem exprimunt relationem constantem, quam habent singula lineæ curvæ puncta ad rectam positione datam, seu quatenus eædem sunt æquationes ad curvam quandam lineam, quam definiunt. Atque ideo æquationes, quas ante diximus æquationes ad curvam, hic vocantur locales.

§. 211. Monuimus in anterioribus, curvam referri posse ad quamlibet rectam positione datam, sive ea curvam secet in vertice, sive in alio quocunque puncto, sive eandem non secet, sed tota extra eam cadat intervallo vel nullo, vel dato ab eadem distans, & sive axi fuerit parallela, sive ad eundem obliqua. Hinc determinantur omnes casus possibiles æquationum localium: quæ quomodo reperiantur, ex iis patet, quæ de circulo paulo ante ostendimus. Cum *Slusius* æquationum localium usum in construendis æquationibus cubicis & biquadraticis docuisset; *Philippus de la Hire* Algebram ad loca geometrica applicavit, & in omni casu æquationes locales ad rectam, circulum & sectiones conicas investigare docuit: quod idem fecit *Ozanamus*. Enimvero cum sic plures prodirent æquationes particulares ad eandem lineam; *Joannes Craigius* æquationes generales investigavit ad sectiones conicas, quæ omnes particulares eminenter continent: cujus exemplum secutus *Hospitalius*. Nobis quoque placuit generalia invenire theoremata construendi omnes æquationes locales ad rectam & sectiones conicas, cum per ea constructiones problematum indeterminatorum via vere analytica erui possint. Rem penitius examinanti constabit, non aliis hic opus esse artificiis, quam quæ paulo ante insinuavimus, cum de æquationibus ad circulum agere-

ageremus. Theoremata generalia inveniuntur, ſi inveſtigentur theoremata in caſu maxime compoſito, in quo linea, ad quam refertur curva ponitur eſſe ad axem obliqua & origo abſciſſarum diſtare a vertice vel centro curvæ, ſi quod habet, aliquo intervallo. Etenim ſi hic quædam lineæ conſtantes ſupponantur nullæ, in æquatione termini evaneſcunt, qui in eas ducuntur, ſicque prodit æquatio in caſu ſimpliciori. Hoc fieri debere obſervavimus ſuperius, cum in circulo origo abſciſſarum ſtatueretur in L intra verticem A & centrum C. Vidimus enim ſi ponatur $AL = o$, æquationem in eo caſu repertam $y^2 = ab - b^2 + ax - 2bx - x^2$ degenerare in æquationem ad circulum $y^2 = ax - x^2$ in caſu ſimpliciſſimo, quando origo abſciſſarum eſt in A.

Tab. II. Fig. 25.

Enimvero non modo æquatio magis compoſita hoc pacto reducitur ad ſimpliciorem, verum etiam ſchema, quod exhibet conſtructionem illius æquationis, degenerat in ſchema, quod hujus repræſentat conſtructionem. Ex. gr. ſi fuerit $LH = o$, linea DH incidit in DL, adeoque pars ſchematis, quæ relinquitur, caſum iſtum repræſentat, in quo recta poſitione data DL, ad quam refertur curva AMB eſt axi AS parallela. Quodſi porro fiat $KD = o$, relinquitur pars ſchematis, quæ repræſentat caſum, in quo abſciſſæ computantur in axe ultra verticem continuato KS & origo earum ſtatuitur in aliqua a vertice diſtantia K. Denique ſi etiam ponatur $AK = o$, prodit ſchema caſum ordinarium exhibens, in quo abſciſſæ ſumuntur in axe AS & origo abſciſſarum in vertice.

Tab. VII. Fig. 75. Fig. al. geb.

Methodus adeo qua utimur, non modo æquationes locales omnes ad eandem curvam uni æquationi includit eodem artificio, quo æquationes omnes ad curvas algebraicas ad æquationem unicam generalem reduximus (§. 385. *Analyſ.*), ſit ita quod ibidem aliud præterea artificium adhibendum erat, quo hic non habemus opus, quia ibidem æquationes omnes una formula comprehendendæ, non erant ejusdem gradus, quemadmodum in præſenti obtinet; ſed etiam unico ſchemate omnium æquationum localium conſtructiones comprehendit. Quænam hæc ſit prærogativa præ me-

methodo communi, qua singuli casus sigillatim expenduntur; facillimo negotio animadvertet, qui, quæ de locis geometricis tradimus, cum iis conferre voluerit, quæ de iisdem docet *de la Hire*, vel *Ozanamus*.

§. 212. Unum adhuc superest, quod de theorematis hisce generalibus observandum, ne eorum applicatio turbet tyrones. In schemate nostro supponimus, originem abscissarum removeri ultra verticem, ita ut abscissa linea quadam data excedat abscissam ordinariam. Enimvero vidimus supra, originem earundem etiam statui posse ex parte altera, veluti in L, ita ut abscissa LP deficiat ab abscissa ordinaria linea quadam data AL. Similiter rectam axi parallelam, vel ad eum obliquam ponimus ultra eundem, ut augeat semiordinatam ordinariam PM recta quadam data, cum tamen etiam hæ lineæ ita duci possint ex parte opposita, ut semiordinata QM vel RM deficiat ab ordinaria PM linea quadam data PQ, vel PR. Æquatio igitur localis generalis non videtur omnes æquationes particulares continere, nec

Tab. II. Fig. 25.

schema illi respondens comprehendere omnia schemata, quæ harum constructionem exhibent. Dubium hoc ut tollatur, nostrum est docere, qua ratione innotuerit, quomodo iidem quoque casus in eo, ad quem computavimus æquationem, contineantur. Supra reperimus æquationem ad circulum, si origo abscissarum fuerit in L, $y^2 = ab - b^2 + ax - 2bx - x^2$. Ponamus jam originem abscissarum esse in N, ut sit NA $= b$, NP $= x$, sitque AB $= a$, PM $= y$; erit AP $= x - b$, PB $= a + b - x$.

Ob PM^2 = AP. PB

prodibit

$$y^2 = ax - x^2 + 2bx - ab - b^2$$

Æquationem hanc a superiori non differre videmus nisi signis & hanc diversitatem hinc oriri observamus, quod ibi abscissa ordinaria AP sit $x - b$, hic vero $b - x$. Quodsi ergo æquationes istæ redigantur ad nihilum, quemadmodum in hac doctrina fieri solet; habebimus in eo casu, ubi abscissarum origo in N,

$$\begin{aligned} y^2 + x^2 - ax + ab &= 0 \\ -2bx + b^2 & \end{aligned}$$

in

in casu autem opposito, ubi origo abscissarum in L,

$$y^2 + x^2 - ax - ab = 0$$
$$+ 2bx + b^2$$

Quare si duas haberes formulas, valor ipsius b in casu particulari dato semper eliceretur positivus, cum in priori coëfficiens negativus comparandus esset cum negativo $-2b$, in posteriori coëfficiens positivus cum $+2b$. Quodsi vero æquationem, quæ cum formula posteriori conferri debebat, cum priori componis, adeoque quantitatem positivam cum negativa, necesse est ut valor ipsius b prodeat negativus. Si $-b$ substituas in locum $+b$ in æquatione altera, pro $+2bx$ habebis $-2bx$, pro $-ab$ vero $+ab$, ducendo scilicet $-a$ in $-b$, ast b^2 retinet signum suum, quia $-b$ in $-b$ efficit $+b^2$. Atque sic æquatio posterior degenerat in priorem, ut adeo prior in utroque casu adhiberi possit, modo notes, quoties in casu particulari lege comparationis valor ipsius b elicitur negativus, toties sumendam esse rectam eidem respondentem ex parte opposita, ut sit AL $= b$. Idem cum eodem modo obtineat quoad distantiam parallelæ axi ab eodem PQ; manifestum est, cur una formula satisfaciat in casu utroque, modo observetur, quod de valore negativo in æquationis particularis cum generali comparatione prodeunte annotavimus. Idem adhuc clarius patet in parabola. Etenim si fuerit NA $= b$, NP $= x$, adeoque AP $= x - b$; erit ex natura Parabolæ, si parameter fuerit a, Tab. II. Fig. 22.

$$y^2 = ax - ab$$
seu $$y^2 - ax + ab = 0$$

Quodsi fuerint omnia ut ante, sed AL $= b$, adeoque AP $= b + x$, erit

$$y^2 = ax + ab$$
seu $$y^2 = -ax - ab = 0$$

Hic denuo patet, æquationem posteriorem non differre a priori, nisi diversitate signorum in iis terminis, quorum coëfficiens est b, in priori enim habemus $+ab$, in posteriori $-ab$. Quamobrem ubi in applicatione formulæ generalis, quæ ad casum priorem spectat, confers terminum negativum æquationis ad casum posteriorem spectantis cum positivo, qui ex formula casus prioris sumitur; valor utique

que prodire debet negativus pro AL. Patet etiam hic, ſi in æquatione poſteriori pro $+b$ ſubſtituas $-b$, ducendo $-b$ in $-a$, prodire $+ab$, adeoque æquationem poſteriorem degenerare in priorem, quemadmodum ex adverſo prior abit in poſteriorem, ſi in priori ſubſtituas $-b$ pro $+b$. Quodſi enim ducas $+a$ in $-b$, prodibit $-ab$, quemadmodum habet formula poſterior. Videmus adeo, quomodo innotuerit, eandem formulam ſubire poſſe vicem duarum, ſi valoris negativi quantitas ſumatur ex parte oppoſita. Immo videmus, perinde eſſe, ſive in formula generali abſciſſam & ſemiordinatam ſtatuas ordinariis AP & PM majorem, ſive minorem, ut adeo nulla ratio intrinſeca fuerit electionis, ſed tantummodo extrinſeca: quod ideo monemus, ne quis in Philoſophia hinc petat argumentum contra principium rationis ſufficientis in electionis caſu. Utimur eodem artificio non ſine maxima utilitate in Analyſi infinitorum ſeu calculo differentiali & integrali, quemadmodum ſuo loco videbimus, ubi ex eadem ratione valorem negativum ſumimus pro magnitudine ex parte oppoſita ſita. Abſit itaque ut tibi perſuadeas, hoc fieri ex natura quantitatum privativarum, & hinc colligas, quantitates privativas eſſe veras quantitates, ſeu in numero poſitivarum, cum ſatis conſtet eas non denotare niſi defectum quantitatis veræ ſeu poſitivæ per poſitivam, quæ deficit, æſtimabilem, quemadmodum pecunia, quæ debetur, non eſt parata pecunia, quam habes, etſi per paratam peculiam æſtimetur, quæ ſolvenda, ut debitum tollatur. Nullæ revera ſunt quantitates negativæ, etſi utiliter in uſum calculi univerſalis fingantur. Cavendum omnino eſt, ne entia ficta Mathematicorum confundantur cum realibus in detrimentum ſcientiæ philoſophicæ.

§. 213. Hinc ſimul patet ratio, cur in caſu particulari demonſtraturi conſtructionem ex formula generali elicitam, eruendo ex hac æquationem ad conſtruendum propoſitam, non utamur valoribus negativis, qui per comparationem cum formula generali prodeunt, ſed iis ſubſtituamus poſitivos: id quod fieri

fieri non licebat, si per naturam quantitatum valor esset negativus. Valor negativus v. gr. rectæ AL nonnisi fictitius est, quatenus æquatio, unde elicitur, repræsentare fingitur casum, quem non repræsentat, cum revera non exhibeat nisi eum, in quo origo abscissarum est in N, propterea quod hac fictione eadem formula sufficere deprehenditur in utroque casu, quam absque ea nonnisi in uno adhibere liceret, nimirum quando origo abscissarum est in N. Extra hanc fictionem utique contradictorium est, quantitatem positivam esse æqualem privativæ, quemadmodum, etiam in ipsa Analysi contradictionem inde colligimus atque ex ea porro notioni impossibilis convenienter (§. 97. *Ontol.*) impossibilitatem inferimus. Habemus exemplum in æquatione ad circulum $y^2 + x^2 - ax + 2bx - ab + b^2 = 0$. Quodsi enim ponas

Tab. II. Fig. 25.

$$x = a$$

$$\text{erit } y^2 + a^2 - a^2 + 2ab - ab + b^2 = 0$$

$$y^2 = -ab - b^2$$

$$y = \sqrt{(-ab - b^2)}$$

Ex eo itaque, quod valor ipsius y^2 prodit negativus, qui producit pro y radicem imaginariam, infertur, impossibile esse, ut abscissa fiat diametro æqualis, recte omnino, cum idem per se pateat, ubi supponis notum esse, quod æquatio sit ad circulum & origo abscissarum in L, cum abscissa major esse nequeat recta LB = $a - b$. Nimirum hic colligitur, hypothesin $x = a$ esse absurdam, quia hinc sequitur, quantitatem positivam esse æqualem privativæ aut radici imaginariæ, quod absurdum esse supponitur.

§. 214. Ut usus formularum generalium in construendis æquationibus problematum indeterminatorum clarius elucesceret, aliquot exemplis eundem illustrare lubuit (§. 593. & seqq. *Anal.*). Patet per ea, ope istarum formularum nos via vere analytica deduci ad problematum indeterminatorum constructionem, ac constructiones semper obtineri concinnas, quales in Geometria desiderantur, ut adeo non solius brevitatis gratia easdem prætulerimus methodo communi, qua usi sunt *de la*

Hire & *Ozanamus*. Dedimus quoque exempla, (§. 597. 600 *Anal.*), quibus oſtenderemus, quomodo ex conſtructione locorum deriventur æquationes locales ut appareat ad quamnam curvam ſit locus conſtructus. Quoniam vero id intendimus, ut, dum artificia Analyſeos inculcamus, ſimul doceamus veritates mathematicas cognitu utiles; ideo ſelegimus conſtructiones curvarum, quas pro fornicibus commendant Architecti, ut conſtaret, eas eſſe ellipſes *Apollonianas*. Æquationem primam (§. 597 *Anal.*) $y^2 + \frac{d^2x^2}{a^2} - \frac{d^2x}{a} = 0$ eſſe ad ellipſin, conſtare poterat ex collatione cum formula generali pro ellipſi (§. 588. *Analyſ.*). Quodſi conſueto more hanc æquationem cum formula iſta compares, deprehendes a eſſe axem majorem, d vero minorem ellipſeos. Etenim vi formulæ generalis

$$\frac{2r}{q^2} = 0 \qquad \frac{t}{2m} = \frac{d^2}{a^2} \qquad 2n = 0$$

$$q = f$$

$$-\frac{2tp}{2m} = -\frac{d^2}{a} \qquad m^2 = p^2 = \tfrac{1}{4}a^2$$

$$\frac{2d^2p}{a^2} = \frac{d^2}{a} \qquad m = \tfrac{1}{2}a$$

$$\frac{2p}{a} = 1$$

$$p = \tfrac{1}{2}a$$

Habemus adeo

$$a^2 : d^2 = a : t$$

$$t = \frac{ad^2}{a^2} = \frac{d^2}{a}$$

Quoniam parameter t eſt tertia proportionalis ad axem majorem & minorem (§. 423. *Analyſ.*); cum a ſit axis major, erit d minor & ob $p = \frac{1}{2}a$ abſciſſæ computantur a vertice.

Similiter æquationem alteram $y^2 + \frac{ddx^2}{a^2} - \frac{2ddx}{a} = 0$ eſſe ad ellipſin, ejus cum formula generali collatio prodit, & illius cum hac comparatione facta patet, quod a ſit axis dimidius major, d vero dimidius minor. Etenim vi formulæ generalis

$$\frac{t}{2m} = \frac{d^2}{a^2} \qquad \frac{2tp}{2m} = \frac{2dd}{a}$$

h. e.

h. e. $\frac{d^2 p}{a^2} = \frac{d^2}{a}$.

$$p = a$$

$$m^2 = p^2$$
$$= a^2$$

$$m = a$$

$$a^2 : d^2 = 2a : t$$

$$t = \frac{2ad^2}{a^2}$$
$$= \frac{2d^2}{a}$$

Quoniam a est dimidius axis major & parameter t tertia proportionalis ad axem majorem & minorem (§. 423. *Anal.*), seu quarta ad dimidium axem majorem, minorem dimidium & minorem integram (§. 124. *Analys.*); ideo patet, d esse axem minorem dimidium & ob $p=a$ originem abscissarum esse in vertice ellipseos.

§. 215. Utraque æquatio localis, etsi ex diversis constructionibus eruatur, eadem est, nisi quod in posteriori a & d denotent semiaxes, in priori autem integros axes conjugatos. Forsan non inconsultum erit hic docere, quomodo constructio utraque eruatur ex æquatione ordinaria ad ellipsin. Æquatio hæc est $y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$, in qua b parametrum, a vero axem majorem denotat. Quoniam parameter est tertia proportionalis ad axem majorem a & minorem d (§. 423. *Anal.*); erit $b = d^2 : a$. Quodsi ergo in æquatione ordinaria hunc valorem in locum ipsius b surroges; habebis

$$y^2 = \frac{d^2 x}{a} - \frac{d^2 x^2}{a^2}$$
$$= \frac{d^2 ax - d^2 x^2}{a^2}$$

Quare

$$a^2 : d^2 = ax - x^2 : y^2$$
$$a : d = \sqrt{(ax - x^2)} : y$$

Patet adeo semiordinatam in ellipsi esse quartam proportionalem ad axem majorem, minorem & semiordinatam circuli super axe majore descripti eidem cum semiordinata ellipseos abscissæ respondentem. Quamobrem cum pro a & d sumi etiam possit $\frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}d$ (§. 124. *Anal.*); igitur patet, si super axe majore describatur semicirculus & in P erigatur perpendicula i: PN, ductaque ex centro C radio CN in eum transferatur CR semiaxi minori æqualis, ac tandem Tab. II. Fig. 26.

dem ex R demittatur perpendicularis RM; fore punctum M in ellipsi: quæ est ipsa constructio *Serlii* ex æquatione ordinaria elicita. Cum enim sit MR parallela ipsi PC; erit (§. 268 *Geom.*)

NC : RC = NP : PM

$\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}d = \sqrt{(ax - x^2)} : y$

Poteramus itaque constructionem Serlianam ellipseos jam ex æquatione ordinaria elicere in superioribus, cum doctrinam de Ellipsi traderemus. Etsi autem æquatio ex altera constructione elicita eadem sit cum anteriore; ex ea tamen non minus deduci poterat constructio altera. Etenim sit ellipsis ADB, cujus axis major AB, semiaxis minor EF. Describatur radio CD semicirculus EDF & erecta perpendiculari PM ducatur axi AB parallela MN, ex N vero demittatur perpendicularis NQ, quæ erit ipsi PM, æqualis. Si sit AC = a, DC = d, AP = x, erit æquatio ad ellipsin $y^2 = \frac{2addx - d^2x^2}{a^2}$, adeoque

Tab. III. Fig. 27.

$a^2 : 2ax - x^2 = d^2 : y^2$

Sit jam EQ = z, erit QF = $2d - z$, adeoque $QN^2 = PM^2 = y^2 = 2dz - z^2$. Habemus itaque

$a^2 : 2ax - x^2 = d^2 : 2dz - z^2$

adeoque (§. 124. *Anal.*)

$a^2 - 2ax + x^2 : a^2 = d^2 - 2dz + z^2 : d^2$

$a - x : a = d - z : d$

$x : a \quad = z : d$

$x : z \quad = a : d$

hoc est, AP : EQ = AC : EC

Quare si ad semiaxem majorem & minorem ellipseos atque abscissam AP pro arbitrio assumtam quæratur quarta proportionalis, erit ea abscissa EQ, cui respondet semiordinata QN in circulo semiordinatæ ellipseos PM æqualis.

Quodsi displicet resolutio per analysin rationum; analogiam, qua nititur constructio per Algebram quoque reperire licet. Etenim

$$\frac{2ad^2x - d^2x^2}{a^2} = 2dz - z^2$$

$$\frac{dx^2 - 2ad^2x}{a^2} = z^2 - 2dz$$

$$\frac{d^2x^2 - 2ad^2x + a^2d^2}{a^2} = z^2 - 2dz + d^2$$

$$\frac{ad - dx}{a} = d - z$$

$$\frac{dx}{a} = z$$

Ha-

Habemus itaque, ut ante:

$$a : d = x : z$$

Notanda hic sunt artificia, quibus constructiones ex æquatione ordinaria eliciuntur. Nimirum in æquatione ordinaria substituimus valorem parametri, quem ex eadem elicuimus, ut eandem ingrediantur nonnisi lineæ in ipsa contentæ. Ita enim prodibat æquatio, cujus in analogiam resolutione constructio prior erat manifesta. Ex eadem æquatione in analogiam resoluta prodit quoque altera, substituendo valorem quadrati semiordinatæ ellipseos ex circulo circa axem minorem descripto. Equidem prævidere non licet, quid per substitutionem sit proditurum; non tamen ideo ea negligenda est. Ubi enim veritatem quærimus, tentanda sunt omnia, donec incidamus in theoremata & constructiones problematum. Principii substitutionis magna vis est in Analysi: efficit enim æquationem dependentem a pluribus veritatibus, ut jam ex ea per reductionem eadem erui possint, quæ ex iisdem more veterum ratiocinando colliguntur.

Tab. III. §. 216. Enimvero ut intelligant tyrones, idem artificium etiam in aliis curvis adhiberi posse, lubet hoc ipsum applicare ad hyperbolam. Fig. 28. Pro hyperbola æquatio ordinaria est $y^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$. Est etiam hic, si axis conjugatus $= d$, parameter $b = \frac{d^2}{a}$. Quodsi ergo hunc valorem in æquatione ordinaria substituas, habebis

$$y^2 = \frac{d^2 x}{a} + \frac{d^2 x^2}{a^2}$$

$$= \frac{d^2 ax + d^2 x}{a^2}$$

Quare $a^2 : d^2 = ax + x^2 : y^2$

$$a : d = \surd(ax + x^2) : y$$

$$\tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{2}d = \surd(ax + x^2) : y$$

Quodsi ergo ex centro hyperbolæ C erigas $CD = \frac{1}{2}d$, & super BP abscissa AP pro lubitu assumta describas semicirculum secantem perpendicularem in A erectam in N, & $PN = \surd(ax + x^2)$ transferas ex B in L, tandemque in L erigas perpendicularem LI, occurrentem rectæ per B & D ductæ in I; erit LI semiordinata y abscissæ AP respondens. Quamobrem si fiat recta PM ad BP perpendicularis = LI; erit punctum M in hyperbola

perbola. Cum in praxi non opus sit semicirculum describi, sed ex medio B tantummodo intersecanda recta AN in N & intervallum PN ex B in L transferendum; quodvis in hyperbola punctum M hoc modo facillime determinatur, ut constructio pro non in eleganti haberi possit. Notent igitur hic tyrones, quod ad artificia, quibus in solutionibus problematum utuntur autores, animum attendere debeant eadem statim adhibituri ad alia, quantum ipsis datur. Nec inconsultum erit, ut Autores, qui de sectionibus Conicis commentati sunt, evolvant & ubi theoremata & problemata elegantia occurrunt, ea analytice investiganda sibi proponant. Ad hoc studium ut eos incitaremus iisdemque viam, qua eundem, commonstraremus ea in medium proferre libuit, quæ de Ellipsi & Hyperbola dicta sunt. Unicum adhuc addendum. In hyperbola æquilatera $a = d$, adeoque $y = \sqrt{}(ax + x^2)$, consequenter PM = PN. Quamobrem punctum M in eadem nullo fere negotio determinatur, scilicet si ex medio BP intervallo ½ BP intersecetur AN in N & intervallo PN intersecetur PM in M, ut adeo non opus sit, nisi in A erigi perpendicularem infinitam.

§. 217. Nos non progredimur ultra loca solida, in quibus acquieverunt veteres: neque enim hæc doctrina ultra hosce limites multum promota. *Newtonus* enumeravit lineas tertii ordinis seu curvas secundi generis, quarum æquationes ad tres dimensiones ascendunt. Eam esse completam demonstravit *Stirlingius* simulque ostendit, quomodo æquatione curvæ tertii ordinis data inveniatur locus, hoc est, species curvarum dignoscatur, ad quam eadem est. Enimvero hæc non sunt ad captum tyronum, in quorum usum conscripsimus Elementa nostra, neque adhuc ea ratione pertractata, ut eadem facilitate intelligantur, qua a nobis proposita capiuntur. Neque etiam opus est, ut hac doctrina sis instructus, ubi ea, quæ in sequentibus tradimus, intelligere volueris, immo eadem ignorata non impeditur progressus in Analysi recentiorum, qua Geometria ad naturam applicatur. Hoc non

non eo fine monemus, ut præclaris inventis laudem suam detrahamus; sed ne tyrones remorentur progressum ad ulteriora, affectantes scientiam eorum, quorum ignorantia eidem minime obstat. Monitum igitur nostrum exigit præsens institutum. Ultra enumerationem linearum tertii ordinis, seu curvarum secundi generis nemo adhuc progressus. Atque adeo doctrina de speciebus curvarum algebraicarum tanto adhuc intervallo distat a perfectione sua, quanto ab eadem distare Algebram monuimus. Abunde tyronibus ad altiora adspirantibus sufficiunt ea, quæ de locis geometricis tradidimus. Et ubi ad artificia, quibus in doctrina hac explananda utimur, animum attulerint attentum, ut eadem animo distincte comprehendant; iisdem plurimum juvabuntur in altioribus, quæ deinceps sequuntur. Hoc auxilio methodus comparationis æquationum particularium, in quibus coëfficientes indeterminatarum sunt determinati, cum assumtitiis, in quibus coëfficientes isti indeterminati sunt, familiaris redditur. Ejus autem in Analysi multus est usus.

§. 218. Doctrinam de locis geometricis non solum proposuimus in usum constructionis problematum in determinatorum, cujus ideo dedimus aliquot exempla; sed & in usum constructionis æquationum altiorum, præsertim cubicarum & biquadraticarum. Quamobrem capite septimo docemus primum in genere, quomodo æquationes superiores construantur, & mox in specie, quomodo construantur æquationes cubicæ & biquadraticæ. Methodus autem, qua hic utimur, tota huc redit, ut construantur duo loca, quorum intersectione determinatur radix æquationis, seu linea recta, quæ eidem respondet. Invenit eandem *Slusius.* Etsi enim non desint, qui eam jam *Cartesio* perspectam fuisse contendunt; certo tamen, quod affirmant, probare minime possunt, cum alia quoque via in regulam suam incidere potuerit, quam in Geometria pro construendis æquationibus cubicis & biquadraticis per parabolam & circulum præscribit. Quemadmodum vero inventa veterum profuerunt recentioribus ad invenienda sua, quibus ad ulteriora progressuris

ris usui sunt inventa anteriora; ita dubium non est, quin veterum quoque inventa facem protulerint *Slusio* ad methodum suam construendi æquationes cubicas & biquadraticas inveniendam. Etenim cum veteres multum desudarent in duabus lineis mediis continue proportionalibus inter duas datas inveniendis; *Menechmus* via vere analytica pervenit ad solutionem problematis tantopere celebrati ope intersectionis duarum parabolarum. Atque in hac ipsa constructione continetur idea ejus methodi, quam *Slusius* primus reperit: id quod ut appareat, analysis *Menechmi* paulo diserTab. III. Fig. 29. tius explicanda. Quoniam GH tertia proportionalis ad AB & EF, itidemque CD tertia proportionalis ad EF & GH; habemus

$AB:EF=EF:GH$ $\qquad$ $EF:GH=GH:CD$

$EF^2=AB.GH$ $\qquad$ $GH^2=CD.EF$

Patet itaque, quadratum primæ mediarum continue proportionalium esse æquale rectangulo ex data prima AB in quæsitam alteram, seu mediarum continuæ proportionalium secundam; quadratum vero secundæ mediarum continue proportionalium esse æquale rectangulo ex datarum altera in primam quæsitarum seu continue proportionalium. Quoniam in parabola quadratum semiordinatæ est æquale rectangulo ex parametro in abscissam; igitur patet, si parametro data una AB describatur parabola, secundam quæsitarum GH fore in numero abscissarum, & eidem respondentem semiordinatam fore primam quæsitarum EF: contra si parametro data altera CD describatur parabola, secundam quæsitarum GH fore in numero semiordinatarum ejusdem & eidem respondentem abscissam fore primam quæsitarum. Quamobrem patet eandem rectam esse abscissam in parabola una & semiordinatam in altera, & quæ in una semiordinata est, eandem esse abscissam in altera. Obtinet hoc si duæ parabolæ AMR Tab. III. Fig. 30. & AMO circa axes AD & AE ad angulos rectos junctos describantur, in puncto enim intersectionis semiordinata PM parabolæ AMR æqualis est abscissæ AQ parabolæ alterius AMO

&

& vicissim semiordinata QM parabolæ AMO æqualis est abscissæ AP Parabolæ AMR. Patet itaque si rectæ datæ sumantur pro parametris parabolarum AMR & AMO, rectas AP & PM fore duas medias continue proportionales inter duas istas rectas datas. Hic est modus inveniendi duas lineas medias continue proportionales inter duas datas. Quodsi $AB = a$, $CD = b$, $EF = x$, $GH = y$; erit

Tab. III. Fig. 29.

$$x^2 = ay \qquad y^2 = bx$$

$$\frac{y^4}{b^2} = ay \qquad \frac{y^2}{b} = x$$

$$y^4 = ab^2y$$

$$y^3 = ab^2$$

Unde liquet, æquationem cubicam $y^3 - ab^2 = o$ construi per duo loca $x^2 - ay = o$ & $y^2 - bx = o$, quorum intersectione determinatur semiordinata PM, quæ radici æquationis $y^3 - ab^2 = o$ respondet. Constructio adeo *Menechmi* insinuat ideam methodi *Slusianæ*.

§. 219. Inventum *Menechmi* ansam quoque dare poterat inveniendæ regulæ *Cartesianæ*, qua æquationes cubicæ & biquadraticæ construuntur. Nimirum cum ex illo constet, æquationem cubicam construi per duas parabolas, quarum mutua intersectione determinatur radix, in arte inveniendi autem tentaminibus multa relinquantur, facile animum subit cogitatio tentandi, num circulus quoque per verticem parabolæ ductus in puncto intersectionis extra verticem determinet radicem æquationis cubicæ. Sit itaque centrum circuli per verticem parabolæ A descripti in C, si ex eo in axem parabolæ demittatur perpendicularis CD; evidens est per rectas AD & DC determinari & centrum C, & radium AC. Sit itaque $PM = y$, parameter $= a$, $AD = b$, $DC = c$. Demittatur ex C perpendicularis CR ad semiordinatam PM; erit $RM = y - c$ & ex natura Parabolæ $AP = \frac{y^2}{a}$ (§. 391. *Analys.*), adeoque

Tab. III. Fig. 31.

$$DP = CR = \frac{y^2}{a} - b. \quad \text{Quoniam}$$

$AC^2 = AD^2 + DC^2$ & $CM^2 = CR^2 + RM^2$ (§. 417. *Geom.*); erit $AC^2 = b^2 + c^2$ & $CM^2 = \frac{y^4}{a^2} - \frac{2by^2}{a} + b^2 + y^2 - 2cy + c^2$, con-

sequenter ob $CM^2 - AC^2 = o$

$$\frac{y^4}{a^2} - \frac{2by^2}{a} - 2cy = o$$

$$+ y^2$$

$$y^3 - 2aby - 2a^2c = o$$
$$+ a^2y$$

Patet itaque intersectione circuli per verticem parabolæ transeuntis & parabolæ construi posse æquationem cubicam, in qua secundus terminus deficit.

Ut jam determinetur valor ipsius b seu rectæ AD & valor ipsius c, seu rectæ DC; sit æquatio alteri æquivalens

$$y^3 - py - q = o$$

erit $-2ab + a^2 = -p$

$$b - \tfrac{1}{2}a = \frac{p}{2a}$$

$$AD = b = \frac{p}{2a} + \tfrac{1}{2}a$$

Similiter $-2a^2c = -q$

$$DC = c = \frac{q}{2a^2}$$

Quodsi cum *Cartesio* sumas parametrum pro unitate & fiat in axe AH = semiparametro, erit

$$HD = \tfrac{1}{2}p$$
$$DC = \tfrac{1}{2}q$$

hoc est, recta HD est æqualis coëfficienti dimidio termini tertii & DC coëfficienti dimidio quarti, secundo deficiente, quemadmodum habet regula *Cartesii*.

Non aliis hic utimur artificiis, quam quibus usi sumus in determinanda tangente sectionum conicarum juxta methodum *Cartesii* (§. 410. 440. 491. *Analys.*) *Cartesio* itaque constructio *Menechmi*, qua utitur in inveniendis duabus mediis continue proportionalibus inter duas rectas, ansam dare potuit inveniendi regulam construendi æquationes cubicas, in quibus secundus terminus deficit, & artificia ipsi familiaria, quibus hic utitur, animum avertere potuerunt ab idea constructionis per combinationem duorum locorum in constructione *Menechmi* contenta, ad quam eundem advertit *Slusius*, ut adeo certo asseverari non possit, methodum *Slusianam* cognitam jam fuisse *Cartesio*, & eadem hunc pervenisse ad regulam suam. Quicquid sit, utile tamen est tyronibus perpendisse, quomodo inventum *Menechmi* analytice expensum & ideam constructionis æquationum superiorum per combinationem duorum locorum, &

ansam

ansam inveniendi regulam construendi æquationes cubicas, in quibus secundus terminus deficit, ad biquadraticarum constructionem deinceps extensam, præbere potuerit, siquidem ad tertium cognitionis gradum adspirant. Quoniam ex qualibet æquatione secundus terminus auferri potest (§. 343. *Analyſ.*) & hoc pacto æquationes cubicæ omnes reducuntur ad tres casus (§. 345. *Analyſ.*); regula *Cartesii*, quæ secundum terminum deficere supponit, omnibus omnino æquationibus cubicis construendis sufficit, etsi haud difficile sit eandem quoque extendere ad eas æquationes, quæ secundum terminum habent, quemadmodum operose ostendit *Bakerus*, nos brevius docuimus (§. 622. *Anal*,). Cur vero methodum *Slusianam* præferamus regulæ *Cartesianæ* a *Bakero* extensæ, rationem reddimus in scholio probl. 245. (§. 608. *Analyſ.*).

§. 220. Notandum vero est, quod constructiones æquationum cubicarum & biquadraticarum vere analyticas tradiderimus, ut adeo in iis industriam suam utiliter exerceant, qui ad tertium cognitionis gradum adspirant. Tanta autem perspicuitate doctrinam hanc exposuimus, ut, qui in anterioribus industriam suam desiderari non fuerunt passi, nihil prorsus difficultatis sentiant. Inprimis autem hinc discere licet, quomodo tollatur omnis difficultas, quæ ex nimis longa rerum meditandarum serie nascitur. Quamobrem huc animum advertant, quotquot meditationibus longis adsuescere voluerint. Quod qui faciunt, hunc utique percipient fructum, ne longitudine meditationum defatigentur. Id tantummodo adhuc monemus tyrones, ut, ubi locus construendus, formula generalis, cum qua particularis data conferenda, ex superioribus exscribatur & eidem æquatio localis construenda subscribatur, ut termini comparandi sibi invicem respondeant. E. gr. in problemate 245. (§. 607. *Anal.*) locus ad circulum est $y^2 + x^2 - cy + bx - ax = 0$. Formulæ igitur generali ea ita subscribitur, quemadmodum hic factum esse vides:

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = 0$$
$$+ \frac{s^2x^2}{q^2} \qquad - \frac{2psx}{q} - m^2$$
$$+ p^2$$
$$y^2 \; * \; + x^2 - cy + bx \; * = 0$$
$$-ax$$

Loca vacua replentur ſtellula, ut appareat, quinam termini ſint nihilo æquales in caſu particulari dato. Hoc nimirum pacto ſtatim videmus, quinam coëfficientes ſint invicem comparandi & quinam poni debeant nihilo æquales, ne ex confuſione oriatur error. Quamvis vero prolixitatis evitandæ gratia non omnia combinavimus loca, quorum æquationes ex æquatione cubica vel biquadratica elicuimus; qui tamen ingenium & induſtriam ſuam exercere voluerint, hoc non inutiliter facient. Ubi vero comparatione æquationum particularium cum formula generali facta valores omnes linearum ad conſtructionem loci requiſitarum fuerunt determinati, oculi convertendi ſunt in ſchema formulæ generali reſpondens & delendæ lineæ, quarum valores reperti ſunt nihilo æquales: ita enim relinquitur ſchema æquationi particulari reſpondens. Quamobrem ſi lineis remanentibus adſcribas valores modo repertos; ſtatim videbis, quomodo locus ſit conſtruendus. Et ubi ſchemata duobus locis reſpondentia inter ſe confers, illico patebit, quomodo unum alteri ſit imponendum, ut lineæ, quæ utrobique eædem ſunt, ſibi mutuo congruant, conſequenter quomodo æquatio data ſit conſtruenda. Hac via ſi incedere volueris, non modo aberit moleſtia, quæ ex nimis diu continuanda meditatione ſuboritur; verum etiam conſtructione ad finem perducta voluptate perfundetur animus, quæ ſtudium Matheſeos continuo magis magisq; tibi commendabit & ardorem in eodem progrediendi accendet. Inprimis etiam ſenſum evidentiæ acquires, ſtatim poſthac animadverſurus, ubi diſtincte perceptis quædam permiſcentur, quæ adhuc confuſe percipiuntur: id quod inprimis uſui eſt extra Matheſin, ubi confuſe perceptorum cum diſtincte perceptis commixtio magis nocet, quam in Matheſi, præſertim iis in caſibus, in quibus intellectus ab imaginatione avocandus totus, ut veritatem liquidam perſpicias. Hoc etiam obti-

obtinebis, ne nimia festinatione te præcipites, & ut inter multos strepitus attentionem conserves, eamque interrumpere possis, quotiescunque volueris, certo semper tramite progressurus, quando visum fuerit, quemadmodum viator recta via incedens ab eadem minime aberrat, nec iter jam emensum repetere tenetur, ubi gradum sistit, quotiescunque libuerit. Neque verendum est, ut diuturna meditatione defatigetur animus & sanitati corporis insidiæ struantur. Non opus est, ut in hisce afferendis multum studii collocemus, quamvis ad singula demonstranda a priori principia suppeditet Psychologia nostra. Qui enim dictis obediens fuerit, in seipso experietur, veritati consentanea esse, quæ dicimus non loquentes nisi experta.

§.221. Quoniam idem problema multis modis construi potest, cum v. gr. eidem æquationi cubicæ satisfaciat non modo cujusvis loci solidi cum loco ad circulum, verum etiam cujusvis loci solidi cum quovis loco solido combinatio; quæri omnino poterat, quænam curvæ sint ceteris præferendæ. *Cartesius* æquationes cubicas & biquadraticas non construit nisi per parabolam & circulum, etsi non ignoraverit, easdem quoque construi posse per ceteras sectiones conicas atque circulum. Videtur utique hoc fecisse, quod æquatio parabolæ & circuli sit simplicior æquationibus ceterarum sectionum conicarum. Cum enim vitium ἀγεωμετρισίας ipsi sit, si æquatio construatur per lineas superioris cujusdam generis, quæ construi potest per lineas generis inferioris veluti si æquatio cubica vel biquadratica construatur per curvas secundi generis, cum construi possint per curvas primi generis; ex ejusdem omnino generis curvis eas præferre debuit, quæ per æquationes simpliciores definiuntur. Recte autem monuit *Newtonus* in constructione problematum geometricorum non respiciendum esse ad æquationes curvarum, sed potius ad earum descriptionem, ita ut hæ præferantur aliis, quæ sunt facilioris descriptionis. Unde ad construenda problemata solida adhibet Conchoidem, etsi ea sit tertii generis. Immo non improbat, si

ſi quis ad datum angulum in data ratione ſecandum utatur cycloide, quæ motu rotæ vel circuli ſuper recta facillime deſcribitur, etſi ea per nullam æquationem algebraicam definiri poſſit. Etſi autem æquationes cubicæ ac biquadraticæ omnes per circulum & parabolam conſtrui poſſint; non tamen ideo conſultum eſt, ut non aliis etiam ſectionibus Conicis in iſtis æquationibus conſtruendis utamur. Etenim ubi problemata algebraice ſolvimus, haud raro incidimus in æquationes locales alterius ſectionis conicæ, quam parabolæ, ut adeo ſua veluti ſponte ſeſe offerat ad conſtructionem, cum parabola demum anxie quærenda eſſet, & per aliam ſectionem conicam, quam parabolam haud raro multo concinnius conſtrui poteſt. Quædam adeo lineæ quibusdam problematis videntur quaſi propriæ, ita ut deſtinentur eorundem conſtructioni, quia pariunt elegantem & ſimpliciorem, ſi linearum rationem habeas, ex quibus datis quæſita determinanda, cum conſtructiones ceteræ evadant intricatiores, & ſchemata pariant confuſa, ſi omnes conſtructiones ſubſidiariæ eidem ſimul inferendæ, nec curva ſupponatur tanquam data, nec lineæ ex coëfficientibus terminorum reperiundæ tanquam jam repertæ.

§. 222. Apud veteres celebrabantur problemata de inveniendis lineis duabus mediis continue proportionalibus inter duas datas & de triſectione anguli. Cum enim per Geometriam elementarem facillime inveniatur media proportionalis inter duas datas, & angulus non minus facile biſecetur per ſolas rectas & circulum ſeu per Geometriam elementarem; veteres primum horum problematum ſolutiones interſectione rectarum & circuli quoque tentarunt, ſed fruſtra. Unde ad conſtructiones per alias lineas curvas confugiendum tandem erat. Quamobrem noſtrum quoque erat, ut conſtructiones æquationum cubicarum & biquadraticarum illuſtraturi horum inprimis problematum rationem haberemus. Diſtinxerunt vero ideo veteres problemata in plana, ſolida & linearia. Plana appellarunt, quæ per rectas & circu-

circulum construi possunt, quia hæ lineæ supponuntur in plano descriptæ; solida, ad quorum constructiones adhibendæ sunt sectiones conicæ, quæ, cum per coni dati sectionem prodeant, tanquam in solido datæ supponuntur. Cumque præter rectam, circulum & sectiones conicas lineas alias in Geometriam recipere nollent, problemata plana & solida sola geometrica appellarunt, quemadmodum etiam lineas istas solas geometricas dixerunt. Per alias vero lineas construenda problemata mechanica vocarunt, ipsasque, quarum ope construuntur, lineas mechanicas nuncuparunt. Ast *Cartesius* connubium Arithmeticæ cum Geometria introducens, cum videret sectiones conicas per æquationes definiri posse algebraicas, & præter eas dari curvas innumeras alias, quæ per istiusmodi æquationes definiuntur, hasce omnes illis æquiparavit & in Geometriam recipiendas esse intulit, in numerum mechanicarum rejectis, quæ æquationes istiusmodi respuunt. Invento autem calculo differentiali, cum curvæ *Cartesio* mechanicæ dictæ non minus per æquationes differentiales definiantur, quam ceteræ per ordinarias & ad constructiones problematum utilissimorum adhibeantur, quemadmodum in Mechanicis videbimus, his quoque aditus, in Geomemetriam factus. Unde multo amplior evasit speculationum geometricarum campus, qui a veteribus intra nimis arctos limites coërcebatur. Sane inventa longe præclarissima ex Mathesi exularent, si recentiores Geometræ vestigiis vel veterum, vel *Cartesii* insistere voluissent.

§. 223. Non omnia problemata per rectam & circulum construi posse, inventio duarum linearum mediarum continue proportionalium inter duas datas & trisectio anguli docuit, & ex æquationibus algebraicis, ad quas ducunt solutiones problematum, patet ratio. Quemadmodum enim æquationum quadraticarum constructio pendet ab invenienda una linea media proportionali inter duas alias quomodocunque datas; ita constructio cubicarum supponit duas medias continue proportionales, constructio biquadra-

ticarum tres inveniendas & ita porro. In æquationibus puris hoc ipsum obvium est; in affectis non minus ostendi potest. Sufficiat nobis in gratiam tyronum id ostendisse in æquationibus puris. Æquatio quadratica pura est $x^2 = ab$. Patet hic esse $a : x = x : b$
adeoque constructurus æquationem invenire debet mediam proportionalem inter a & b.

Æquatio cubica pura est

$$x^3 = a^2 b$$

adeoque $x^4 = a^2 b x$

$$a^2 : x^2 = x^2 : b x$$

sit $b x = y^2$

erit $x : y = y : b$

& $a^2 : x^2 = x^2 : y^2$

$$a : x = x : y = y : b$$

Igitur $a . x . y . b$ sunt continue proportionales. Æquationem ergo cubicam puram constructurus invenire debet duas medias continue proportionales inter datas a & b, quarum prima x est radix æquationis cubicæ puræ.

Similiter æquatio biquadratica pura est

$$x^4 = a^3 b$$

Quare $a^3 : x^3 = x : b$

$$= x^3 : bx^2$$

sit $bx^2 = y^3$

erit $a^3 : x^3 = x^3 : y^3$

$$a : x = x : y$$

& $x^2 : y^2 = y : b$

$$= y^2 : by$$

sit $by = z^2$

erit $x^2 : y^2 = y^2 : z^2$

$$x : y = y : z$$

& $y : z = z : b$

Habemus adeo

$$a : x = x : y = y : z = z : b$$

consequenter $a . x . y . z . b$ sunt continue proportionales & æquationem biquadraticam puram constructurus invenire debet tres medias continue proportionales inter duas datas a & b, quarum prima x est radix æquationis. Intersectio rectæ & circuli nonnisi unam exhibet lineam mediam continue proportionalem inter duas. Quamobrem si plures inveniendæ supponuntur, sola rectæ ac circuli intersectione obtineri minime possunt. Hinc duarum inventio deduxit *Menechmum* ad intersectionem duarum parabolarum, quemadmodum vidimus supra (§. 218.).

§. 224.

§. 224. Forsan autem non inutile erit, si hic exemplo aliquo ostendamus, quomodo inventio duarum linearum mediarum continue proportionalium ad æquationes cubicas affectas deducat, ne quæ de extremis quomodocunque datis diximus obscura videantur, nec satis a tyronibus intelligantur. Sit igitur problema tale: *Data quatuor quantitatum continue proportionalium prima & differentia quartæ a secunda; invenire singulas.* Resolutio hæc erit.

Sit Quant. I. $= a$ Quant. II $= x$
Differ. II & IV $= b$ III $= y$
erit IV $= x - b$

& per conditionem problematis

$$a : x = x : y \qquad a : x = y : x - b$$

$$x^2 = ay \qquad xy = ax - ab$$

$$\frac{x^2}{a} = y \qquad y = \frac{ax - ab}{x}$$

adeoque

$$\frac{x^2}{a} = \frac{ax - ab}{x}$$

$$x^3 = ax^2 - a^2 b$$

$$x^3 - ax^2 + a^2 b = o$$

Videmus itaque constructionem æquationis cubicæ affectæ dependere ab inventione duarum mediarum proportionalium inter duas extremas, quarum prima simpliciter datur, altera autem per differentiam a prima mediarum. Ad constructionem vero sese offerunt æquatio ad parabolam $x^2 - ay = o$, & æquatio ad hyperbolam intra asymptotos $xy - ax + ab = o$. Cum vero etiam sit $x : y = y : x - b$ adeoque $y^2 = x^2 - bx$, consequenter $y^2 - x^2 + bx = o$; loco hyperbolæ intra asymptotos offert etiam sese hyperbola æquilatera.

Eodem modo ex sequente problemate liquet, quomodo inventio unius mediæ proportionalis ducat ad æquationem quadraticam affectam. Scilicet *data quantitatum continue proportionalium prima & differentia tertiæ a secunda, invenienda sit secunda.* Sit itaque

Quantitas I $= a$ Quant. II $= x$
Differ. II & III $= b$ erit III $= x - b$

adeoque per conditionem problematis

$$a : x = x : x - b$$

$$x^2 = ax - ab$$

$$x^2 - ax + ab = o$$

Non sine ratione addimus exemplum æquationis quadraticæ affectæ, propterea quod harum

æquationem constructionum reduximus ad inventionem linearum reciprocarum (§. 265. *Anal.*), ne existiment tyrones veritati consentaneum non esse, quod eadem pendeat ab inventione mediæ proportionalis inter duas extremas quomodocunque datas. Poterant casus omnes æquationum cubicarum per inventionem duarum, casus vero omnes æquationum biquadraticarum per inventionem trium mediarum continue proportionalium illustrari, siquidem prolixioribus esse licuisset.

§. 225. Doctrina de numeris irrationalibus illustratur problemate 259 (§. 630. *Anal.*), in quo ostendimus, quomodo numerus irrationalis quicunque per lineam exprimatur, ut intelligatur, cur veteres quantitates irrationales non in numeris, sed in continuo considerarent, unde oriuntur, adeoque eas ad Geometriam retulerint. Attentionem denique meretur usus constructionis æquationum ad curvas datarum per combinationem locorum, cum hoc pacto ope curvarum inferioris generis construi possint curvæ superioris, quemadmodum ope parabolæ & circuli construximus parabolam cubicam & circulum secundi generis. Etsi enim hæ constructiones sint molestiores, quam ut in usum recipiantur; sufficit tamen quod per easdem in curva, quæ descripta supponitur, quodvis punctum datum ad examen revocari possit, num rite fuerit determinatum, & saltem ex possibilitate constructionis pateat curvæ possibilitas.

§. 226. Satis ostendimus, quomodo in Elementis nostris Analyseos finitorum versari debeat, qui artem hanc intimius perspicere sibique familiarem reddere voluerit, quamvis longe plura annotare poteramus, si singula accuratius perpendenda proponere visum nobis fuisset, nec acquiescere voluissemus in speciminibus, quæ in aliis imitari poterit attentione sufficiente usus. Restat igitur ut doceamus, quomodo in Analysi finitorum sit versandum. Initio tyrones non scrupulosiores esse debent in notione quantitatis infinite parvæ expendenda, modo notent eas non in se esse nihilum, sed tantummodo respectu aliarum

rum pro nihilo haberi: quo facit Scholion def. 2. (§. 5. *Analyſ. infin.*). Quodſi enim difficultates quædam ſuperſunt, quæ aſſenſum remorantur; eædem in progreſſu evaneſcent: tollentur autem penitus, ubi ea perpenderis, quæ in Methaphyſicis de ente infinito Mathematicorum imaginario demonſtrantur (§. 796. & ſeqq. *Ontol.*) Dudum Mathematici ex differentiis quæſivere quadrata & cubos, quemadmodum docuimus in applicatione calculi literalis ad Arithmeticam (§. 81 & ſeqq. *Anal.*). Inventum hoc anſam dedit *Leibnitio* inveſtigandi methodum ex differentiis colligendi terminos ſeriei cujuscunque continue creſcentis, vel decreſcentis, cum ignoraret, id jam in literas fuiſſe relatum a D. *Mouton*, Canonico Lugdunenſi, ex obſervatione *Franciſci Regnaldi*, Lugdunenſis, quemadmodum conſtat ex epiſtola *Leibnitii* ad *Oldenburgium* ſcripta, quæ legitur in Commercio epiſtolico D. *Joannis Collins* & aliorum de Analyſi promota juſſu Societatis Regiæ Britannicæ in luc m edito, p. 32 & ſeqq. Calculum adeo differentialem primum exercuit in numeris; ubi differentiæ ſunt finitæ ſeu aſſignabiles. Cum deinde opus præclarum de Quadratura circuli & ſectionibus Conicis *Gregorii a S. Vincentio* ab *Hugenio* ſibi commendatum legeret, in quo differentiæ magnitudinum infinite parvæ conſiderantur, quarum ſummæ exhibent ipſas magnitudines; hæc obſervans in calculum differentialem incidit, de quo hic nobis ſermo eſt, methodo *Cavaleriana*, qua feliciſſime uſus *Gregorius a S. Vincentio*, ad calculum perducta. In hoc calculo omnia pendent a differentiatione rectanguli xy. Quamobrem ad eam omnem attentionem afferre debent tyrones, ne in ceteris ſuperſit ulla difficultas. Etenim ſi ſupponas, quomodo differentiale rectanguli xy inveniatur, nullo negotio cetera erues per Algebram communem, quemadmodum oſtendimus tum in ipſo probl emate primo n. II & ſeqq. tum in problemate ſecundo atque tertio. Conſtat lineam generari motu continuo puncti ab uno termino ad alterum, qualis eſt motus li quidifluentis; unde a *Newtono* appellatur *Fluxus*. Con-

ſtat etiam ſuperficies iſtiusmodi motu linearum, ſolida vero modu ſuperficierum gigni. Quodſi ergo ad geneſin magnitudinum animum advertas; per ea, quæ ab *Euclide* & *Archimede* demonſtrata ſunt (§. 5. *Anal. infin.*), animadvertes, magnitudines creſcere vel decreſcere per incrementa vel decrementa inaſſignabilia, quæ ipſæ ſunt quantitates infinite parvæ, cum quibus hic nobis negotium eſt, a *Newtono* ad geneſin magnitudinum reſpiciente *Fluxiones* appellatæ; quemadmodum ipſas magnitudines, quæ hoc modo creſcunt vel deſcreſcunt, *Fluentes* vocat. Unde quantitatem differentiare ſtylo *Newtoniano* eſt invenire fluentis datæ fluxionem. Ut hæc rectius intelligantur, perpendant velim tyrones, ſi recta quædam AB juxta ductum alterius rectæ AC motu ſibi ſemper parallelo atque æquabili moveatur deorſum, dum interea punctum quoddam motu quomodocunque accelerato in ipſa recta AB a termino A verſus alterum B progreditur; punctum deſcribet lineam curvam AM, recta vero ſpatium curvilineum APM. Quodſi ponamus rectam ex P pervenire in *p*, adeoque abſciſſam AP augeri incremento P*p*; evidens eſt eodem, quo hoc accidit, momento ſemiordinatam PM augeri incremento *m*R, arcum AM incremento M*m*, & ſpatium curvilineum APM incremento P*pm*M. Arcus adeo AM differt ab arcu A*m* arculo M*m*, ſemiordinata PM a ſemiordinata *pm* particula *m*R, ſpatium curvilineum ſive area APM ab area A*pm* particula P*pm*M dum differentia abſciſſæ AP ab abſciſſa A*p* eſt P*p*. Unde ſtylo *Leibnitiano*, ſi in tempuſculo infinite parvo incrementum P*p* eſt inaſſignabile, hoc ipſum incrementum P*p* dicitur differentiale abſciſſæ A*p*, *m*R differentiale ſemiordinatæ PM & M*m* differentiale arcus AM & tandem P*pm*M differentiale areæ APM: ſtylo autem *Newtoniano* P*p* abſciſſæ, *m*R ſemiordinatæ, M*m* arcus, P*p*M*m* areæ fluxio eſt. Atque adeo patet, cur calculus differentialis ſeu methodus fluxionum in Geometria ſublimiori tantæ ſit utilitatis: id quod ex ejus applicatione clarius elueſcet. Incrementa abſciſſæ P*p* generantur motu æquabili, adeoque æquali tempore ſive tempuſcu-

Tab. III. Fig. 32.

pusculo æqualia sunt: ast cum incrementa semiordinatæ *m*R eodem tempusculo generentur motu inæquabili & incrementa lineæ curvæ sive arcus M*m* atque areæ P*pm*M motu mixto ex æquabili & inæquabili, singula inæqualia esse debent. Unde liquet in hoc calculo magnitudinis unius incrementum sumi ut æquale, dum reliqua inæqualia sunt, quæ simul generantur. Non autem necesse est, ut abscissa ponatur crescere per incrementa æqualia; sed sumi etiam possunt momentanea incrementa magnitudinis alterius tanquam æqualia, quo casu abscissa crescit per inæqualia incrementa. Ponamus enim rectam AC æquabiliter moveri motu sibi semper parallelo juxta ductum rectæ AB, dum interea punctum motu continuo accelerato in illa descendit; patet incrementa Q*q* sive R*m* eodem tempusculo æqualia esse debere, dum interea incrementa S*m* sive P*p* inæqualia gignuntur. Hactenus dicta qui perpendit, is non modo animadvertet calculum differentialem niti methodo genetica & rigorem acquirere ex demonstratis ab *Euclide* & *Archimede* (§. 5. *Anal. infin.*); verum etiam in applicatione hujus calculi ad Geometriam sublimiorem nihil deprehendet obscuritatis.

Tab. III. Fig. 33.

§. 227. Ope calculi differentialis tangentes curvarum facillime determinantur hancque methodum non modo ad omnes curvas algebraicas extendi patet ex formula generali, quam dedimus (§. 32 *Anal. infin.*), verum etiam eandem ad alias curvas, quæ mechanicæ non sunt, applicari posse exemplo spiralium, cycloidis, Logarithmicæ & Quadratricis *Dinostratis* docuimus. Non opus hic est perplexis longisque calculis, nec methodum hanc irrationales quantitates remorantur, ut adeo nihil in eadem desiderari possit. Tota nititur ratione differentialium semiordinatæ ac abscissæ quæ sunt inter se in ratione semiordinatæ ad subtangentem, quemadmodum in resolutione probl. 4. (§. 29. *Anal. infin.*) demonstravimus. Quoniam enim quantitatibus proportionalibus infinite parvis substitui possunt aliæ finitæ, valor subtangentis, qua tangens determinatur, ex quantitatibus assignabilibus

libus componitur. Artificio hoc usus est *Barrowius* in sua Tangentium methodo: quod ut appareat, exemplo parabolæ Apollonianæ perfacili docere lubet.
Tab. III. Fig. 34. Sit QN $= y$, AQ $= x$, PT $= t$. Sit semiordinata alia PM, & ei respondens abscissa AP, differentia earundem semiordinatarum adeo exigua, quantum desideratur, & differentiæ abscissarum MR exiguæ parvitatis. Sit PQ $=$ MR $= e$, NR $= a$; erit PM $= y - a$ AP $= x - e$. Si parameter parabolæ fuerit p; habebimus

$$y^2 - 2ay + a^2 = px - ep$$

$$\& \; y^2 = px$$

adeoq; $-2ay + a^2 = -ep$

$$2ay = ep, \; ob \; a^2 = o.$$

Est vero $e : a = t : y$

& $e : a = 2y : p$

adeoq; $t : y = 2y : p$

$$t = 2y^2 : p$$

Nemo non videt, si pro a substituas dy, & pro e ponas dx, prodire $2y\,dy = p\,dx$ & $t = \frac{ydy}{dx}$.

Unde resultat $t = \frac{2y^2}{p}$: Methodus itaque *Barrowiana* tangentium a præsenti, quam proponimus, non differt, & calculus, quo utitur *Barowius*, non differt a calculo differentiali nisi characteristica. Hæc sane ratio est, cur *Jacobus Bernoulli* primum existimaret calculum differentialem *Leibnitii* non differre a *Barrowiana* & DN. *de Tschirnhausen* contenderet, calculum differentialem *Barrowiano* ortum suum debere, præsertim cum *Leibnitius*, ubi eundem in Actis Eruditorum primum publicavit, non nisi ad methodum de maximis & minimis, quæ specialis casus est methodi tangentium, applicaret. Enimvero cum usus calculi differentialis in problematis magis arduis solvendis conspiceretur, aliter de eodem sentire cœperunt Geometræ, ipse etiam *Hugenius*, qui sibi persuadebat aliis methodis detecta tantummodo aliter exprimi hoc calculo.

§. 228. Methodus *Barrowiana* nititur artificiis *Cartesii* in determinanda tangente curvarum & principiis Geometriæ indivisibilium *Cavallerii* atque Algebræ ordinariæ. Etenim si curva AMNO secatur recta TO, erit Tab. III. Fig. 25.

erit NR: MR = PM, TP, quemadmodum demonstravimus in resolutione probl. 4. (§. 20.). Quamobrem si sit NR = a, MR = e, PM = y, TP = t. erit $a : e = y - ta : t$, & *e*. gr. *ex natura* parabolæ, cujus parameter p,

$$y^2 = px$$
$$y^2 - 2ay + a^2 = px - ep$$
$$- 2ay + a^2 = o - ep$$

Quodsi semiordinatæ PM & QN continuo propius ad se invicem accedant, ut differentiæ semiordinatarum NR & abscissarum MR sive PQ tandem degenerent in partes infinite parvas seu momentanea incrementa, recta MN degenerat in arculum cognominem, TN degenerat in tangentem & TP in subtangentem. Tum vero ex principiis Geometriæ indivisibilum $a^2 = o$ respectu $2ay$ & ep, & $y - a$ atque y habentur pro æqualibus in contactu. Unde habemus:

$$- 2ay = - ep$$
seu $$2ay = ep$$
& $$a : e = y : t$$
quemadmodum ante (§. 227).

Ad methodum *Barrowianam* si applicatur vera characteristica infinitesimarum seu quantitatum infinite parvarum, sine qua algorithmus infinitesimalis non subsistit, qui est ipse sic dictus calculus differentialis, prodit methodus tangentium, quam hic applicamus. Ope autem hujus calculi non modo expedita redditur, verum etiam extenditur, ut ultimum suum complementum ab eodem accepisse dicenda sit. Obiter hic annotamus, quando quæstio est de inventore calculi differentialis, id potissimum quæri, quinam primus Algorithmum quantitatum infinite parvarum invenerit, & in solvendis problematis exercuerit, cum antea adhiberetur calculus literalis communis & vi principiorum Geometriæ indivisibilium termini quidam expungerentur respectu ceterorum evanescentes. Similis quodammodo est hæc quæstio alteri communi, qua quæritur, quinam sit inventor veræ characteristicæ numerorum & Algorithmi communis, quo hodie utimur in Arithmetica tanta calculi commoditate & amplitudine. Habuere veteres numerorum signa, sed parum apta. Usi iisdem sunt in Arithmetica practica. Non tamen ideo dici potest, quod habuerint veram numerorum charaste-

racteristicam, & Arithmeticam practicam talem, qualem nunc habemus, nec quisquam hodie inventis notis numericis, quorum significatus ex ipsa numerorum natura deductus, aliis quam hisce signis uti vult: quemadmodum nec hodie inventa vera characteristica quantitatum infinite parvarum, qua calculus infinitesimalis in Analysin introductus, ut per modum Algorithmi exerceri possit, quisquam calculum literalem communem adhibere mavult in solvendis problematis, quorum solutio a quantitatibus infinite parvis pendet. Equidem ex ore ipsius DN. *de Tschirnhausen* hausi, quod contenderet, se per Algebram communem eadem præstare posse, quæ per calculum differentialem adeo feliciter eruuntur, nec calculum hunc esse veram methodum, sed tantummodo veræ methodi compendium, qualia complura, immo, ut ipse confidenter admodum loquebatur, infinita excogitari possint, hocque sese ostensurum in secunda parte Medicinæ Mentis; nunquam tamen dictis fidem fecit, quin potius morti vicinus Schedas suas MSC. Vulcano tradidit, ne publicum statueret, quo successu in vera, quam pollicebatur, methodo detegenda fuerit versatus & quousque fuerit progressus. Constat autem ex iis, quæ dedit in Actis Eruditorum, quod nimia in se ipsum confidentia de iis, quæ animo versabatur, locutus fuerit, quasi a se jam essent inventa, etsi re penitius examinata impossibilia deprehenderentur. Ostendi in Arithmetica, calculum numerosum ita institui posse, ut conservetur universalitas, quemadmodum in literali, & hoc pacto inveniri per calculum numerosum, quæ per literalem eruuntur. Ostendi superius, quomodo Algebra numerosa ad solvenda problemata geometrice applicari possit, ut prodeant formulæ algebraicæ geometrice construendæ (§. 194). Immo ostendi, quomodo retenta communi linearum designatione regulæ Algebræ ad solutiones problematum geometricorum applicari potuerint (§. *cit.*). Ecquis vero dixerit, si quis hoc fecisset, ante inventam Arithmeticam literalem, eum jam habuisse Algorithmum universalem & Algebram speciosam? Immo si hanc methodum ad tra-

ctandas

ctandas curvas adhibuisset, ecquis dixerit, eum habuisse methodum *Cartesii* tractandi curvas per æquationes algebraicas? Habuisset similem quandam methodum, sed non eandem, ut adeo in multis paria præstare potuisset, ast non eadem facilitate. Ars characteristica differt a methodo & pro illius diversitate hæc prorsus aliam induit formam, ita ut non modo facilius præstentur, quæ fieri debent, verum etiam plura in potestate sint, quam si alia characteristica adhiberetur. Patebunt hæc clarius, ubi Ars inveniendi ad formam artis fuerit redacta, quemadmodum Logica & qui ad diversitatem methodorum, prouti hæ per artem characteristicam modificantur, animum adverterit, prouti in hac commentatione inculcamus, eadem per spiciet. Talia autem observasse non tantum proderit ei, qui artem inveniendi ad formam artis reducere voluerit; sed etiam qui in Mathesi addiscenda ad tertium cognitionis gradum adspirat, ut methodos, quæ ipsi innotuerunt, limare iisdemque omnem suam amplitudinem tribuere possit, quam suscipere valent, ne a casu expectandum sit, quod artis est, usu facultatum huc requisito non occasione sponte oblata, sed ex scientia determinato, nec tentaminibus subjiciatur, quod certa lege regitur. Nihil hic asserimus, quod non obvium sit ei, qui in Mathesi addiscenda præscripto a nobis modo fuerit versatus. Multa hic annotare poteramus, siquidem prolixioribus esse liceret, nec a præsenti instituto digressio longior videretur aliena.

§. 229. Notandum vero est, formulas algebraicas, quæ pro subtangente prodeunt, geometrice esse construendas, siquidem tangentem curvæ actu ducere volueris. Omittimus istas constructiones brevitatis gratia, propterea quod in Analysi finitorum satis perspicue docuimus, quomodo istiusmodi fomulæ construantur. Tyronibus tamen, quorum est exercere artem, eædem negligendæ non sunt. E. gr. subtangens ellipsis est $\frac{ax - x^2}{\frac{1}{2}a - x}$ (§. 25. *Anal. infin.*). Est itaque Tab. III. Fig. 16.
$\frac{1}{2}a - x : a - x = x : PT$
h. e. $PC : PB = AP : PT$. Quodsi

Quodsi ergo fiat PQ = PC & PR = PB, ductæque rectæ AQ agatur parallela TR; erit

$$PQ : PR = AP : PT$$

h. e. $PC : PB = AP : PT$

adeoque subtangens PT rite determinata, consequenter TM tangens quæsita.

Quoniam subtangens pro omnibus ellipsibus in infinitum $\frac{(m+n)(ax-x^2)}{ma-mx-nx} = \frac{ax-x^2}{ma:(m+n)-x}$ habemus:

$$\frac{ma}{m+n} - x : a - x = x : PT$$

Patet itaque non absimili modo tangentem pro omnibus ellipsibus in infinitum determinari posse. Et quia pro circulo eadem subtangentis formula reperitur, quæ pro ellipsi *Apolloniana*, & pro infinitis circulis eadem formula, quæ pro ellipsibus infinitis, nisi quod isthic $n = 1$; eodem etiam modo tangens omnium circulorum in infinitum determinatur. Immo cum formula subtangentis hyperbolarum a formula subtangentis ellipseos non differat nisi signis, tangens etiam hyperbolarum in infinitum non absimili modo determinatur. Subtangens curvæ, quæ definitur per æquationem $y^3 - x^3 = axy$, est

$$\frac{3y^3 - axy}{3x^2 + ay} = \frac{y^3 - \frac{1}{3}axy}{x^2 + \frac{1}{3}ay}.$$

Habemus itaque

$$x^2 + \tfrac{1}{3}ay : y^2 - \tfrac{1}{3}ax = y : PT$$

$$\frac{x^2}{\frac{1}{3}a} + y : \frac{y^2}{\frac{1}{3}a} - x = y : PT$$

Quantitates $\frac{x^2}{\frac{1}{3}a} + y$ & $\frac{y^2}{\frac{1}{3}a} - x$ concinna admodum constructione reperiuntur hunc in modum. Tab. III. Fig. 37. Fiat $CA = \frac{1}{3}a$, sitque $AP = x$, $PM = y$. Erigatur in A perpendicularis AN ipsi PM æqualis, seu construatur parallelogrammum rectangulum AP MN. Ducta recta CN erigatur ad eandem perpendicularis NR. Erit $PR = \frac{y^2}{\frac{1}{3}a} - x$. Est enim

$$CA : AN = AN : AR$$

$$\tfrac{1}{3}a : y = y : \frac{y^2}{\frac{1}{3}a}$$

$$\text{Ergo } PR = AR - AP = \frac{y^2}{\frac{1}{3}a} - x,$$

Fiat porro AO = CA, ductaque OP erigatur PS ad eandem perpen-

pendicularis occurrens ipſi NA ultra rectam CP continuatæ in S. Erit $NS = \frac{x^2}{\frac{1}{3}a} + y$. Eſt enim

$$\begin{aligned} AO &: AP = AP : AS \\ \tfrac{1}{3}a &: x = x : \frac{x^2}{\frac{1}{3}a} \end{aligned}$$

Ergo $NS = SA + AN = \frac{x^2}{\frac{1}{3}a} + y$.

Quodſi curva ſupponatur data ſeu in plano deſcripta, datis jam NS & PR ſubtangens nullo negotio determinatur.

§. 230. Quoniam normalis ad tangentem perpendicularis, tangens quoque determinatur per normalem, conſequenter etiam per ſubnormalem, per quam normalis determinatur. Subinde ſubnormalis per conſtructionem faciliorem reperitur, adeoque præſtat tangentem determinare per normalem, quam per ſubtangentem. Exemplum habemus in circulo, ubi radius ad tangentem perpendicularis, quemadmodum per præſentem quoque methodum calculo eruitur (§. 38. *Anal. infin.*), vi cujus ſubnormalis reperitur diſtantiæ ſemiordinatæ a centro æqualis, adeoque datur data abſciſſa, cum ſubtangens eandem requirat conſtructionem, quam Ellipſis exigit (§. 229.). Enimvero ſubinde etiam ſubnormalis poſtulat conſtructionem magis compoſitam quam ſubtangens; ſubinde utraque eadem ſimplicitate gaudet. Illius exemplum præbet ellipſis; hujus vero curva, ad quam eſt æquatio $y^3 - x^3 = axy$. Etenim in Elllipſi eſt (§. 40. *Anal. infin.*

$$\begin{aligned} ax - x^2 &: y^2 = \tfrac{1}{2}a - x : PH \\ a - x &: \frac{y^2}{x} = \tfrac{1}{2}a - x : PH \end{aligned}$$ Tab. III. Fig. 38.

Fiat itaque $AQ = PM = y$, & in Q erigatur perpendicularis QN rectæ per A & M ductæ in N occurrens, erit $QN = \frac{y^2}{x}$.

Eſt enim

$$\begin{aligned} AP &: PM = AQ : QN \\ x &: y = y : \frac{y^2}{x} \end{aligned}$$

Continuetur PM in O, donec PO = QN, & ex centro C ducatur recta RC ipſi OB parallela, erit PR ſubnormali æqualis. Eſt enim

$$\begin{aligned} PB &: PO = PC : PR \\ a - x &: \frac{y^2}{x} = \tfrac{1}{2}a - x : PR \end{aligned}$$

 Quare

Quare si fiat PH = PR, habebis subnormalem, eritque HM normalis quæsita. Hanc constructionem si cum ea conferre volueris, quam pro subtangente dedimus (§. 229.); patebit eam esse magis compositam. Subnormalis curvæ, quæ definitur per æquationem $y^3 - x^3 = axy$ reperitur $= \frac{x^2y + \frac{1}{3}ay^2}{y^2 - \frac{1}{3}ax.}$

Habemus itaque

$$y^2 - \tfrac{1}{3}ax : x^2 + \tfrac{1}{3}ay = y : PH$$
$$\frac{y^2}{\frac{1}{3}a} - x : \frac{x^2}{\frac{1}{3}a} + y = y : PH$$

Analogia hæc ab altera, quam pro subtangente elicuimus (§. 229.), non differt, nisi quod termini in ratione priori invertantur, consequenter constructio eadem fere manet, nec simplicior est pro subnormali, quam pro subtangente.

§. 231. Methodus determinandi asymptotos curvarum nititur principio reductionis. Asymptoti enim considerantur instar tangentium in puncto a vertice infinito intervallo distante, ut abscissa eidem respondens sit infinita, consequenter axis a habeat ad eandem rationem inassignabilem, adeoque fiat respective nihilum. Hanc suppositionem a veritate non recedere, tyrones inde intelligunt, quod in hac hypothesi eruantur eædem quantitates linearum, per quas asymptoti determinantur, quas supra in Analysi finitorum aliter demonstravimus. Novarum enim methodorum examina haberi debent, si applicentur ad jam nota. Ceterum attendant tyrones ad differentiam, quæ inter absolute nihilum seu nihilum verum, & inter respective nihilum seu quod respectu quantitatis alterius pro nihilo habetur, intercedit. Etenim si qua quantitas per absolute nihilum multiplicatur, nihilo æqualis est: sed quæ ducitur in respective nihilum non evadit nihilo æqualis. Hinc (§. 47. *Anal. infin.*) in valore $ax : (a + 2x)$, recta a non quidem auget valorem rectæ $2x$, ut adeo sit $a + 2x = 2x$, attamen non efficit ax nihilo æquale, sed hoc factum spectatur tanquam quantitas a infinities sumta, quia a quantitas finita, x infinita. Idem patet in æquatione $ay^2 = bx(a+x)$, quæ, quia a respective nihilum, reducitur ad æquationem $ay^2 = bx^2$. Unde simul liquet, si sumatur $ay^2 = abx + bx^2$, cur in-

finitum

finitum primi gradus abx habeatur pro nihilo respectu infiniti secundi gradus ay^2 & bx^2, quippe quod infinitum primi gradus infinities superat, quemadmodum infinitum primi gradus quantitatem finitam. Non nego, hæc in numerum fictionum referenda esse; sunt tamen toleranter vera, ut cum *Jungio* loquamur, & in calculo quemadmodum fictiones aliæ utiliter adhibentur. Cavendum itaque, ne in præjudicium veritatis talia in Physicam inferantur principia, ex qua imaginaria exulare debent, quippe ubi in veras phænomenorum causas inquirimus.

§. 232. Attentionem quoque peculiarem meretur problema 7. (§. 49 *Anal. infin.*) in quo subtangens & subnormalis in Conchoide determinatur. Curva hæc ex numero algebraicarum est: unde semiordinatæ ejus sumi possunt ad axem AB normales. Habet vero eadem etiam polum C: unde pro semiordinatis quoque haberi possunt rectæ CM ex polo C ad punctum curvæ M ductæ. Quamobrem duplicem explicamus methodum determinandi ejus tangentem & normalem. Prima eadem est, qua utimur in curvis algebraicis ceteris, nisi quod valor ipsius dx non ex æquatione ad curvam, sed aliis artificiis eruatur, ne formulæ pro subtangente & subnormali prodeant nimis perplexæ, constructionem minus concinnam parientes. Formula autem pro subnormali expeditior est, quam pro subtangente, adeoque in constructione præferenda. Cum enim sit subnormalis $= t + \frac{z^2 - az}{v} = t + \frac{(z-a)z}{v}$; erit

Tab. I. Anal. infin. Fig. 5.

$$v : z = z - a : \frac{z^2 - az}{v}$$

$$PB : MC = QC : \frac{z^2 - az}{v}$$

cui si addatur $PC = t$; prodibit subnormalis. Formula subtangentis $\frac{v(z^2 - t^2)}{z^2 - az + tv} = \frac{z^2 - t^2}{\frac{z^2 - az}{v} + t}$ resolvitur in hanc analogiam:

$$\frac{z^2 - az}{v} + t : z + t = z - t : PT$$

Atque adeo patet, si formula subtangentis construenda, ante inveniendam esse subnormalem.

Data

Data autem subnormali, datur etiam tangens, ut adeo ulteriori constructione non habeamus opus. Altera methodus nititur hypothesi semiordinatarum in puncto quodam concurrentium, quam ideo addere visum est, ut idea ejus animo ingeneretur ad alia profutura.

§. 233. Notanda vero sunt artificia, quibus subtangens determinatur in iis curvis. quarum semiordinatæ in puncto quodam coëunt. Nimirum quia in curvis algebraicis subtangens intercipitur inter tangentem & semiordinatam, in puncto communi concursus excitatur perpendicularis tangentem, cui occurrit, secans, quemadmodum videre est in methodo altera pro conchoide & in methodo pro spiralibus. In Cycloide subtangens determinatur per intersectionem tangentis cycloidis & tangentis circuli genitoris, quia portio illa tangentis intercipitur inter semiordinatam & tangentem cyclodis, etsi ad illam non sit perpendicularis, ut adeo hic a significatu termini tantisper recedatur, quem is in curvis algebraicis habet, quemadmodum etiam non retinetur significatus prorsus idem semiordinatæ, ubi eædem in puncto quodam concurrunt. Nimirum definitiones terminorum inventæ sunt pro curvis algebraicis; deinceps per analogiam quandam aptantur ad curvas alias termini, ut in iisdem proprias sibi nanciscantur definitiones. Absit itaque, ut tibi persuadeas, ipsos Geometras alere significatum terminorum vagum. Ita *subtangentem cycloidis* definire licet per portionem tangentis circuli in puncto intersectionis circuli & semiordinatæ cycloidis inter semiordinatam & tangentem cycloidis interceptam, & cum definitiones nominales sint arbitrariæ, utique hoc facere licet. Nec ideo dicere licet, quod vocabulum *Subtangens* varios habeat significatus. *Subtangens* enim *cycloidis* non est subtangens curvarum simpliciter ita dicta. In Quadratrice *Dinostratis* abscissa sumitur in circulo genitore & portio radii quadratricem secantis pro semiordinata. Quoniam hic recta ad semiordinatam perpendicularis cum tangente in puncto contactus concurrit quæ adeo extra ipsum eam non secat, ideo necessarium fuit, ut

eo,

eo, quem explicavimus (§. 55. *Anal. infin.*) modo determinaretur. Ad hoc animum probe advertere debent tyrones, ne notione ſubtangentis confundantur, ubi ipſimet tangentes in curvis non algebraicis determinare voluerint.

§. 234. Methodus de maximis & minimis nititur principio reductionis: maximæ enim & minimæ applicatæ reducuntur ad caſum tangentium. Et ſimiliter applicatio hujus methodi ad problemata particularia eodem principio nititur, quatenus quantitatum ſeries ad certum quendam terminum continuo creſentium vel decreſcentium, deinceps rurſus decreſcentium vel creſcentium exponitur per ſemiordinatas curvæ cujusdam algebraicæ, in qua ſemiordinatæ eandem conſtantem relationem habent ad abſciſſas, quæ convenit quantitatibus creſcentibus vel decreſcentibus. E. gr. Si linea recta ita ſecanda, ut rectangulum ex ſegmentis ſit maximum eorum, quæ hac ratione conſtrui poſſunt, conſtans relatio quantitatis continuo creſcentis usque ad terminum maximum exprimitur per factum ſegmentorum in ſe invicem. Quamobrem ſi ſegmentum minus ſumas pro abſciſſa; problema hoc reducitur ad circulum, in quo maxima ſemiordinata determinanda.

§. 235. Ut ideam calculi ſummatorii, qui vulgo integralis dicitur, animo concipiant tyrones, repetendum eſt ex ſuperioribus, magnitudines creſcere per momentanea incrementa. Nimirum ſi tempuſculo quodam abſciſſa augetur incremento Pp, ſemiordinatæ accedit incrementum mR, arcui incrementum Mm & areæ incrementum PpmM. Unde ſi Abſciſſa AP $= x$, conſtare concipitur ex infinitis iſtiusmodi incrementis ſucceſſivis, quorum unumquodque indefinite exprimitur per dx, ita ut ſumma omnium dx ſive $\int dx = x$. Similiter ſemiordinata PM $= y$ conſtare concipitur ex infinitis iſtiusmodi incrementis, quorum unumquodque indefinite exprimitur per dy, ita ut ſumma omnium dy ſive $\int dy = y$. Arcus AM $= v$ conſtare concipitur ex infinitis iſtiusmodi incrementis, quorum unumquodque dv, ita ut

Tab. III. Fig. 12.

ut $\int dv = v$ & area APM conſtare concipitur ex innumeris iſtiusmodi areolis, quarum unumquodque, quemadmodum oſtendimus, exprimitur per ydy, ita ut ſumma omnium iſtarum areolarum ſive $\int ydy$ ſit areæ æqualis. Calculo adeo ſummatorio quæritur ſumma omnium incrementorum momentaneorum, ut habeatur magnitudo, cujus incrementum indefnite datur. Quamobrem ſi valor incrementi exprimatur per relationem, quam habet ſemiordinata ad abſciſſam; per ſummationem reperitur valor ſemiordinatæ, arcus & areæ curvæ datæ. E. gr. in parabola $dy = \frac{1}{2} a^{1:2} x^{-1:2} dx$. Quare $\int \frac{1}{2} a^{1:2} x^{-1:2} dx = a^{1:2} x^{1:2} = \sqrt{ax}$ eſt ſemiordinata parabolæ. Similiter in circulo $dy = \frac{1}{2}(a - 2x) dx\ (ax - x^2)^{-1:2}$. Quare $\int \frac{1}{2} (a - 2x)\ (ax - x^2)^{-1:2} dx = (ax - x^2)^{1:2} = \sqrt{(ax - x^2)}$ eſt ſemiordinata circuli. Et in hyperbola intra aſymptotos $dy = ax^{-2}dx$. Quare $ax^{-1} = \frac{a}{x}$ eſt ſemiordinata hyperbolæ intra aſymptotos. Patet adeo per calculum ſummatorium reſtitui quantitatem variabilem, cujus differentiatione prodiit magnitudinis elementum, ſeu momentaneum in ejus geneſi incrementum. Unde Angli methodum fluxionum inverſam vocant, quia ex data fluxione reperitur fluens, quemadmodum per directam ex fluente fluxio. Regreſſus autem iſte non ubivis obvius eſt. Unde hodienum Mathematicorum ingenia exercet. Conſtabit autem ex problematis phyſico-mechanicis, qualia exempli loco in Mechanica dabimus, ſolutiones problematum ſæpe nos deducere ad æquationes differentiales, quarum integratione detegitur natura curvæ, vel ubi hoc fieri nequit ope æquationum differentialium curvæ conſtruuntur. Ope igitur hujus calculi multa in poteſtate ſunt, ad quæ alias non pateret aditus. Ceterum tyrones ad exemplum trianguli, quod primo loco (§. 101. *Anal. infin.*) exhibuimus, animum probe attendant, ut non modo idea methodi quadrandi curvas in eodem naſcatur, verum etiam dubium evaneſcat, quaſi ex neglectu trianguli characteriſtici oriri debeat in ſummatione error aſſignabilis: quod ubi fieret, impoſſi-

possibile erat, ut prodiret area trianguli tanta, quantam esse debere demonstratur in Elementis Geometriæ. Præstantia autem hujus calculi inde elucescit, quod paucis lineis non modo exhibeatur quadratura parabolæ Apollonianæ, sed & omnium parabolarum & curvarum ipsis agnatarum in infinitum, cum methodo Archimedea difficillime eruatur tantummodo prior.

§. 236. Cum nobis proposuerimus exemplis potius docere regulas, quam earum multitudine obruere memoriam tyronum, præceptis omnibus in unum locum congestis, antequam ad exempla accedatur; quæ de quantitate in summatione adjicienda tenenda sunt, exemplo quadraturæ segmenti parabolici inculcare lubuit (§. 107. *Anal. infin.*): ita enim ratio, cur adjicienda veniat, clarius percipitur, manifestior in casu particulari, quam si generalis detur. Ratio nimirum generalis est, quod in differentiatione, cum differentiale quantitatum constantium sit $= o$, quantitates constantes in composita variabilibus adjectæ evanescant, ita ut idem sit differentiale quantitatum $x + a$ atque x, & quantitatum $x - a$ atque x. Est enim & $d(x + a) = dx$, & $d(x - a) = dx$ & differentiale ipsius $x = dx$. Unde in summatione summæ adjiciendum, quod in differentiatione evanuit. Quomodo vero appareat, utrum aliqua quantitas constans sit adjicienda, nec ne, & num ea, quæ adjicienda venit, signum habere debeat positivum, an privativum, in exemplo particulari multo clarius elucet, quam si idem generaliter doceri deberet. Vidimus in doctrina de locis geometricis, initium abscissæ non modo statui posse in vertice A, ubi cum abscissa evanescit etiam semiordinata, evanescit arcus, evanescit spatium curvilineum abscissa, semiordinata & arcu contentum; verum etiam in puncto L infra verticem, vel in puncto N ultra eundem. Per hoc ipsum vero non variatur elementum abscissæ Pp, quod in omni casu idem est. Ne igitur in summatione obscurum sit, quod de quantitate adjicienda hic præcipitur, probe perpendant velim tyrones, quæ in scholio (§. 108. *Anal. infin.*) habentur. Inventores

Tab. II. Fig. 12.

tores talia non animadverterunt, nisi ubi animum ad solutionem particularium applicarunt, neque enim methodi repertæ sunt, nisi dum solutiones problematum tentatæ ad easdem deduxerunt inventores. Quamobrem qui Analysi tertii cognitionis gradus acquirendi gratia operam navat, eadem via incedere debet, quam calcarunt inventores, utut evitentur avia, in quæ haud raro inciderunt, cum in terris adhuc incognitis versarentur, antequam in viam regiam pervenirent. Ea quoque de causa non dedimus nisi particularium problematum solutiones, etsi facillimum fuisset generales huc transcribere. Neque enim existimandum est, generales solutiones fuisse particularibus priores, sed illæ potius ex his enatæ sunt. Plerumque majoris artis est solvere problemata in casu particulari, quam universaliter.

§. 237. Quadraturam parabolarum omnium, immo curvarum aliarum eidem agnatarum in infinitum nullo negotio dari per calculum integralem patet (§. 103. 105. *Anal. infin.*). Curvæ autem ceteræ, quas deinceps quadramus, tum etiam segmenta parabolica, quæ quadrantur, reducuntur ad parabolas, sive elementum per se non integrabile juxta canones generales reducatur ad integrabile, terminis finitis aut nonnisi uno constans, sive resolvatur in seriem infinitam, quæ terminos numero infinitos habet. Etenim in casu priore area curvæ reducitur ad areas tot parabolarum, quot sunt termini, in casu posteriori autem ad areas parabolarum infinitarum, quemadmodum in Geometria elementari figurarum rectilinearum & ipsius circuli areæ reducuntur ad areas triangulorum. E. gr. ubi segmentum parabolicum, cujus elementum est $dx\sqrt{(ab+ax)}$ quadrare jubemur, $dx\sqrt{(ab+ax)}$ reducimus ad $2v^2dv = a$. Quodsi dv sumatur pro differentiali abscissæ & v pro abscissa erit $\frac{2v^3}{a} = z$, adeoque $v^2 = \frac{1}{2}az$. Unde liquet segmentum parabolicum quadrandum reduci ad parabolam externam, cujus parameter est $\frac{1}{2}a$, seu dimidio parametri parabolæ æqualis, cujus segmentum quadrandum. Similiter

liter patet aream curvæ *Carteſii* (§. 111. *Anal. infin.*) eſſe differentiam arearum Parabolæ externæ *Apollonianæ*, ad quam $x^2 = bz$, & Parabolæ externæ ſecundi generis, ad quam $x^3 = b^2 v$. Non abſimili modo patet, in elemento hyperbolæ intra aſymptotos $dx - xdx + x^2dx - x^3dx + x^4dx$ &c. in termino primo ſemiordinatam eſſe $= 1$, in ſecundo $= x$, in tertio ſi $1 = a$ eſſe $x^2 = ay$, in quarto $x^3 = a^2y$, in quinto $x^4 = a^3y$ &c. conſequenter terminum primum eſſe elementum parallelogrammi rectanguli, ſecundum elementum trianguli æquicruri, tertium parabolæ externæ Apollonianæ ſeu primi generis, quartum elementum parabolæ externæ ſecundi generis, quintum elementum parabolæ externæ tertii generis & ita porro in infinitum. Quadratura igitur hyperbolæ reducitur ad quadraturam parallegrammi rectanguli, trianguli æquicruri & infinitarum parabolarum. Inde eſt quod hyperbolæ & circuli quadraturam per infinitas parabolas demonſtraverit *Guido Grandus*. Equidem data hyperbolæ area intra aſymptotos datur etiam area interna inter axem & curvam interjacens; placuit tamen (§. 123. *Anal. infin.*) etiam oſtendere, quomodo area interna quadretur. Enimvero patet quadraturam areæ intra aſymptotos eſſe ſimpliciorem quadratura internæ, in qua $\sqrt{ax}$ ducenda eſt in ſeriem infinitam.

§. 238. Exemplo circuli docuimus (§. 124. *Anal. infin.*) quadraturam non uno modo abſolvi poſſe. Quadravimus enim circulum ex dato ſinu verſo, ex dato ſinu complementi & ex tangente. Notanda hic ſunt artificia, quibus progreſſus terminorum in infinitum redditur conſpicuus: id quod inprimis oſtendimus in quadratura *Newtoniana*. Artificia etſi eadem ſint, quibus jam in Analyſi infinitorum uſi ſumus, ſcilicet ut in numeris conſervetur univerſalitas calculi & ut terminus ſequens efficiatur dependens ab antecedente; applicatio tamen eorundem non ſtatim cuivis ſuccurrit. Unde meminini quosdam ſeriem *Leibnitianam* aut, ſi mavis, *Gregorianam* pro circulo prætuliſſe *Newtonianæ*, quæ tamen citius convergit, ſeu celerius

rius appropinquat, quod illa constantem servet legem, in hac vero termini nulla certa lege progrediantur, etsi *Newtoniana* non modo manifestam legem admittat, qua termini in infinitum progrediuntur, verum etiam hoc habet, ut terminus quilibet sequens ex proxime antecedente inveniri possit. Id potius attentionem tyronum meretur, quod quadratura *Newtoniana* exhibeat quadraturam segmentorum circuli, *Leibnitiana* vero quadraturam sectorum, atque adeo hæc insinuet ideam quadrandi sectores curvarum, quæ centrum habent, animo jam obversata *Archimedi*, dum circuli aream ad aream trianguli reduxit, quemadmodum clarissime docuit *Keplerus* in Stereometria dolii Austriaci. Notandum porro est, quod docuit *Leibnitius* in Actis Eruditorum A. 1682, p. 45. cum termini $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{13}$, $\frac{1}{17}$, &c. itemque termini $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{19}$, &c. progrediantur inprogressione harmonica; aream circuli esse differentiam duarum serierum pro- progressionis harmonicæ. Præterea si binos quosque terminos ad eandem denominationem reducas, quia $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$, $\frac{1}{5}-\frac{1}{7}=\frac{2}{35}$, $\frac{1}{9}-\frac{1}{11}=\frac{2}{99}$, $\frac{1}{13}-\frac{1}{15}=\frac{2}{195}$, $\frac{1}{17}-\frac{1}{19}=\frac{2}{323}$ &c. area circuli, quadrato diametri existente 1, erit $\frac{2}{3}+\frac{2}{35}+\frac{2}{99}+\frac{2}{195}+\frac{2}{323}$ &c. in infinitum. Jam si diameter circuli = 1, erit semidiameter = $\frac{1}{2}$, adeoque quadratum inscriptum = $\frac{1}{2}$ (§. 21. *Trigon.*). Quoniam itaque quadratum circumscriptum est inscripti duplum, si quadratum inscriptum fuerit $\frac{1}{4}$, erit circumscriptum $\frac{1}{2}$, adeoque area circuli $\frac{1}{3}+\frac{1}{35}+\frac{1}{99}+\frac{1}{195}+\frac{1}{323}$ &c. in infinitum (§. 181. *Arithm.*). Statim patet 3, 35, 99 esse numeros quadratos unitate mulctatos, nempe 4 − 1, 36 − 1, 100 − 1, & inter quadratum 4 & 36 interjacere tres numeros quadratos 9, 16, 25, similiterque inter 36 & 100 interjacere tres 49, 64, 81. Quodsi seriem pro circulo continues & cum numeris in Tabula quadratorum numerorum compares; videbis eam constante hac lege progre di, ut denominator fractionis sit quartus quisque numerus excerptus ex serie numerorum quadratorum unitate mulctatorum numeratore semper existente unitate. Quando vero quadratum inscriptum $\frac{1}{4}$, radius est

$\sqrt{.}\frac{1}{8}$

$\sqrt{\frac{1}{8}}$ (§. 21. *Trigon.*), adeoque diameter $= 2\sqrt{\frac{1}{8}} = \sqrt{\frac{4}{8}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Hæc ideo monemus, ut discant tyrones dari etiam artificia particularia legem progressionis terminorum in infinitum detegendi præter generalia, de quibus diximus ante: quamvis istiusmodi quoque artificiis jam usi fuerimus in inveniendo generali theoremate pro binomio ad dignitatem quamcunque evehendo (§. 95. *Anal. infin.*). Neque enim inutile est eadem artificia variis exemplis illustrari.

§. 239. Quemadmodum vero quadraturæ curvarum per series infinitas reducuntur ad Quadraturam infinitarum parabolarum; ita quoque curvarum aliarum quadratura ad quadraturam circuli atque hyperbolæ reduci solent: id quod non uno modo fieri solet. Exemplum habemus in Ellipsi (§. 126. *Anal. infin.*), ubi ratio areæ ellipticæ ad aream circuli sua veluti sponte sese offert. Exempla alia præbent Cyclois, Cissois, Spiralis *Archimedea*. Non sine ratione addidimus hanc reductionem, cum eadem utamur in altioribus, prouti suo loco constabit in Mechanicis, ubi problemata physico-mechanica solvuntur. Probe autem notandæ sunt hæ reductiones iis, qui ad tertium cognitionis gradum adspirant, ut vim principii reductionis per omnem artem inveniendi utilissimi rectius percipiant. Ceterum eodem instituto (§. 147. *Anal. infin.*) rectificationem parabolæ reducimus ad quadraturam parabolæ; id quod ideo attentionem meretur, ut discamus subinde summationem ejusdem elementi dependere & a quadratura curvæ, & a rectificatione arcus cujusdam. Habet enim hoc usum non contemnendum in methodo tangentium inversa, ubi æquationes differentiales construere jubemur supposita curvæ cujusdam quadratura, vel rectificatione arcus. Exempla occurrunt in Mechanicis, ubi problemata physico-mechanica solvimus. Quodsi enim tempestive animum advertamus ad talia, quæ in progressu usum præclarum habent; quæ alias difficilia videntur, facilia evadunt, nec perturbatur animus, quando applicantur ea, quorum idea nobis jam familiaris evasit, præsertim cum haud

haud raro insolita nondumque perspecta videantur, quæ ex anterioribus nota esse poterant, si attentione sufficiente in iisdem usi fuissemus.

§. 240. Rectificatio curvarum, perinde ac inventio sectorum ellipticorum & hyperbolicorum, interdum requirit calculos admodum prolixos. Ne igitur prolixitate tyrones redderentur perplexi & a solutione problematis deterrerentur, calculos integros admodum distincte explicatos exhibuimus. Consulent autem sibi tyrones, si initio generalem quandam ideam solutionis animo concipiant, veluti quod in rectificatione arcus elliptici (§. 172. *Anal. infin.*) primum quæratur valor ex æquatione ad curvam, deinde tam ex Numeratore, quam Denominatore in valore isto emergente extrahatur radix per theorema *Newtonianum* & tandem series pro numeratore emergens dividatur per seriem, quæ emergit pro Denominatore. Hoc pacto enim in usum solutionis problematis problema unum resolvitur quasi in plura, quorum unumquodque sigillatim solvi potest. Circa divisionem attentionem meretur artificium, quo calculus a perplexitate liberatur, ut distincte singula ipsis oculis exhibeantur: quod non modo facit ad facilius evitandum errorem, qui in calculum perplexum facile irrepit defectu attentionis, verum etiam omnem molestiam aufert, qua attentio turbatur. Distincta perceptio intellectus est: unde qui intellectus perficiendi gratia Mathesi operam navant, non modo nostro more singula distincte sibi repræsentare, verum etiam ad diversa artificia, quibus eo fine hinc inde utimur, animum sollicite advertere tenentur. Ceterum ne quis aliorum libros evolvens, in quibus eorundem Problematum solutio occurrit, existimet, paucis ibidem explicari, quæ a nobis tanta prolixitate expediuntur; monendum esse duco, autores plerosque scribere peritis, non tyronibus, quorum utilitati nos velificamur, adeoque multa omittere, quæ a lectore supplenda sunt, siquidem veritatem assequi voluerit. Unde non modo tyrones, verum etiam haud raro exercitatiores multum temporis fallunt, ante-

quam

quam multo labore ab altero dicta assequantur. Nobis vero, qui tempus rerum omnium pretiosissimum existimamus, propositum est, ut sine omni temporis dispendio sciendi cupidos ad scientiam perducamus, cumque aliorum felicitati omni modo studere nos jubeat philosophia nostra, id quoque agendum esse arbitramur, ut in discendo omnem a discentibus molestiam arceamus.

§. 241. Inprimis autem in doctrina de rectificatione curvarum attentionem meretur methodus, qua ex quantitate per seriem data invenitur series pro quantitate variabili, ex quibus formantur seriei prioris termini, veluti dum ex arcu dato sinus quæritur. Etenim arcus datur per seriem infinitam, cujus termini formantur ex sinu, & sinus quæritur in serie, cujus termini formantur ex arcu. Nititur ea methodo extrahendi radicem ex serie infinita, quam eum in finem explicavimus in Analysi finitorum. Inventa est a *Newtono*, quemadmodum constat ex literis ad *Leibnitium* datis, quæ leguntur apud *Wallisium* volumine tertio Operum, diciturque Regressus serierum. Subinde tamen artis est applicare methodum extrahendi radicem ex æquatione infinita in regressu serierum. Exempli loco est problema 56. (§. 163. *Anal. infin.*), quo ex dato arcu invenitur sinus versus. Solutio igitur problematis istius attentionem meretur, ut artificium, quo hic utimur, in aliis casibus similibus adhiberi possit. Neque enim sufficit, ut intelligantur, quæ docentur, si quis ad tertium cognitionis gradum adspirat; sed artificia quoque analytica addiscenda in usum futurum, cum regulas doceamus per exempla. Ad hactenus dicta qui animum attendit, in ceteris sese satis attentum atque acutum præbebit, ut plura moneri non sit opus. Immo si quis ea attentione in discenda Mathesi uti voluerit, quam tantopere inculcamus, acumen singulare acquiret, quo facile, nullo quasi negotio, discernet artificia in solutionibns problematum adhibita eorundemque a se invicem dependentiam animadvertet: id quod utile erit iis, qui studio Matheseos ac in specie Algebræ in arte inve-

inveniendi generali proficere ſtudent ad recte philoſophandum neceſſaria.

§. 242. Circuli rectificatio etiam deduci poteſt ex quadratura circuli. Quoniam enim area circuli prodit ducta peripheria in quartam diametri partem (§. 429 *Geom.*), peripheria prodit, ſi ſeriem, quæ exprimit aream circuli, dividas per $\frac{1}{4}$. Inde eſt, quod, ſi diameter fuerit 1, pro quadrante eadem prodeat ſeries $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}$ &c. (§. 158. *Anal. infin.*), quam pro circuli area repereramus, quadrato diametri exiſtente 1. Etenim ſi ſeriem per $\frac{1}{4}$ dividere volueris, Numeratores terminorum ducendi ſunt in 4. (§. 243. *Arithm.*). Notandum adhuc eſt ex formulis indefinitis erui poſſe adhuc alias formulas pro circulo integro vel ejus peripheria integra, ſi valor ipſius x non explicetur per diametrum 1, ſed per ſinum, ſinum verſum, coſinum vel tangentem alicujus arcus: quo in caſu ſæpius prodit ſeries magis convergens, cum priori modo inventa minus convergeret & contra. E. gr. Si tangens fuerit x, pro arcu prodit $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11}$ &c. Ponamus arcum Tab. x eſſe 30. Si fuerit radius CA = III. CB = 1, erit ſinus BI = $\frac{1}{2}$ (§. 15. Fig. *Trigon.*), conſequenter ob $IC^2 = $ 39. $BC^2 - BI^2$ (§. 417. *Geom.*) $IC^2 = \frac{3}{4}$. Quamobrem cum ſit

$IC : IB = CA : AD$ (§. 26. *Trigon.*)

& $IC^2 : IB^2 = CA^2 : AD^2$ (§. 124. *Anal.*)

erit $\frac{3}{4} : \frac{1}{4} = 1 :$

ſive $3 : 1 = 1 :$ (§. *cit.*)

Unde reperitur AD = $\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Quodſi hunc valorem pro x ſubſtituas, cum ſit

$$x^2 = \frac{1}{3} \qquad \frac{1}{3}x^2 = \frac{1}{9}$$
$$x^4 = \frac{1}{9} \qquad \frac{1}{5}x^4 = \frac{1}{45}$$
$$x^6 = \frac{1}{27} \qquad \frac{1}{7}x^6 = \frac{1}{189}$$
$$x^8 = \frac{1}{81} \qquad \frac{1}{9}x^8 = \frac{1}{729}$$
$$x^{10} = \frac{1}{243} \qquad \frac{1}{11}x^{10} = \frac{1}{2673};$$

ſeries $x\,(1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 - \frac{1}{7}x^6 + \frac{1}{9}x^8 - \frac{1}{11}x^{10}$ &c.) degenerat in ſequentem

$$\sqrt{\tfrac{1}{3}}\,\left(\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{45} - \tfrac{1}{189} + \tfrac{1}{729} - \tfrac{1}{2673}\ \&c.\right)$$

quæ exprimit arcum 30 graduum. Si vero diameter fuerit 1, eadem exprimit arcum 60 graduum. Quamobrem ſi ſeriem hanc ducas in 6, hoc eſt, ſi $\sqrt{\frac{1}{3}}$ multiplices per 6, cum ſit $6\sqrt{3} = \sqrt{\frac{36}{3}} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$; pro area circuli habebis

$$2\sqrt{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{9}+\frac{1}{45}-\frac{1}{189}+\frac{1}{729}-\frac{1}{2673}\ \&c.\right)$$

Quodsi porro binos quosque terminos reducere volueris ad eandem denominationem, erit

$$-\frac{1}{9}+\frac{1}{45}=\frac{-45+9}{405}=-\frac{36}{405}=-\frac{12}{135}$$

$$-\frac{1}{189}+\frac{1}{729}=\frac{-729+189}{189\cdot 729}=\frac{-81+21}{21\cdot 729}=\frac{-60}{21\cdot 729}=\frac{-20}{7\cdot 729}=\frac{-20}{5103}$$

Si adhuc addas terminum seriei sequentem $+\frac{1}{9477}$; eodem modo reperies

$$-\frac{1}{2673}+\frac{1}{9477}=-\frac{28}{104247}.$$

Unde series pro circulo resultat

$$2\sqrt{3}\left(1-\frac{12}{135}-\frac{20}{5103}-\frac{28}{104247}\ \&c.\right)$$

Quodsi eandem seriem dividas per 4, & factorem $2\sqrt{3}$ per 4 multiplices; habebis pro circulo

$$8\sqrt{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{135}-\frac{5}{5103}-\frac{7}{104247}\ \&c.\right)$$

seu $\sqrt{192}\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{135}-\frac{5}{5103}-\frac{7}{104247}\ \&c.\right)$

Est vero $135 = 15\cdot 9$

$$5103 = 63\cdot 81 = 63\cdot 9^2$$

$$104247 = 143\cdot 729 = 143\cdot 9^3$$

Quamobrem series pro circulo

$$\sqrt{192}\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{15\cdot 9}-\frac{5}{63\cdot 9^2}-\frac{7}{143\cdot 9^3}\ \&c.\right)$$

Unde patet lex progressionis in infinitum. Etenim numeratores progediuntur secundum Numeros impares, denominatores componuntur ex binis factoribus, quorum unus sumitur ex progressione geometrica, cujus terminus primus 9, & exponens rationis eidem æqualis; alter vero per saltum excerpitur ex serie numerorum quadratorum unitate mulctatorum, quorum radices sunt 4. 8. 12. &c. hoc est, progrediuntur in progressione arithmetica, cujus terminus primus est 4 & differentia terminorum eidem æqualis.

Nisi formulam abbreviare voluissemus reductione binorum terminorum diversis signis præditorum ad eandem denominationem; lex progressionis in infinitum manifestari quoque poterat in formula

$$2\sqrt{3}\left(1-\frac{1}{9}+\frac{1}{45}-\frac{1}{189}+\frac{1}{729}-\frac{1}{2673}\ \&c.\right)$$

 resol-

reſolvendo denominatores in ſuos factores. Cum enim ſit

$$45 = 5 \cdot 9$$
$$189 = 7 \cdot 27$$
$$729 = 9 \cdot 81$$
$$2673 = 11 \cdot 24$$

erit pro circulo ſeries, ſi diameter = 1

$$\sqrt{12}\left(\frac{1}{1.1} - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.9} - \frac{1}{7.27} + \frac{1}{9.81} - \frac{1}{11.243}\ \&c.\right)$$

Una hic ſeries factorum progreditur ſecundum numeros impares 1. 3. 5. 7. 9. 11. altera vero in progreſſione geometrica, cujus exponens rationis 3, nimirum 1. 3. 9. 27. 81. 143.

§. 243. Patet hinc non temere eſſe judicandum, utrum ſeries aliqua citius appropinquet altera, nec ne, & num conſtanſtante quadam lege progrediatur. Neque enim eadem formula indefinita in omni caſu particulari æque appropinquat, & lex progreſſionis ſæpius latet, atque in caſu particulari non eadem eſt, quæ in univerſali. Liquet etiam ad detegendam legem progreſſionis facere Arithmeticam ſeu numerorum ſcientiam, quæ ſubinde etiam compendia ſummationis quotlibet terminorum ſeriei ſubminiſtrat, ut adeo inutile exiſtimari minime debeat ſtudium, quod in ſpeciebus numerorum certa lege progredientibus & in iis ſummandis collocatur, ſit ita quod hodie Geometria magis excolatur Arithmetica, immo Geometriæ ad Mechanicam applicatæ magis habeatur ratio, quam puræ. Apparet etiam uſui formularum minime obſtare, quod irrationalitati obnoxiæ ſint, & in caſu particulari formulam ab irrationalitate liberam eidem implicari poſſe citra ullum incommodum, immo uſum ejus per hoc fieri poſſe expeditiorem. Hæc probe notanda ſunt, ne judicium de formulis diverſis præcipitemus, quando de unius præ altera prærogativa agitur. Etſi itaque jam in ſuperioribus (§.238.) de transmutatione ſeriei *Leibnitianæ* ſeu *Gregorianæ* pro circulo in alias quædam monuerimus; non tamen piguit plura in eam rem dicere (§. 241.), tum ut intelligatur, ex eadem formula per transmutationem communi Arithmetica nixam varias deduci poſſe alias,

tum

tum ut conſtet, hoc non inutiliter fieri, ubi eædem ad praxin ſunt transferendæ, tum ut excitaremus attentionem eorum & juvaremus eorundem acumen, qui de ſeriebus infinitis ad uſum aptandis forſan commentari decreverint. Neque enim inutilem operam ſumeret, ſi quis hoc argumentum pro dignitate tractaret, ne inanes viderentur ſpeculationes, quæ certum ſui pollicentur uſum. Nec eſt quod excipias talia peritis nullum facere negotium. Nam quibus ſeſe commendat uſus, ii non ſemper, immo rariſſime adeo periti ſunt, ut talia per ſe aſſequantur.

§. 244. Ut hæc rectius intelligantur, lubet exemplo quodam docere, quomodo per ſeries infinitas inveniantur approximationes in numeris quantalibet exactitudine, prouti plures vel pauciores terminos ſummare libuerit. Reſolvuntur autem termini ſinguli in fractiones decimales per diviſionem, quemadmodum fecimus in extractione radicum ex æquationibus per approximationem (§. 363. *Anal. finit.*). Ne autem in numero cyphrarum quoto præfigendis aberres; tenendum eſt, tot præfigendas eſſe cyphras, quot numeratori cyphræ adjiciendæ, ut prima diviſio ſuccedat. E. gr. ſi fractio fuerit $\frac{1}{8}$, diviſio non ſuccedit niſi unitati adjecta cyphra. Quoto igitur præfigitur cyphra una, ut conſtet deficere integra, ſeu locum integrorum eſſe vacuum, & fractionem incipere a partibus decimis. Si fractio fuerit $\frac{1}{48}$, diviſio inchoari nequit, niſi numeratori 1 adjectis duabus cyphris. Unde liquet quoto præfigendas eſſe duas cyphras: id quod indicio eſt, fractionem decimalem incipere a partibus centeſimus. Si fractio fuerit $\frac{1}{112}$, diviſio non poteſt inchoari, niſi tribus cyphris numeratori 1 adjectis. Quoto igitur præfiguntur tres cyphræ, & fractio decimalis incipit a milleſimis. Similiter ſi fractio fuerit $\frac{5}{1112}$; quoto denuo adjiciendæ ſunt cyphræ tres & fractio incipit itidem a milleſimis. In caſu tamen particulari dantur compendia ſingulos terminos per diviſionem in fractiones decimales reſolvendi, quando ſcilicet alii ex aliis jam inventis inveniri poſſunt. Quamobrem ſumamus ſeriem pro circulo

$\sqrt{192}\ (\frac{1}{4} - \frac{3}{15.9} - \frac{5}{63.9^2} - \frac{7}{143.9^3}$ &c.)

quam ex *Leibnitiana* deduximus (§. 242.). Patet ex 192 extrahendam esse radicem in fractionibus decimalibus (§. 274. *Arithm.*), continuata operatione ad tot loca, quot visum fuerit. Quodsi hanc dividas per 4 habebis $\frac{1}{4}\sqrt{192}$, consequenter numerum, a quo summa terminorum signo negativo affectorum subtrahenda venit. Dividatur jam eadem radix per 9, 9^2 sive 81, 9^3 sive 729. &c. ut habeatur $\frac{1}{9}\sqrt{192}$, $\frac{1}{9^2}\sqrt{192}$, $\frac{1}{9^3}\sqrt{192}$, &c. aut, quod perinde est, quotus anterior semper per 9 pro obtinendo proxime sequente. Porro numerus $= \frac{1}{9}\sqrt{192}$ multiplicetur per 3 & factum dividatur per 15, ita prodibit numerus respondens $\frac{3}{15.9}\sqrt{192}$. Similiter numerus $= \frac{1}{9^2}\sqrt{192}$ multiplicetur per 5 & factum dividatur per 63, ut prodeat numerus $= \frac{5}{63.9^2}\sqrt{192}$, atque ita porro. Quodsi enim terminos hosce in unam summam collectos subtrahas a numero $= \frac{1}{4}\sqrt{192}$, relinquetur numerus peripheriæ circuli respondens, posita diametro 1. Cum sit $\sqrt{192} = 13.8564064605510183482 19$; erit $\frac{1}{4}\sqrt{192} = 3.4641016151377545870 55$ & porro, $\sqrt{192}$ per R designata & $\frac{1}{9}$ R per A, $\frac{1}{9^2}$ R per B, $\frac{1}{9^3}$ R per C, $\frac{1}{9^4}$ R per D & ita porro, sive $\frac{1}{9}R = A$, $\frac{1}{9}A = B$, $\frac{1}{9}B = C$, $\frac{1}{9}C = D$ & ita porro.

I.

1.539600717839002038691	=	A
171066746426555782076	=	B
19007416269617309119	=	C
2111935141068589902	=	D
234659460118732211	=	E
26073273346525801	=	F
2897030371836200	=	G
321892263537355	=	H
35765807059706	=	I
3973978562189	=	K
441553173576	=	L
49061463730	=	M
5451273748	=	N
605697083	=	O
67299676	=	P
7477741	=	Q
830860	=	R
92318	=	S
10257	=	T
1139	=	V
126	=	X
14	=	Y

Quodsi jam sit $a = \frac{3}{15}$, $b = \frac{5}{63}$, $c = \frac{7}{143}$, $d = \frac{9}{255}$, $e = \frac{11}{399}$ &c. continuata serie juxta legem progressionis, ut porro inveniantur valores f, g, h, &c. sitque $A.a = \frac{3}{15 \cdot 9} \sqrt{192}$, $B.b = \frac{5}{63 \cdot 9^2} \sqrt{192}$, $C.c = \frac{7}{143 \cdot 9^3} \sqrt{192}$ &c. prodibit

307920143568700407738	= A. *a*
13576725906869506514	= B. *b*
930432964247001145	= C. *c*
74538887331832584	= D. *d*
6469308424325950	= E. *e*
589482701747539	= F. *f*
55498666127130	= G. *g*
5349138299252	= H. *h*
524749292768	= I. *i*
52191088058	= K. *k*
5248435654	= L. *l*
532582107	= M *m*
54452235	= N. *n*
5602939	= O. *o*
579685	= P. *p*
60260	= Q. *q*
6290	= R. *r*
659	= S. *s*
69	= T. *t*
7	= V. *v*
9	= X. *x*
+	Y. *y*
322508961547961348592	Summa,
3.4641016151377545870 55	
3.14159265358979323846 3	Periph. Circ.

Series hæc cum numeris *Ludolphi* prorſus conſentit: notæ enim ultimæ non habetur ratio, quia accurata non eſt, ſaltem dubia, propterea quod ignoratur, qualis ſit proditurus, ſi calculus produceretur. Equidem calculus hic videtur admodum prolixus; quod ſi tamen quis eundem conferre voluerit cum calculo *Ludolphi* in Libro de circulo & adſcriptis, facile intelligit, quanto *Ludolphinus* ſit operoſior & moſtior. Immo ſi quis ſeriem *Leibnitianam* in fractiones decimales reſolvere vellet, multo prolixiore calculo

calculo haberet opus, antequam peripheriam circuli ad tot loca produceret.

§. 245. Quamvis autem ex allato exemplo abunde perspiciatur, quomodo seriebus infinitis sit utendum; non inconsultum tamen existimamus alterum adhuc addere exemplum. Si sinus arcus sit y, sinus totus seu radius circuli 1; erit arcus $= y + \frac{1.1}{2.3}Ay^2 + \frac{3.3}{4.5}By^2 + \frac{5.5}{6.7}Cy^2 + \frac{7.7}{8.9}Dy^2 + \frac{9.9}{10.11}Ey^2$ &c. in infinitum. Sit y sinus arcus 30°; erit is $= \frac{1}{2}$; adeoque series degenerat in sequentem $\frac{1}{2} + \frac{1.1}{2.3.4}A + \frac{3.3}{4.5.4}B + \frac{5.5}{6.7.4}C + \frac{7.7}{8.9.4}D + \frac{9.9}{10.11.4}E$ &c. in infinitum, consequenter si diameter fuerit 1, eadem series exprimit arcum 60°. Quodsi ergo terminum primum ducas in 6, & qui hinc prodit 3 in $\frac{1.1}{2.3.4}$ coëfficientem secundi ut habeas $\frac{1}{8}$, obtinebitur series pro circulo $3 + \frac{1}{8} + \frac{3.3}{4.5.4}B + \frac{5.5}{6.7.4}C + \frac{7.7}{8.9.4}D + \frac{9.9}{10.11.4}E$ &c. Neque enim hic opus est, ut termini singuli multiplicentur per 6, quia sequentem semper ingreditur proxime præcedens, adeoque primus, qui est sextuplus primi in anteriore serie, terminos omnes seqneutes. Non igitur alia re opus est, quam ut $\frac{1}{8}$ resolvas in fractionem decimalem 12500000000000000, ut habeas terminum secundum, hunc porro ducas in $\frac{3.3}{4.5.4}$ sive $\frac{9}{80}$, hoc est, multiplices per 9 & dividas per 80, ut obtineas tertium 14062500000000000, tertium vero ducas in $\frac{5.5}{6.7.4}$, seu multiplices per 25, & dividas per 168, ut, prodeat quartus 209263 3928571428 & ita porro. Quodsi enim terminos omnes addas,

addas, aggregatum erit peripheria circuli cum numeris *Ludolphinis* consentiens. Sane si quatuor saltem terminos addis posita diametro 10000, prout hic factum esse vides,

3. 0000	=	A
1250	=	B
140	=	C
20	=	D
Summa 3. 1410		

habebimus pro peripheria 3141, cum nota ultima non sit accurata. Reperitur adeo ratio diametri ad peripheriam ut 1000 ad 3141 cum *Ludolphinis* numeris consentiens. Nisi adeo fractiones decimales ad multa loca extendere volueris, sed in paucis numeris acquiescas, quemadmodum fecere *Archimedes*, *Ptolomæus*, alii; exiguo tantum calculo opus est. Similiter brevi calculo iidem numeri inveniri poterant ex serie præcedente. Cum enim sit $\frac{1}{4}\sqrt{1192}$ = 3. 46410 &

1. 53960	=	$\frac{1}{9}$ R = A	
17106	=	$\frac{1}{9}$ A = B	
1900	=	$\frac{1}{9}$ B = C	
211	=	$\frac{1}{9}$ C = D	

reperietur ut ante (§. 244.)

30792	=	A.*a*
1357	=	B.*b*
93	=	C.*c*
7	=	D.*d*
32249 Summa		
346410	=	$\frac{1}{4}\sqrt{192}$

314161 Peripheria circuli, in qua quatuor numeri 3141 ut ante cum *Ludolphinis* consentiunt.

§. 246. Quod si resolutio serierum infinitarum hic data probe perpendatur, nullus dubito fore ut in seriebus ad usum aptandis nihil posthac supersit difficultatis. Inprimis autem hinc perspicitur, quantum intersit, ut lex progressionis in infinitum sit manifesta, ne multo labore demum investigandi sint termini, quibus habemus opus, & ut termini sequentes inveniantur ex antecedentibus, sive id fiat per dependentiam eorundem a se invicem in formula generali, quemadmodum in exemplo altero (§. 245.), sive id singulari quadam ratione contingat in casu particulari, quemadmodum in exemplo primo (§. 244.). Intelligimus etiam quanta in tractandis altioribus attentione

opus

opus ſit ad maxime vulgaria, ne ea eidem ſeſe ſubducant & per ambages incedamus, ubi brevior ducit ad ſcopum via. E. gr. notiſſimum eſt ex communi Algorithmo fractorum, ſi $\frac{1}{9}$ dividas per 9, quotum eſſe $\frac{1}{9^2}$; ſi $\frac{1}{9^2}$ porro dividas per 9, quotum eſſe $\frac{1}{9^3}$ & ſic porro in infinitium. Enimvero ſi in exemplo primo huc animum minime advertas, & $\sqrt{192}$ ſive 13. 8564064605 51018348219 dividere velis per 9, per 9^2 ſive 81, per 9^3 ſive 279 & ita porro, operoſo calculo invenies numeros A, B, C, D &c. qui continua diviſione antecedentis per 9 multo facilius eruuntur. Immo ſi quis una diviſione terminum quemcunque reſolvere vellet, v. gr. ſecundum $\frac{3}{15.9}\sqrt{192}$ ſive $\frac{3}{135}\sqrt{192}$, multiplicando ſcilicet 13. 85640 &c. per 3, & factum dividendo per 135, in ambages multo longiores incideret, adhuc longiores futuras, ſi terminus quilibet reduceretur ad pure irrationalem & ex eo extraheretur radix, veluti ſi fieret $\frac{3}{135}\sqrt{192} = \sqrt{\frac{1728}{18225}}$ atque inde extraheretur radix. Non exiſtimandum eſt, talia inutiliter moneri: niſi enim ad ea animum reflectamus, ubi obvia ſunt, attentioni noſtræ ſeſe ſubducent, ubi magis latent. Illuſtria dare poteramus exempla, niſi noſtrum foret ab invidioſis abſtinere, quæ nulla neceſſitas imperat. Ad vitandam itaque ἀβλεψίαν ſedato opus eſt animo, ne appetitus influat in determinationem operationum intellectus, in qua nullæ ipſius ſunt partes. Diſtinctæ notiones nullibi negligendæ ſunt, ubi earum participes fieri poſſumus, præſertim ſi quis philoſophari conſtituit, & ad vitæ perfectionem tanquam ad ſcopum tendit. Diximus inſuper, quam difficile ſit de prærogativa formulæ unius præ altera ſtatuere, niſi utriusque reſolutione obſervatis omnibus, quæ obſervari poſſunt, facta. Sane ſi formula poſteriore utaris pro circulo, & terminos reſolutos ſibi invicem legitime ſubordines, & idem facias cum priori; videbitur poſterior priori longe anteponenda. Enimvero

vero si totam operationem in casu priori conferas cum tota in altero, præsertim ubi divisionem per novenarium transmutes in substractionem (116. *Arithm.*); longe aliter senties. Nolo addere plura, ne videar in levioribus commendandis nimius, præsertim iis, qui, cum in calculis consenescere decreverint, nec studii Matheseos utilitatem extra Mathesin quærant, illorum fructum prospicere nequeant.

§. 247. In capite de cubatione solidorum & complanatione superficierum tantummodo notandum est, quomodo elementa solidorum & superficierum eorundem inveniantur, & quomodo per calculum summatorium eruta soliditate vel superficie corporis rotundi investigentur per calculum literalem theoremata praxi inservientia. Inprimis hic attentionem meretur, quomodo solidum unum transformetur in aliud ipsi æquale. Ea cum facilia sint, pauca tantummodo speciminis loco exhibuimus, cum unusquisque per se plura addere possit.

§. 248. Methodus tangentium inversa maximæ ubilitatis est in sublimioribus, atque ideo maximam quoque meretur attentionem. Ejus saltem primas lineas duximus, ut nascatur methodi hujus idea in animis tyronum, ne hæsitent in problematis, quæ in Mechanica traduntur. Duo autem hic præ ceteris notanda sunt, primum quomodo constructio æquationum reducatur ad quadraturam curvarum simpliciorum & earundem rectificationem, ut appareat, quomodo solvantur problemata supposita quadratura curvæ vel rectificatione arcus; deinde quomodo ex æquatione differentiali ad Logarithmicam deducatur modus differentiandi quanitates, quas Logarithmi ingrediuntur (§.243. *Anal. infin.*), Hujus enim usus insignis est in inveniendis Logarithmis tam numerorum vulgarium, quam sinuum atque tangentium, quemadmodum capite sexto docetur. Eodem quoque artificio nititur calculus exponentialis, quem integra sectione tertia exposuimus, & constructio curvarum exponentialium ope Logarithmicæ atque quantitatum, quas Logarithmi ingrediuntur, cujus exempla dedimus capite altero

altero hujus sectionis. Hinc vero elucet insignis lineæ Logarithmicæ utilitas, quam nemo prævidere poterat, iis probe notanda, qui ad tertium cognitionis gradum adspirant. Rationem jam dedimus in superioribus (§. 176).

§. 249. Artificia, quibus utimur in investigando modo differentiandi differentialia (§. 297. *Anal. infin.*), eadem sunt, quæ ante adhibuimus ad investigandas regulas differentiandi quantitates finitas, & quæ jam nobis innotuere in calculo literali, ubi algorithmum fractorum ex algorithmo integrorum & algorithmum irrationalium ex algorithmo rationalium deduximus, ut adeo hinc appareat, qnomodo quæ vulgaria videntur, haud raro prosint ad altiora, & quam utile sit ad artificia, quibus utimur in facilioribus, animum attendere, ne impervia nobis videantur magis ardua. Cum Methodus determinandi puncta flexus contrarii curvarum non minus utilis sit ad ductum curvarum repræsentandum, quarum præter æquationem nihil novimus, quam methodus de maximis & minimis, & methodus determinandi puncta, in quibus curva rectam positione datam secat, quam in superioribus illustravimus, illa vero a calculo differentio-differentiali pendeat, eandem quoque exemplis nonnullis illustrare lubuit. Etsi enim curva integra nondum construi possit, ope tamen punctorum, quæ per eas methodos determinantur, ductum ejus imaginari licet. Exempla occurrent in Mechanica.

§. 250. In doctrina de evolutione curvarum, quam capite tertio proponimus, notatu maxime dignum est, quod cyclois sua evolutione seipsam describat (§. 350. *Anal. infin.*), cum hoc faciat ad perfectionem motus penduli, quo horologia automata ad maximam perfectionem perducuntur, quemadmodum in Mechanicis demonstratur. Sane ea ipsa permovit *Hugenium*, ut de evolutione curvarum cogitaret, sicuti ex egregio Mathematici summi Tractatu de horologio oscillatorio intelligitur. Notandum præterea, quod inserviat rectificationi curvarum & ipsam curvedinem curvæ discer-

nat, ut arcus circuli osculatoris pro arcu curvæ alterius in praxi substitui possit (§. 331. *Anal. infin.*). Applicatio calculi differentialis in hoc argumento nihil habet, quod non sit ex anterioribus manifestum. Hoc tamen adhuc attentionem meretur, quod determinatio radii osculi seu evolutæ interdum faciat ad theoremata selecta eruenda, quemadmodum exemplo Logarithmicæ docemus (§. 332. *Anal. infin.*)

§. 251. Arithmetica infinitorum, invento calculo differentiali & summatorio, non amplius eum habet usum, quem habere poterat, si is nondum fuisset inventus. Eam tamen prætermittendam esse non duximus, ne quod sit inventum celebre inter recentiores Mathematicos panomen adeptum, quod a nobis non illustretur. Etsi autem pauca tantummodo de ea tradidisse videamur, plura tamen dedimus, quam in prolixo opere *Ismaëlis Bullialdi* continentur. Eam illustrare voluerat *Joannes Christophorus Sturmius* in Mathesi enucleata; sed cum esset artificiorum recentiorum, ignarus, quod sibi proposuerat non perfecit. Quæ de termino ultimo seriei continuatæ evanescente notanda sunt, satis perspicue exposuimus (§. 345. *Anal. infin.*), ut plura eam in rem annotari minime sit opus. Ratio, cur usum Arithmeticæ infinitorum extendi quasi in infinitum licuerit ultra terminos, intra quos a *Bullialdo* coërcetur, in summatiône potentiarum & numerorum pyramidalium consistit, quam in Analysi finitorum universali quadam ratione absolvimus (§. 200. & seqq. & §. 216.). In Arithmetica enim infinitorum semiordinatæ curvarum spectantur tanquam in certa numerorum serie progredientium, veluti potentiarum dati cujusdam gradus in curvis parabolici generis (§. 349. 350 *Anal. infin.*). Unde analysi ad analysin veterum propius accedente quadraturæ curvarum quadrabilium deducuntur in Arithmetica infinitorum. Atque hoc artificium heuristicum notari meretur.

CAPUT

CAPUT V.

De

Studio Mechanicæ.

§. 252.

Mechanica a veteribus inventa fuit in usum machinarum: veteres enim laudabili exemplo in theoria semper respiciebant ad usum in praxin, quippe cum in omni theoriæ genere intendenda sit praxis, quemadmodum in Philosophia sedulo inculcamus. Primas ejus lineas duxit *Archimedes* in libris de æquiponderantibus, nec ultra eos terminos progressi sunt Mathematici usque ad *Galilæum*. Quoniam machinæ omnes ex paucis quibusdam machinis simplicibus componuntur, quas potentias mechanicas appellare solent, nos machinas simplices diximus; in Mechanica non considerarunt nisi machinas simplices, vectem, axem in peritrochio, trochleam, cochleam, planum inclinatum & cuneum, quarum theoriam amplissimam, sed nimis diffusam dedit *Varignonius* in opere posthumo. Considerarunt autem machinas hasce simplices in statu æquilibrii, in quo nonnisi adest conatus ad motum, quam vim mortuam vocat *Leibnitius*, propterea quod sublato æquilibrio, dum potentia motrix augetur, nascitur motus diversæ celeritatis pro diverso illius incremento seu excessu potentiæ motricis supra pondus movendum. Inde est quod in agitandis machinis non modo potentiæ motrices conferantur cum pondere movendo, verum etiam ipsæmet ad pondus ipsis æquale & resistentiæ in motu machinarum superandæ ad pondus æquivalens reducuntur, quatenus potentiæ cuilibet motrici quoad effectum substitui potest aliquod pondus vi gravitatis, qua ad descensum urgetur, in machinam agens seu eandem animans, & resistentiis superandis substituere licet pondus eandem potentiam motricem requirens, si elevari debet. Atque hæc probe notanda sunt tyronibus, ut & men-

mentem veterum plenius assequantur, & in applicatione theoriæ machinarum simplicium ad praxin, hoc est, ad machinas compositas explicandas nihil sententiant difficultatis. Patet hinc, quod *Leibnitius* asseruit, veteres nonnisi vis mortuæ notionem habuisse. *Galilæus* in Dialogis de motu ulterius primum progressus & motum gravium descendentium & projectorum explicare cœpit non infeliciter: eum vero in finem præmisit theoriam motus æquabilis. Attingit etiam nonnulla de motu pendulorum, sed quasi obiter. Accuratius vero & data opera in eundem inquisivit *Hugenius* in Tractatu de Horologio oscillatorio, & theoriam inprimis centri oscillationis superaddidit. Occasione motus pendulorum idem incidit in vim centrifugam, quam in circulo ad examen revocavit adjectis in fine Tractatus de horologio oscillatorio theorematis de vi centrifuga, quorum demonstrationes demum publici juris factæ sunt in posthumis. Inde *Newtonus* vires centrales tam centripetas, quam centrifugas considerare cœpit etiam in curvis aliis, præsertim centripetis & ad explicandum motum Planetarum theoriam transtulit in Principiis Philosophiæ naturalis mathematicis. *Cartesius* in Principiis Philosophiæ leges motus ex percussione explicare aggrediebatur, sed non satis feliciter, cum ad veritatem liquidam pertingere non potuerit. Postea vero *Wallisio*, *Christophoro Wren* & *Hugenio* negotium felicius cessit, quorum ille leges motus corporum non elasticorum, hi vero corporum elasticorum bene explicarunt. Quoniam autem motus corporum diminuuntur propter resistentiam medii, in quo moventur, in eandem quoque inquirere cœpit *Wallisius*, deinde vero hoc argumentum ulterius prosecutus est *Newtonus* in Principiis modo laudatis. Denique cum calculus diffirentialis esset inventus & a Geometris præclaris, quos inter eminent *Bernoullii* fratres, ad solutionem problematum physico-mechanicorum transferretur; descensus & ascensus corporum in lineis curvis expendi cœpit. Atque sic tandem latissimus evasit Mechanicæ campus, qui arctis nimium limitibus a veteribus inclu-

includebatur. Nos igitur Elementa Mechanicæ daturi, quæ satisfacerent, non minus inventorum antiquorum, quam recentiorum rationem habuimus. Hæc probe notanda sunt, ut idea quædam Mechanicæ animo concipiatur, definitio rectius intelligatur, nec quisquam miretur, ubi viderit, in Elementis nostris Mechanicæ longe alia pertractari, quam quæ vulgo in libellis hujus nominis reperiuntur.

§. 253. Qui solam praxin mechanicam curæ cordique habent, ii prætermissis ceteris omnibus ad caput decimum quintum statim digrediantur: in eo enim & sequentibus continentur, quæ ad machinarum intellectum faciunt. Quoniam nobis theoriam cum praxi semper conjungere proposuimus, potentiarum quoque motricium ad machinas applicationem & machinarum usitatiorum constructionem explicare voluimus: quæ duo vulgo in libellis mechanicis negliguntur. A potentiarum motricium ad machinas applicatione pendet structura externa machinarum, quæ absque illa intelligi nequit, quemadmodum structura interna non intelligitur absque notitia machinarum simplicium. Libellatio vulgo in Geometria practica docetur: sed cum nos Geometriam practicam a theoretica non separaverimus, libellationis vero indispensabilis usus sit in construendis molendinis, quæ aquarum vi agitantur, eandem quoque hic explicare visum fuit, ubi de applicatione potentiarum ad machinas agitur. Quoniam tamen ad machinas applicantur, quæ de æquilibrio solidorum c.3, quod de centro gravitatis agit, demonstrantur in prima ejus parte, & quæ c.4. de quiete & lapsu corporum gravium docentur, expensis definitionibus machinarum simplicium addendæ sunt definitiones ac propositiones horum capitum eo modo, qui ad primum cognitionis gradum acquirendum sufficit. Ubi vero animo satis comprehenderis, quæ ad machinas tam simplices, quam compositas spectant, non inutile fuerit, si ceterorum quoque theorematum notitiam quandam tibi compares ex anterioribus, prætermissis tantummodo problematis, quæ analytice solvuntur per calculum, ne ignores principia, quæ

quæ in praxi accuratiori usui sunt.

§. 254. Qui praxin mechanicam demonstratam expetit, ad secundum cognitionis gradum adspirans; eum addere debere demonstrationes per se patet. Non tamen ideo necesse est, ut omnis theoriæ campum emetiatur; sed sufficiunt ea, quæ ad intellectum machinarum faciunt. Quænam vero ea sint, facta demonstrationum cap. 15. contentarum analysis eo quidem modo, quam in Logica §. 922. satis distincte explicavimus, & exemplis illustravimus, docet. Quodsi quis praxin ante hauserit, quam ad theoriam accedat, quemadmodum modo (§. 253.) inculcavimus; ei haud difficile fuerit ea, quæ sibi usui sunt, discernere a ceteris, quæ insuper habere potest. Nec nocet, si vel maxime quædam addiscat, quorum in machinis usum nullum perspicit: neque enim solum fieri potest, ut in posterum usus quidam sese offerat, qui prævideri haud quaquam poterat; verum etiam omnis theoriæ tractatio certissimam spondet in firmandis ratiociniis mechanicis utilitatem & menti accumen quoddam conciliat, ut perspicacius videamus aliis in iis, quæ ad machinas spectant. Acumen vero mechanicum & prompta de machinis ratiocinatio non nullius censeri debet momenti.

§. 255. Qui denique ad tertium cognitionis gradum aditum sibi parare gestit, is nihil eorum prætermittere debet, quæ in Elementis nostris Mechanicæ continentur, sed omnia potius accurata industria persequi tenetur, quemadmodum in superioribus in genere præcepimus. Qui ad tertium cognitionis gradum adspirat, intendit habitum ex iis, quæ cognovit, inveniendi alia sibi adhuc incognita. Opus igitur habet principiis, quibus in ratiocinando utatur; opus habet artificiis heuristicis, quæ data occasione imitetur. Quæ a nobis demonstrantur vel analytice eruuntur sunt principia, per quæ aditus patet ad ulteriora. Resolutiones analyticæ problematum, quas damus, continent artificia heuristica a lectore attento annotanda vi perspicaciæ, quam inculcavimus, cum de studio Algebræ ageremus. Atque ea ratio est, cur problemata phy-

physico-mechanica in casu particulari solverimus, in quo soluta a primis inventoribus, etsi subinde quoque docuerimus, quomodo problemata particularia ad universalitatem reducantur. Plus enim artis plerumque deprehenditur in solutionibus particularibus, quam in universalibus, multoque difficilius fuit primis inventoribus dare solutiones particulares, quam deinceps aliis, qui iisdem omnem universalitatem conciliare voluerunt. Quamobrem qui non ad pompam scripsimus, levitate quadam animi in ambitionem adducti, quæ cum condonanda sit homini in lineis & calculis ætatem omnem consumenti ob egregia in scientiam merita, in Philosopho tamen ferenda non est, qui non minus appetitum, quam intellectum seu facultatem cognoscitivam perficere tenetur; sed utilitatem discentis unice respicimus, ad quam tanquam ad metam contendimus, eundem quoque a via regia deducere non debuimus, quam calcarunt, qui ad inaccessa aditum pararunt, ut appareat, quomodo quæ impervia videntur, humano ingenio pervia reddantur. Id inprimis cognitu utilissimum, si non necessarium dicendum iis, qui artem inveniendi extra Mathesin exercere sibi propositum habent. Postquam enim abunde convicti sumus, quam necessarium sit studio Matheseos etiam sublimioris perficere intellectum, ut extra ejus pomœria inoffenso pede progrediaris; hanc quoque utilitatem vulgo non satis animadversam, etsi a multis commendatam, in conscribendis Elementis nostris intendimus, operamque dedimus, ne vana spe lactaremus lectoris animum.

§. 256. Enimvero non opus est, ut ad particularia descendamus: neque enim alia re opus de est, quam ut ea, quæ superius de studio Matheseos in genere & de studio præsertim Algebræ in specie præcipimus, ad lectionem Mechanicæ transferantur. Quamvis enim hinc inde nonnulla scitu non inutilia annotari poterant; tantam tamen prolixitatem non fert præsens institutum, & qui per superiora ad ea, quæ sunt methodi, sufficientem attentionem cum acumine ubivis afferre didicit, perspicil-

lis propriis usus animadvertet, quæ eam subterfugere non debent, nec manuductione alterius indiget, qui firmo pede incedere valet. De duobus tamen artificiis, quibus utimur in Mechanicis, prorsus silere nefas est, propterea quod in Mathesi pura iisdem locus non est, in Philosophia tamen naturali & in ipsa quoque morali maximam id utilitatem habet. Ut facilius intelligantur, quæ dicenda sunt; sumamus casum particularem. Gravia moventur in rerum natura per medium resistens, veluti per aërem aut aquam. Enimvero in Mechanicis consideramus primo motum gravium in medio non resistente, qualis nempe foret, si nihil adesset, quod motum ejus quomodocunque impediret, seu quatenus a sola gravitate tanquam causa dependet. Ubi enim constat, qualis sit per se, nec difficile est postea quoque definire, quid per resistentiam medii detrahatur, ut intelligatur, qualis sit in medio resistente. Similiter in æquilibrio solidorum pondera primum consideramus tanquam lineis gravitatis expertibus applicata, ut quale in se sit pateat. Deinde vero idem applicamus ad pondera ex gravibus suspensa, veluti longurione aut hasta quadam ferrea. Eodem prorsus modo in Philosophia morali appetitus sensitivus consideratur in se, independenter a rationali, deinde vero etiam quatenus ab eodem dependet & vice versa. Similiter appetitus spectatur ut dependens a solo sensu, deinde vero ut simul dependens ab imaginatione. Qui concursum plurium facultatum ad eandem actionem non distincte expendunt, ut sigillatim inquirant, quid ab unaquaque proficiscatur, nunquam ad veritatem liquidam pertingunt, sed summa imis miscent, aut cœcutientes hæsitant, quid statuere debeant, & veritatem vel nullam agnoscunt, vel eam rationi humanæ imperviam temere pronunciant. Deinde probe quoque notandum venit artificium, quo problemata physico-mechanica reducuntur ad Geometriam puram, ut per eandem solutio in potestatem redigatur: id quod inprimis locum habet in transitu Geometriæ ad Physicam, ut tractare naturam mathematice liceat. Utile est hoc artificium

in

in omni cognitione mathematica, qualis etiam locum habet in Psychologia & in variis Philosophiæ practicæ capitibus, etsi hactenus de ea non cogitarint Mathematici, quippe principiorum philosophicorum ignari, nec Philosophi, qui subtilitates mathematicas a se alienas existimarunt. Erit autem tempus, quo, Philosophia nostro more magis exculta, cognitionem mathematicam ultra eos, intra quos hactenus coarctatur, terminos etiam ad talia provehent, in quibus quod locum habeat, hactenus vix sibi persuadere patiuntur. Quæ hic speciminis loco in medium afferuntur, excitare debent attentionem lectoris ad ea artificia, quibus methodus amplificatur & quæ pauci in Mathesi imitantur in casu simili, extra eandem vero ut adhibeat nemo cogitat.

§. 257. In resolutione problematum Physico-mechanicorum id quoque considerandum est, utrum solvatur in hypothesi naturæ, an vero in aliena. Illud obtinet, si quod sumitur in rerum natura revera ita sese habet; hoc autem, si minus. Exempli loco esto acceleratio gravium. Motum gravium continuo accelerari, experientia constat, nec minus liquet, naturæ conveniens esse, ut certa lege acceleretur. Quodsi in solutionibus problematum de motu gravium lex accelerationis sumatur, qualis obtinet in rerum natura; eadem in hypothesi naturæ solvuntur. Si vero alia sumatur, quam quæ in rerum natura obtinet; eadem solvi dicimus in hypothesi aliena. Geometræ perinde est, in quacunque hypothesi problema solvat, modo hypothesis non sit impossibilis, libera nimirum a contradictione. Enimvero in Physica non sunt usui nisi solutiones, quæ hypothesi naturæ nituntur. Hinc qui nonnisi Geometram agit, problema solvit in omni hypothesi possibili, Physico relinquens ut hypothesin naturæ definiat, & ad eandem solutionem generalem applicet, vel ex pluribus particularibus eam seligat, quæ instituto suo convenit. Quodsi dicas, solutiones in hypothesi aliena nullius esse utilitatis; lubens concedo, si non de alia utilitate sermo fuerit, quam quæ in Physica locum habet; nego

 autem,

autem, si de utilitate simpliciter sermo fuerit. Neque enim destituitur suo in Mathesi pura usu, qualis est incrementum artis analyticæ magni omnino faciendum. Non igitur contemnenda sunt magna Geometrarum molimina, quæ per se ad cognitionem naturæ mathematicam nil conferunt. Sufficit enim detegi methodos, per quas ea in potestate nostra constituitur, quam primum hypotheses naturæ innotuerunt. Quid quod solutiones problematum in alienis hypothesibus factæ conducant ad illas investigandas, quatenus ad experimenta ducunt, de quibus alias non cogitare daretur. Quoniam principia Philosophiæ naturalis mathematica cognitioni Naturæ mathematicæ inservire debent; rigorose loquendo talia non sunt, nisi quæ hypothesibus naturæ nituntur. Et si certam desideres cognitionem, hypotheses naturæ evinci debent, ne de earum veritate ullum supersit dubium. Quoniam tamen indirecte ad cognitionem naturæ mathematicam prosunt, quæ ex alienis quoque hypothesibus ducuntur, quemad modum modo annotavimus, & in Physicam quoque admittuntur hypotheses philosophicæ, etsi nondum certæ, probabilitate tamen non destitutæ, quatenus ad veritatem liquidam inveniendam viam sternunt (§.127 *Disc. prælim.*), fit ita, quod non ingredi debeant tanquam principia demonstrationem propositionum, quæ in Physicam tanquam dogmata admittuntur (§. 128. *Disc.prælim.*); imprudens reprehenderit, quod principia Philosophiæ naturalis mathematica dicantur, quæ ex hypothesibus alienis & ex aliis, quas Naturæ hypotheses esse nondum certo constat, deducuntur. Ecquis propterea invideret titulum Principiorum Philosophiæ naturalis mathematicorum celebratissimo operi viri summi *Isaaci Newtoni*, quo magno suo merito tantam nominis celebritatem consecutus? Cauti tamen ac circumspecti esse debemus, ne quæ ob usum, quem indirecte habent, principia Philosophiæ naturalis mathematica tolerando sensu dicuntur, pro principiis proprie ac rigorose dictis habeantur: hoc enim cederet in detrimentum scientiæ philosophicæ. Nemo igitur Philosophus pro-

probaverit, si qui hypotheses *Newtonianas*, eas præsertim, quibus nonnisi in Mathesi locus conceditur, pro principiis Philosophiæ naturalis sumunt & nescio quam Philosophiam *Newtonianam* exsculpunt, non modo Physicam cum Philosophia, hoc est, cum genere speciem, verum etiam cognitionem mathematicam cum philosophica confundentes. Etsi in virorum magnorum meritis extollendis liberales simus; non tamen eorum laudes in præjudicium veritatis producimus: id quod ne quidem in adulatore ferendum. Valet hic quam maxime tritissimum illud: Amicus Socrates, amicus Plato, amicus Aristoteles, sed magis amica veritas. Ceterum notandum est, inter hypotheses alienas & hypotheses naturæ dari genus quoddam earum intermedium, quæ non invita experientia ob commoditatem praxeos in locum hypothesium naturæ assumi possunt, immo debent, ne præter necessitatem difficultatibus praxin immergas, quam simplicem ac expeditam esse oportet, & quas adeo convenienter admodum *Vicarias* dixeris. Exemplum habemus in motu gravium. Cum gravia vi gravitatis ferantur ad centrum terræ, in motu projectorum directiones sunt convergentes, utpote in centro Terræ concurrentes. Hypothesis adeo directionum convergentium naturæ hypothesis est. Hoc tamen non obstante recte cum *Galilæo* in ejus locum surrogatur hypothesis directionum parallelarum, propterea quod in iis distantiis, in quibus experimenta sumere licet, lineæ convergentes pro parallelis citra errorem assignabilem in praxi inde metuendum haberi possunt. Referendæ sunt hypotheses istæ vicariæ ad ea, quæ sunt toleranter vera & quorum plurima in Mathesi occurrunt exempla, ex ea in Philosophiam minime inferenda.

§. 258. Quoniam in rerum natura nulla nisi motu contingit mutatio, Mechanica vero motus scientia est, ad quam etiam recte refertur status æquilibrii, quo sublato oritur motus; dubium superesse potest nullum, quod Mechanicæ principia in explicandis naturæ phænomenis usum habeant. Quamobrem qui in usum Physicæ Mechanicam addiscit,

addiscit, definitiones ac theoremata de motu & æquilibrio solidorum cognita atque perspecta sibi reddere debet. Quodsi demonstrationes difficiliores videantur, quam ut eas capere possit, vel si tantum temporis impendere nolit, quantum iis percipiendis sufficit; satis erit, si historicam saltem cognitionem sibi acquisiverit in eo cognitionis gradu acquiescens, quem supra primum diximus. Quando enim principia mechanica in Physica applicantur, non attenta demonstratione sumuntur tanquam vera, adeoque quoad applicationem perinde est, sive demonstrationem animo comprehenderis, sive eam non attigeris. Absit autem, ut quis sibi persuadeat, nos Philosophum a demonstrationibus mathematicis arcere velle, quas non modo necessarias agnoscimus, ne sine convictione tanquam verum sumas, quod ad reddendam rationem phænomenorum naturæ applicas, consequenter ut certa tibi sit rerum naturalium cognitio; verum etiam quia habitus demonstrandi omni modo perficiendus ad recte philosophandum in Physica conducit, immo nec in eadem demonstrationibus geometricis semper supersedere licet, etsi cognitionem mathematicam a philosophica separaveris. Ceterum non inutile est præcipua theoremata mechanica in eorum gratiam, qui demonstrationes capere vel non possunt, vel nolunt, experimentis comprobari, ut veritatem a posteriori agnoscant, quam a priori agnoscere minime valent: id quod in Physica tanto magis satisfacit, quanto plura in eadem assumenda sunt nonnisi experientiæ fide. Prosunt autem experimenta mechanica etiam Mathematicis, ut constet de rationis cum experientia consensu, tantoque magis exploratum sit, quod ratiocinando veritatem fuerint assecuti. Eadem commendanda sunt iis, qui solam praxin Mechanicæ curant, ne in reddendis rationibus sumere teneantur, sola autoritate aliena confisi, quæ nullo modo vera perspiciunt.

§. 259. Qui ad Mathesin sublimiorem adspirant, iis imprimis commendanda sunt, quæ in capite primo usque ad decimum quartum inclusive leguntur. Etenim

Etenim iis familiaria esse debent theoremata de motu, quemadmodum theoremata de ratione quantitatum & theoremata Geometriæ elementaris familiaria experiri debet, qui in Mathesi inoffenso pede progredi voluerit. Dedimus præterea problematum physico-mechanicorum solutiones, quæ Analyseos applicationem insinuant, qualis in Mathesi sublimiori requiritur, ut adeo artem doceamus per exempla, quemadmodum in Algebra fecimus. Quemadmodum adeo, cum de studio Algebræ ageremus, docuimus, quomodo enotanda sint artificia in futurum usum, & hinc inde memoriæ infigenda theoremata, quæ analytice eruuntur; ita utrumque etiam quoad problemata in Mechanica soluta notandum. Prolixum nimis foret, si eadem industria, qua in explicando Algebræ studio usi sumus, hic quoque singula perlustrare vellemus. Quamobrem hoc propriæ lectoris ad superiora satis attenti meditationi relinquimus.

§. 260. Denique demonstrationes syntheticas analyticis miscuimus, cum ad utrumque genus præparare voluerimus lectorem nostrum. In demonstrationibus autem syntheticis accuratam servavimus formam, quam vi regularum logicarum habere debent: id quod facile experietur, qui easdem eodem modo resolvere voluerit, quo supra geometricas resolvere docuimus. Proposuimus quoque demonstrationes completas, ne quid divinandum lectori relinquatur, quemadmodum faciunt qui peritis scribunt, ac ideo citamus, quæcunque ex Arithmetica & Geometria elementari sumuntur, ne a studio Mechanicæ arceantur, qui Mathesin puram nondum adeo familiarem experiuntur, ut per se assequantur, quæ ex anterioribus supponuntur. Ac idem observamus in problematum analytica resolutione, ne quid desit, quod ad facilitandum eorum intellectum conducere possit. Neque enim hoc pacto solum consequimur, ut lector nostrorum Elementorum absque multo laboris ac temporis dispendio addiscat, quæ discenda sunt; verum etiam ut meditationibus consummatis

matis adsuescat, quibus in Philosophia & superioribus, quæ dicuntur, Facultatibus opus habet.

CAPUT VI.

De

Studio Hydrostaticæ, Aerometriæ & Hydraulicæ.

§. 261.

Hydrostatica tota cognitu utilis iis, qui praxi Mechanicæ student. Sufficit autem iisdem primus cognitionis gradus. Enimvero ne sensus theorematum videatur obscurus, singula exemplis numericis illustranda. E. gr. Theorema 14. §. 55. hujus tenoris est: *Corpus specifice gravius in fluido leviori eam ponderis sui partem amittit, quantum est pondus fluidi sub eodem volumine.* Ponatur itaque corpus specifice gravius, quod aquæ immergitur, esse cubum, cujus latus unius pedis. Cum juxta *Morlandum* (§. 65) pes cubicus aquæ sit 70 librarum cum 2 unciis; quodlibet corpus aqua specifice gravius amittet pondus 70 librarum & 2 unciarum. Quodsi ergo totum pondus fuerit 100 librarum; intra aquam suspensum non erit nisi 29 librarum 14 unciarum. Siquidem veritatem principiorum hydrostaticorum a posteriori cognoscere volueris; facillime singula experimentis comprobari possunt, qualia descripsi Tomo primo Experimentorum idiomate patrio evulgatorum. Theoremata, quæ capite primo de corporum gravitate & levitate specifica leguntur, solis exemplis numericis illustrari sufficit. E. gr. Theorema 1 §. 17 tale est: *si duo corpora eandem densitatem habuerint, massæ sunt ut volumina.* Sumamus adeo duos dari globos plumbeos, quorum unus 5, alter 9 librarum. Quoniam massæ seu quantitates materiæ æstimantur pondere, quemadmodum in vulgus notum est; erunt etiam volumina seu magnitudines horum glo-

globorum ut 5 ad 9, nempe si magnitudo minoris divisa concipiatur in partes quinque æquales, istiusmodi partium 9 erit magnitudo majoris. Quodsi ergo magnitudo unius constiterit in mensura absoluta, veluti si detur in digitis cubicis Rhenanis, per regulam trium invenietur in eadem mensura alteræ. Istiusmodi exempla simul ostendunt theorematum usum, quem facere possunt, qui praxi operam dant. Erunt autem tanto utiliora & tanto certiorem spondent usum in praxi, si fuerint vera, numeris per experimenta definitis.

§. 262. Multum quoque usum habet Hydrostatica in Philosophia naturali, cum multorum phænomenorum inde reddatur ratio. Quamobrem si quis Mathematum imperitus ad Physicam accedit, principiorum tamen hydrostaticorum ignarus esse non debet. Consultum igitur est, ut primum saltem cognitionis gradum acquirat eadem observans, quæ modo præcepimus (§. 258). Inprimis autem qui Physicæ operam navare decrevit, principia hydrostatica experimentorum fide tanquam vera amplecti sibique familiaria reddere debet. Experimenta huc facientia dabimus suo loco, quando ordo in Philosophia nos ad experimenta physica describenda & principia, quæ in scientia naturali usui sunt, inde stabilienda deducet. Quinam vero sit horum principiorum in Philosophia naturali usus, suo patebit loco, ubi eandem eadem methodo trademus, qua hactenus in Metaphysica usi sumus, & nuc in Philosophia practica utimur. Quodsi quis in omni Mathesi fuerit prorsus peregrinus ac hospes, historicam tamen propositionum hydrostaticarum cognitionem acquirere valet observans ea, quæ de primo cognitionis gradu supra capite, docuimus, & breviter præcedente paragrapho annotavimus, modo sibi terminos quosdam perspectos reddat: id quod facile fieri poterit, si indicis auxilio evolvat definitiones, quibus explicantur, veluti quid sibi velit ratio composita, quid directa, quid reciproca, qui termini in Arithmetica explicantur. Sane etiam Mathematum imperitus terminis tamen mathematicis uti debet,

quoties aliis verbis mentem suam commode exprimere non licet, seu quoties loquendum de iis, quæ ad objectum Mathematicorum spectant, quemadmodum Physicus terminis Medicorum utitur, si de rebus ad Medicinam pertinentibus ipsi dicendum. Qui enim de re quadam loqui vult, nosse quoque debet nomen ejus.

§. 263. Equidem demonstrationes hydrostaticæ nihil prorsus habent difficultatis, præsertis si quis in anterioribus, multo difficilioribus, jam fuerit versatus; negandum tamen non est, quod, cum subsidio figurarum destituamur, quæ imaginationem juvant, termini generales, quibus hic utimur, eas reddant captu difficiliores, quemadmodum ipsas propositiones intellectu. Consultum igitur est, ut demonstratio applicetur ad casum particularem, quemadmodum fecimus in theoremate 14 §. 55, ubi pro corpore specifice graviori sumsimus cubum polliçarem plumbeum, pro fluido leviori aquam, adeoque pro volumine cubum pollicarem seu digitum cubicum. Hoc pacto enim idea imaginationi suggeritur, qualem in Geometria sistit figura. Immo si ita visum fuerit, schema quoque delineari potest, quod cubum intra aquam in vase vitreo suspensum repræsentat. Neque vero verendum est, demonstrationibus hoc pacto detrahi suam universalitatem & probato casu particulari argumentando a particulari ad universale colligi veritatem theorematis universaliter enunciati. Etsi enim idea, ad quam dirigitur demonstratio, repræsentet casum maxime particularem; cum tamen in demonstrando non sumamus nisi universalia, quæ insunt, ut eodem successu particulare quodcunque aliud in illius locum surrogari possit, quod ex universalibus concluditur utique universale est. Sane in Geometria quoque figura, ad quam refertur demonstratio, singulare quid est, cujus idea particulare refert, v. gr. triangulum, cujus anguli sunt datæ magnitudinis & latera in data quadam ratione. Enimvero cum non ex particulari, sed universali, quod ideæ inest, procedat demonstratio; universalitati non officit, quod,

quod, dum intellectus concipit universale, in imaginatione hæret idea quædam singularis, quæ casum quendam particularem repræsentat quoad ea, quæ ipsius vi facile distinguuntur, nudo reflexionis actu accedente. Quamdiu in ratiocinando nonnisi vocabulis utimur, universalia ab imaginibus separare non licet, quippe quæ non intelliguntur, nisi quatenus universalia in singularibus seu imaginibus intuemur. Hæc satis aperta sunt iis, qui in Psychologia nostra fuerunt versati. Ceterum eodem artificio utendum est in Physica, siquidem demonstrationes facilitare volueris, quales hactenus dare neglexerunt Physici. Etsi enim hoc intenderit *Honoratus Fabry*, qui in præfatione methodum sibi optime perspectam, immo tritam affirmat; si tamen in iis, quæ mathematica non sunt, prætensas demonstrationes examines, quantum diffideant a genuina earum forma, superiorum gnarus facile deprehendet. Eidem quoque artificio locus est in ipsa philosophia practica, si casum theorematis vel problematis exemplo quodam sive vero, sive ficto explices, quod imaginem quandam imaginationi præsentem sistit, & ad idem demonstrationem referas, quemadmodum in Geometria ad figuras, quatenus nempe in imagine, quæ exemplum repræsentat, attentionem non dirigis nisi ad universalia, quæ hypothesis theorematis vel resolutio problematis continet. Immo in ipsis Metaphysicis idem imitari licet, quidni debemus? quamdiu desideratur Characteristica generalis, vi cujus notiones abstractæ qualitatum ab imaginibus separantur, & calculus qualitatum a calculo magnitudinum utique diversus, quem literalem vulgo vocamus, ut characterum combinationes in locum ratiociniorum succedant. In hisce enim continetur Algebra philosophica, cujus aliam prorsus ideam sibi finxit *Robertus Hooke* in Posthumis, & quam speciosam generalem appellavit *Leibnitius*. Sed de hac dixi, quæ sufficiunt, ut intelligantur termini, in Psychologia empirica.

§. 264. Elementa Aërometriæ eo fine conscripsimus, ut specimine quodam non admodum difficili doceremus, quomodo

modo Mathesis ad experimenta applicetur, & ideam quandam cognitionis mathematicæ in scientia naturali animo legentium insinuaremus, simulque usum Algebræ in Physica exemplis non nimis difficilibus demonstraremus. Cum postea Elementa Matheseos universæ ederemus, Aërometriam in numerum disciplinarum mathematicarum referre nulli dubitavimus, præsertim quia principiis ejus opus habemus in Hydraulica, quæ dudum inter disciplinas mathematicas locum obtinuit. Eodem nimirum jure, quo Hydrostatica & Mechanica, immo etiam Optica pro partibus Matheseos habentur, Aërometria quoque pars ejusdem habetur. Quamobrem facile patet, hanc Matheseos partem inprimis commendandam esse iis, qui scientiæ naturali operam navare decreverunt, maxime ubi in cognitione philosophica subsistere non voluerint, sed ad mathematicam ascendendi animum habuerint. Supponit autem Hydrostaticam, cujus principia ad aërem tanquam fluidum grave applicantur. Quamobrem illi studere ante debes, quam ad Aërometriam accedas. Supponuntur etiam pauca ex Mechanica, quemadmodum ex citationibus videre est. Etsi autem Aërometria potissimum ad cognitionem Naturæ mathematicam manuducit tyrones; in genere tamen docet, quomodo Physica methodo demonstrativa tractari debeat, quatenus in ea etiam continentur, quæ absque principiis mathematicis demonstrantur. Discimus præterea ex ea, quamvis in reliqua Philosophia cognitio philosophica a mathematica separari possit; in Physica tamen, nisi certitudini deesse velis, fieri non posse, quin subinde nonnulla ex principiis mathematicis domonstrentur.

§. 265. Quibus sola praxis satisfacit, illis inservient problemata de antliæ pneumaticæ, barometrorum, thermometrorum & hygroscopiorum constructionibus, una cum scholiis, quibus horum instrumentorum usus dilucidatur. Non tamen negligenda sunt theoremata & corollaria, quibus tum fabrica, tum usus istorum instrumentorum perfectius intelligitur. Definitiones quoque expendendas esse

esse perse patet. Cum in Elementis Matheseos Germanicis ea potissimum tradiderimus, quæ ad praxin faciunt, etsi oculatam, non omissis scilicet demonstrationibus; ex Aërometriæ quoque Elementis ea excerpsimus, quæ praxin propius respiciunt, & ad theoriam uberiorem præparant lectorem ex Latinis deinceps hauriendam.

§. 266. Inprimis autem Aërometria inservire potest illis, qui ad tertium cognitionis gradum contendunt. Si enim animum ad ea attendunt, quæ sunt methodi, ideam quandam exemplarem applicationis Matheseos puræ, Algebræ præsertim ad experimenta & observationes inde haurient, ut in cognitione rerum naturalium certo tramite progrediantur. Multo enim clarius etiam tyrones hinc perspiciunt utilitatem cognitionis mathematicæ tum ad certitudinem in scientia naturali consequendam, tum ad praxin accuratissime exercendam, quam ex sublimibus istis problematis Physicomechanicis, qualia in Mechanica complura explicavimus. Quamobrem cum pauca sint, quæ ex Mechanicis in Hydrostatica & Aërometria sumuntur, demonstrandi principia; non inconsultum erit, si, qui ex Mechanica tantummodo principium de æquilibrio solidorum perspexerunt, sepositis ceteris ad Hydrostaticam & Aërometriam statim se conferant. Quodsi enim in hisce disciplinis intellectu non adeo difficilibus applicationem Matheseos puræ & Algebræ inprimis ad Naturæ cognitionem didicerint; minus difficultatis experientur in sublimioribus, quæ in Mechanica traduntur. Non est quod objicias, Elementa Matheseos cum sint in tyronum gratiam conscripta, ut scientiam inde hauriant, in iis quoque faciliora difficilioribus fuisse præmittenda, adeoque Elementa Hydrostaticæ & Aërometriæ Elementis Mechanicæ fuisse anteponenda. Etenim methodus studendi non per omnia consentit cum methodo tradendi disciplinas & eas sibi mutuo subordinandi atque in singulis veritati unicuique locum suum assignandi. Nimirum qui scientiis operam navat a facilioribus incipit, & inde continuo ad difficiliora progreditur, quam legem

legem præscribit methodus studendi. Ast disciplinæ integræ & in iis veritates singulæ eo ordine collocandæ, ut sequentia ex antecedentibus intelligi & demonstrari possint. Non autem semper contingit ut disciplina, quæ continet intellectu faciliora, non dependeat ab alia, in qua occurrunt multo difficiliora. Unde methodo studendi convenit, ut difficilia initio seponantur & ad faciliora properetur. Immo hac de causa in gratiam primorum tyronum conscribuntur compendia, in quibus nonnisi facillima & scitu maxime necessaria continentur, ut animum imbuant principiis & ad profundiora haurienda præparent. Memini me olim cum disciplinis operam navarem, iis quæ captu difficilia videbantur non immoratum fuisse, sed ad sequentia progressum, si vel maxime eorum veritas ab istis penderet: quando enim postea sequentibus intellectis ea denuo expendebam, sine ulla mora obvium erat, quod antea impervium videbatur. Nec ignoro rationes, cur hoc contigerit, quippe quas Phylologia suppeditat, quas tamen hic commemorari parum refert. Absit itaque, ut, ubi quædam a te percipi non posse tibi videtur, de viribus tuis desperans efficiaris studii desertor. Nocet non minus desperatio, quam nimia de viribus suis confidentia, nec ardor sciendi, qui accendere debet cupiditatem discendi, producendus in nocumentum.

§. 267. Hydraulica olim machinarum hydraulicarum & fontium salientium constructione tota absolvebatur, atque adeo non erat nisi pars Matheseos practicæ. Enimvero postquam theoria Mechanicæ ad omnem motum solidorum fuit extensa; in Hydraulica quoque in motum fluidorum inquirere cœperunt Geometræ. Unde hæc Matheseos pars longe aliam induit formam, qua etiam sese commendat Theoristis, quibus nauseam movet praxis, ne quid commune habere videantur cum hominibus, quibus natura manus loco ingenii dedisse censetur. Nos & theoriam, & praxin æstimamus, quamvis non eodem, sed suo unamquamque pretio, ut utrique suus habeatur honor. Quamobrem in Hydrau-

draulica quoque praxin cum theoria copulavimus, nec hanc illa dehonestari opinamur. Etsi enim Mathematicus, Geometra præsertim profundus, qui arduis meditationibus sufficit, longo intervallo post se reliquat machinarum fabrum, & hic perperam pro Mathematico habeatur; non tamen ideo praxis contemnenda, quin potius Geometra profundis suis meditationibus hunc fructum deberi agnoscere debet, ut illa perficiatur. Ex Hydraulica facillime perspicere licet, quod auxilio Geometrarum indigeant, qui praxi operam navant. Exempli loco esto determinatio situs alarum molendini vi venti agitandi (§. 316 & *seqq. Hydraul.*). Quodsi non deessent, qui inventa Geometrarum profunda ad praxin communem aptarent, illud adhuc magis pateret. Dolendum vero, quod nemo ea de re cogitare velit.

§. 268. Qui soli praxi operam navant, iis sufficit, ut distincta notione constructionem machinarum hydraulicarum & fontium salientium animo concipiant. Non tamen inconsultum est, ut theoremata quoque sive synthetice demonstrata, sive analytice investigata percurrant, visuri num in iis quid contineatur, quod praxin juvet. Idem quoque facere tenentur, ubi praxin desiderant oculatam, hoc est, rationem quandam eorum perspicere volunt, quæ faciunt, ne subinde cœcutientes in praxi aberrent. Exemplum illustre habemus in siphonibus, quos aquis per montium vertices in oppositam planitiem deducendis sufficere existimarunt, qui causam ascensus in crure breviori ignorarunt (§. 68 *Hydraul.*). Istiusmodi exemplis convincendi sunt, qui theoriam omnem contemnunt, quantum sibi noceant, si ne historicam quidem ejus notitiam sibi comparare velint. Quamobrem in genere suademus, ne illi, quos praxis juvat, theoriam Matheseos prorsus negligant, sed primum cognitionis gradum suum esse credant. Ipso nimirum usu experientur, quænam hinc utilitas in eos sit redundatura.

§. 269. Theoria non modo Hydraulicæ, verum etiam praxis multa continet, quæ usui esse possunt

possunt in Physica. Quamobrem si quis vel maxime se minus aptum sentiat ad demonstrationes & resolutiones analyticas capiendas, qui scientiæ naturali incumbere decrevit; ei tamen maxime commendanda est historica saltem Hydraulicæ cognitio. Enimvero quia in scientia quoque naturali methodo demonstrativa utendum, si certitudinis metam attingere velis, quantum datur; consultius omnino est, ut demonstrationes quoque expendat. Et qui Mathesin ad Physicam applicare voluerit; ei huic instituto non minus inservire poterit Hydraulica, quam Aërometria, ut, quæ paulo ante de hac dicta sunt, ad hanc quoque applicanda veniant.

§. 270. Hydraulica autem, sive theoriam, sive praxin spectes, attentionem eorum meretur, qui ad tertium cognitionis gradum adspirant. Ubivis enim annotare licet artificia heuristica, quibus felicissime usi sunt, aut uti saltem potuerunt inventores veritatum tam theoreticarum, quam practicarum. Cum de Algebræ studio ageremus, ad nauseam forsan inculcavimus, qua attentione artificia ista sint detegenda, ut in casu simili posthac iisdem utaris. Quamobrem nolumus hic ad particularia descendere; sed nobis sufficit monito generali excitasse attentionem, quam afferre debent, qui artem inveniendi curæ cordique habent. Ne tamen quis existimet, laudari artificia, quæ in Hydraulica non reperiuntur, singularia; exempli loco ad unum provocare licet, nimirum quo ad mensuram reducuntur, quæ mensuram respuere videntur. Obtinet hoc in doctrina de cursu fluminum, ubi, cum aqua omnis per totam sectionem non eadem celeritate fluit, aquæ per eandem fluenti tribuitur celeritas quædam media, qua si per totam sectionem flueret, eodem tempore tantundem per eam effunderetur, quantum celeritate inæquali per eandem fertur, & quomodo media ista celeritas inveniri possit docetur. Ceterum ex superioribus abunde constat, nos ubique in studio Matheseos urgere distinctam eorum cognitionem, quæ actu reflexo intellectus detegenda præcipimus, cum id maxime conducat ad recte philosophandum:

dum: quem finem intendimus, dum in studio Matheseos intellectus perficiendi causa versamur.

CAPUT VII.

De

Studio Opticæ, Perspectivæ, Catoptricæ & Dioptricæ.

§. 271.

In Optica strictiori sensu sumta pauca occurrunt, quæ ad praxin faciunt. Præter ea enim, quæ de camera obscura (§. 79 *Opt.*) & de quadrato geometrico ejusque usu (§. 172 *& seqq. Opt.*) & tessellatis imaginibus construendis (§. 312 *Opt.*) docentur, nonnisi problemata non nulla de magnitudine visa *cap.* 5. & theoremata nonnulla de lumine solis per foramen augustum radiante *cap.* 6. praxin directe respiciunt. Palmaria praxis Opticæ directæ in Perspectiva continetur. Quoniam tamen indirecte omnia, quæ de visu demonstrantur, usui esse possunt, qui praxi catoptrica & dioptrica delectantur, & quos exercitia Perspectivæ juvant; non male sibi consulunt, qui, si non omnium, præcipuorum tamen theorematum opticorum cognitionem historicam acquirere student.

§. 272. Qui ad Physicam animum appellunt, iis studium Opticæ maximopere commendandum. Non tamen sufficit nuda ejus cognitio historica, quam iis commendavimus, qui praxi student (§. 271); sed requiritur scientifica, quæ non sine accurata demonstrationum evolutione acquiritur. Visus phænomenon naturæ est, ad objectum adeo Physicæ, rerum naturalium scientiam, referendum. Nec minus lumen, umbra & colores ad idem spectant, quæ hic tanquam visibilia considerantur. Etsi enim in Mathesi potissimum ratio habeatur cognitionis mathematicæ, ut tamen hæc in potestate sit, multa

declarantur, quæ explicare Physici est, quemadmodum & modum visionis Physicus explicare debet. Quodsi ergo in Optica ea animi attentione utaris, quam hactenus in ceteris disciplinis mathematicis commendavimus; ex hac Matheseos parte discere licebit, quomodo res naturales sint explicandæ, ut certam earum cognitionem acquiras. Dum vero Geometria elementaris applicatur ad phænomena visus accurate determinanda; Optica prima & facillima cognitionis mathematicæ rerum naturalium exempla exhibet. Quamobrem si quis nullam adhuc hujus cognitionis habeat ideam, is omnium facillime ex Optica eandem hauriet. Unde suademus, ut, quamprimum principiis Arithmethicæ, Gemetriæ elementaris ac Trigonometriæ planæ imbutum habet animum, ad lectionem Opticæ accedat, intellectu multo faciliorem, quam Mechanica, Hydrostatica, Aërometria & Hydraulica, ac præterea jucunditate sua animum lectoris in se trahentem. Accedit quod ex Optica etiam innotescant fallaciæ visus, a quibus sibi cavere debet Naturæ scrutator ab observationibus inquisitionem omnem exordiens.

§. 273. Cum Perspectiva sit praxis Opticæ directæ, qua docetur delineatio objecti cujuslibet in tabula, quale ad datam distantiam & in data altitudine oculo super tabula transparente inter ipsum & objectum ad horizontem perpendiculariter erecta apparet (§. 1 *Perspect.*); qui solam praxin curant schemata juxta ea, quæ in singulis problematis præcipiuntur, delineare & deinceps in aliis figuris delineandis imitari debent. Quodsi quis in Architectura fuerit versatus, exempla quoque inde petere potest ac debet. Exercitia hæc facilitabis, si Anonymi Galli Perspectivam practicam, cujus supra in recensione Autorum c. 8. §. 23 mentionem injecimus, in subsidium adhibeas & deinde exempla ex *Andreæ Putei* Architectura Pictorum & Sculptorum (§. 24. *cap. cit.*) petas. Satisfacient ubivis regulæ, quas dedimus. Hic labor continuandus, donec habitum consequaris. Nemo autem non videt, artem pictoriam cum praxi Perspectivæ esse conjungendam.

Hæc

Hæc enim ad illam perficiendam unice tendit. Qui vero nonniſi ſcientiam expetunt, iis ſufficit demonſtrationes praxium percepiſſe, quas in uſum potiſſimum Philoſophorum addidimus, quorum cum ſit rationem reddere eorum, quæ ſunt atque fiunt, rationem quoque perſpicere debent delineationum objecti cujuscunque juxta regulas Perſpectivæ factarum. Qui tertium cognitionis gradum intendunt, iis notandum eſt atificium, quo tota Perſpectiva in poteſtatem Geometræ redacta (§. 2. *Perſpect.*) & praxin mechanicam eodem fundamento nixam, quam problemate primo expoſuimus, conferant cum regulis geometricis, quæ in ſequentibus problematis exponuntur, ut applicatione Geometriæ praxis perficiatur & certa ſcientia eorum acquiratur, quæ nonniſi confuſe percipiuntur. Eodem fine conducunt, quæ de anamorphoſibus capite ultimo proponuntur.

§. 274. Catoptrica phænomena viſionis reflexæ demonſtrat, quæ fit ope ſpeculorum. Specula communiſſima ſunt plana, quorum ideo uſus ceteris præfertur, quia objectum ea forma & magnitudine ſpectandum exhibent, quale & quantum eſt, ut adeo teipſum videre ac contemplari poſſis. Viſio reflexa variat pro diverſitate ſuperficiei reflectentis: unde alia ſunt ſpeculorum planorum, alia concavorum, alia convexorum, alia ex hiſce compoſitorum phænomena. Cumque figuræ concavæ ac convexæ in infinitum varient, phænomena quoque in infinitum variare debent. Artifices hactenus parare nequeunt niſi ſpecula plana, convexa ſphærica, cylindrica & conica, concava ſphærica & cylindrica, priſmatica enim & pyramidalia ex planis componuntur. Quamobrem contenti ſumus horum ſpeculorum phænomena demonſtraſſe, quæ ante experientia innotuiſſe, quam via demonſtrationis in eadem inquiſiverint Mathematici, facile largior. Fuere tamen artifices, qui ſpecula parabolica conficere conati ſunt. Unde horum quoque mentionem quandam injicere voluimus. Etſi autem ſpecula plana ſint quotidiani uſus, ex eorum tamen combinatione pro diverſo ad ſe invicem ſitu inexpectata

prorsus prodeunt phænomena, quæ non modo delectant, sed ignaros quoque in admirationem rapiunt, non sine delectationis incremento. Inserviunt etiam variis technasmatis specula cetera, quæ etsi ad delectandum fuerint excogitata seriis tamen inserviunt meditationibus Philosophi, quippe naturam imitantis, quæ serio agere solet, etiam dum pueri ludunt. Quamobrem nec piguit technasmata ista variis speciminibus illustrare. Et quoniam in omni Mathesi praxin cum theoria conjunximus, idem quoque fecimus in Catoptrica. Qua de causa non modo explicavimus technasmata, quæ ex theoria catoptricæ demonstrantur & adeo a priori deducuntur; verum etiam modum specula conficiendi: neque enim solum dedecet Mathematicum ignorare, qua arte prodeant specula, quorum phænomena demonstrat, etsi in demonstrationibus sumere possit ac debeat speculorum figuram; verum etiam hoc nosse utile est, ubi theoremata a se demonstrata per experientiam ad examen revocare voluerit. Quoniam nimirum in demonstrationibus suis supponit in rigore geometrico figuras speculorum, si de consensu demonstrationum & experimentorum judicium exactum ferre voluerit, nosse utique debet, ad quam perfectionem ars perducta fuerit, & num ea perfectionem ulteriorem recipere queat. In Mathesi mixta plurimum tribuimus connubio experientiæ ac rationis, quo consensus experimentorum & demonstrationum innotescit & quod tantopere commendamus per universam scientiam naturalem. Nihil adeo prætermittendum erat, quod eo ducere poterat.

§. 275. Qui adeo solam praxin amant, illis satisfacient problemata, prætermissis demonstrationibus. Non tamen prætermittere debent theoremata, cum historica eorundem cognitio æquipolleat recensioni phænomenorum: si qua enim sunt, quæ nonnisi in usum demonstrandorum aliorum afferuntur, ea facile a ceteris distinguent. Nimirum consultum est, ut theoremata experimentis subjiciant, ne omni prorsus certitudine destituatur cognitio, tumque patebit,

quæ-

quænam ſint ea, quorum cognitio ſcitu neceſſaria ac utilis etiam iis, quos ſola praxis juvat. Quid quod in numero quoque theorematum ſint haud pauca, quibus in praxi locus eſt, aut quæ ad praxes transferri poſſunt. Exempli loco eſſe poteſt theorema 11. §. 71, vi cujus §. 73 exhibetur globus deſcendens in plano inclinato tanquam aſcendens in verticali. Catoptrica praxi abundat, atque hoc nomine ſeſe commendat omnibus, quotquot eandem amant, iis præſertim qui quærunt, quod delectat.

§. 276. Inter ſpecula inprimis ſeſe commendant ſphærica concava, non ſolum propter phænomenorum prorſus ſingularium raritatem, verum etiam quod ſint cauſtica ſeu uſtoria & lumini intendendo inſerviant. Specula cauſtica præſertim majora uſum habent in experimentis phyſicis, qualia deſcribuntur in ſchol. 4. problem. 22. §. 221. immo phænomena omnia viſionis reflexæ argumentum phyſicum ſunt, quorum adeo rationes Phyſicus reddere tenetur, etiamſi geometricas inſuper habeat demonſtrationes. Phyſicus phænomena ſumit tanquam a poſteriori cognita, & eorum rationem reddit. Mathematicus illa demonſtrat ex ſuppoſita ſpeculi figura vi legis reflexionis ea deducens a priori tanquam incognita ex cognitis. Atque adeo diverſo prorſus modo ſuo funguntur munere: quod dum uterque facit, manifeſta eſt differentia, quæ inter cognitionem philoſophicam & mathematicam hac in parte intercedit. Ut autem certius conſtet Phyſico, quid ſumere liceat, theoremata & technaſmata catoptrica eum docent. Quemadmodum autem Optica patefacit fallacias viſus circa viſionem directam, quas utiliter cognoſcit Phyſicus, immo Philoſophus in aliis quoque Philoſophiæ partibus; ita Catoptrica revelat fallacias viſus circa viſionem reflexam non minore utilitate agnoſcendas. Atque adeo patet, quomodo in ſtudio Catoptricæ verſari debeat Philoſophus, qui ab omni cognitione mathematica alienum habet animum: quem etſi non probemus, tolerandum tamen cenſemus pro diverſitate ingenii humani, quantum absque detrimento

mento scientiæ fieri potest. Ceterum quæ de cognitione mathematica quoad visionem directam modo annotavimus (§. 272); ea etiam de eadem quoad reflexam notanda veniunt.

§. 277. E re esse videtur, ut præjudicio occurramus, quo nonnulli sibi mirifice placent & cui alii applaudunt, quasi singulare quoddam acumen proderet. Diximus paulo ante (§. 274), nos facile largiri, quod phænomena speculorum innotuerint a posteriori, antequam de iis a priori demonstrandis cogitarent Mathematici. Non adeo dubito fore haud paucos, qui contendent demonstrationes mathematicas superfluas esse, immo qui hinc inferent, inventa, quæ in Mathesi mixta celebrantur, debere artificibus, a quibus postquam inventa fuerant, ea demum demonstrare conati sunt Mathematici inventionis tamen gloria inter alios eruditos eminere gestientes. Memini hoc argumento arrogantiam Mathematicorum redarguere voluisse *Clericum*, cum *Hermanni* Phoronomiam recenseret. Qua de causa desiderabat, ut Geometra præclarus significaret, quantum scientia naturalis & ars facta sit locupletior, postquam abstrusas istas theorias orbi literato in opere suo propinasset. Artifices enim pro inventoribus habebat, Mathematicos vero demonstratores pronunciabat, qui nonnisi in artificium inventis ingenii sui vires excerceant. Non unum est, quod hic repono. Phænomena, ipsi etiam vulgo cognita, sumit Physicus & eorum rationem reddit: non tamen ideo inanis censetur ejus opera, propterea quod illa ante innotuerint quam de rationibus eorundem reddendis cogitavit Physicus. Eccur ergo inanem operam sumere aut nihil præclari facere dicendus est Mathematicus, qui longe ulterius progressus phænomena non sumit, sed ex iis, quæ sumi debent, via demonstrationis a priori deducit, ut certa sit etiam ejus cognitio, qui existentiam phænomeni nondum supponit? Notandum præterea est, phænomena haud raro a posteriori non satis determinate cognosci, quæ tamen accuratissime determinantur a Mathematico in suis theorematis. Accedit porro, quod Mathematicus

non

non omnia phænomena jam ante norit, quam ea demonstrat; sed multa potius adhuc ignorata in apricum producat. Denique inventa, quæ haud raro casui debentur, imperfectiora ad majorem perfectionem perducit; aut, siquidem ulteriorem perfectionem non admittunt, ut idem certo constet demonstrat. Quid quod hinc inde a priori quoque deducat technasmata, quæ tentando nondum fuerunt detecta, aut prorsus non potuissent detegi? Absit autem ut tibi persuadeas ea, quæ casu plerumque aut tentando reperta fuerunt, perficere minoris esse, quam illa reperire. Non semper valet illud pervulgatum: Inventis facile est addere. Inventa nondum æstimare didicit, qui ea aliunde quam ex usu facultatum, cui debentur, æstimat. *Hugenius*, qui horologia singulari pendulorum applicatione perfecit, longo intervallo post se relinquit primum eorundem inventorem, & demonstrationes, quas de tubo optico dedit in Dioptrica, multo majorem laudem pariunt, quam fortuita imperfecti inventio. Ut inventa, quæ casui accepta referenda sunt vel tentaminibus laboriosis, perficiantur, inventis haud raro opus est non sine summo acumine & maxima ingenii vi eruendis. Plurimum adeo falluntur, inventionis gloriam non deberi nisi iis, qui primi in quidpiam inciderunt. Sed hæc evidentiora erunt, ubi ars inveniendi eodem habitu fuerit investita, quo Logicam indutam dudum in scenam produximus, ut ex arte æstimare detur artificem, non vero, quemadmodum nunc plerumque fieri solet, ex eo, quod inventum ejus sit utile, vel quod sit inexpectatum, vel quod aliis fuerit inaccessum, vel quod in admirationem rapiat ignaros & ita porro.

§. 278. Qui ad tertium cognitionis gradum adspirant, reperient in Catoptrica, sive theoriam spectes, sive praxin, quæ artem inveniendi illustrant & amplificant, ubi in artificia inquirere voluerint, quibus aditus paratus ad ea, quæ inaccessa videbantur. Neque eum, qui in Physica feliciter progredi voluerit, ubi non minus applicatione Matheseos puræ ad phænomena naturæ, quam connubio expe-

experientiæ ac rationis opus est, pigebit eo modo perlustrasse Catoptricam, quem ad tertium cognitionis gradum acquirendum supra præscripsimus & cum de studio Algebræ ageremus exemplis illustravimus. Quoniam vero nobis quoque propositum est usum Algebræ in Mathesi mixta ostendere, placuit sub finem adjicere Catoptricam analyticam, seu modum investigandi theoremata Catoptrica per Analysin. Substitimus autem in iis speculis, quorum antea phænomena demonstravimus more veterum, tum ne tyrones universalitate ipsis inutili perplexi reddantur, tum quia solutiones particulares occasionem dedere universalibus in omni curvarum genere. Discentium enim, quibus scribimus, ratio habenda fuit.

§. 279. Erunt forsan, qui, cum viderint, Algebræ beneficio nullo fere negotio patere, quæ more veterum non sine multo apparatu demonstrantur, demonstrationes syntheticas inutiles existimabunt, immo prorsus damnabunt. Recolenda animo hic sunt, quæ supra (§. 100 *& seqq.*), monuimus cum de studio Matheseos intellectus perficiendi causa ageremus, quem inter usus præcipuos referimus studio mathematico tribuendos & qui multo latius patet, quam usus reliquus omnis. Quamobrem qui hac intentione ad studium Matheseos animum appellunt, iis omnino maximopere commendandum, ne demonstrationes syntheticas negligant etiam in Catoptrica & demonstrationes catroptricas eadem industria resolvant, ut pateat earum forma in Logica præscripta, qua demonstrationes Geometriæ elementaris resolvi præcepimus, ut non modo idea exemplaris demonstrationis consummatæ, quam in Logica vocamus, reddatur illustrior, magisque indies confirmetur, verum etiam ut habitus juxta eam operandi in omni scientiarum genere perficiatur. Pudeat enim Philosophos seculo tam illustri, quo scientiæ mathematicæ ad tantum fastigium evectæ, diutius in ancipiti hærere, &, dum Mathematici plena luce fruuntur, in tenebris palpitare.

§. 280. Dioptrica praxi multa abundat. Agit enim de visione refracta, cujus multus usus

est

est in spectandis objectis remotis & vicinis exiguæ molis, quorum illa ob distantiam, hæc vero ob parvitatem oculis sese subducunt. Hinc in hac parte Matheseos mixtæ præcipue agitur de tubo optico & microscopio. Tubi non minus optici, quam microscopia componuntur ex vitris lenticularibus arte parandis. Atque adeo ad praxin dioptricam spectat quoque ars poliendi vitra, quam adeo integro capite accuratissime explicavimus. Quoniam tubus opticus maximam utilitatem affert in observationibus astronomicis, ita ut sine ejus auxilio Astronomia nondum ad eum perfectionis gradum fuisset perducta, ad quem eam hodie evectam cernimus; accurata lentium fabrica ipsis quoque Mathematicis curæ cordique esse debuit. Quamobrem non mirandum, Mathematicos etiam summos, veluti *Hugenium*, vitris poliendis operam dedisse, nec eos piguisse praxin manuariam exercere, etsi in theoria augenda & amplificanda inter paucos eminerent. Ad praxin dioptricam spectant quoque perspicilla, quæ quomodo Myopes & Presbytas juvent in videndis iis, ad quæ oculorum acies non pertingit, in vulgus notum est. Dantur denique alia technasmata dioptrica & catoptrico-dioptrica, qualia nonnulla descripsimus & plura apud alios, veluti *Traberum* & *Zahnium*, describuntur: quæ etsi nonnullis magis ludicra, quam utilia videantur, & ad delectandum magis, quam ad augendam scientiam composita, minime tamen contemnenda sunt. Usum enim præbent in experimentando haud raro prorsus insignem. Exempli loco provocare licet ad prisma trigonum, quod quantum adjumenti attulerit ad naturam luminis & colorum indagandam, ex præclaro opere viri summi *Isaaci Newtoni* clarissime conspicitur. Inprimis etiam attentionem merentur, quæ (§. 476. 477 *Dioptr.*) de laterna magica in microscopium convertenda & ad foramen cameræ obscuræ lumine solari directo illustratum applicanda annnotavi, in Experimentis autem idiomate patrio descriptis fusius exposui. Novi enim virum quendam illustrem istiusmodi microscopium parasse & insignes prorsus ejus effe-

effectus, quos ego prædixeram, observasse. Qui adeo praxi operam navant, non modo ea, quæ de poliendis vitris, de construendis telescopiis, microscopiis aliisque technasmatis larga manu traduntur, probe perpendere tenetur; sed ut oculata sit praxis, theoremata quoque de refractione luminis in lentibus opticis, præsertim de focis earundem, sibi familiaria reddere debent, etsi demonstrationes insuper habeant. Clarissime omnium ex Dioptrica perspicitur, quam necessaria sit theoria ad praxin, nisi hæc multa imperfectione laborare debeat, nec in eadem committendi errores, qui evitari poterant. Huc igitur velim animum advertant, qui theoriam comtemnere solent. Velim etiam ut ad hæc animum attendant, quorum est theoriam ad praxin aptare, ut ad historicam ejus cognitionem pateat aditus artis cultoribus ad praxin eandem applicaturis. Optandum enim foret, ut quis omnes theorias quantumvis profundas perlustraret & quæ in arte usui esse possunt excerpta sine demonstratione in usum artis cultorum exponeret, experimentis confirmanda, ubi id absque multo apparatu ac sumtu facile fieri potest. Quoniam tamen Geometræ in solvendis problematis physico-mathematicis quædam sumunt, quæ quod non invita natura sumantur non demonstrant, atque adeo idem ipsis subinde accidit quod *Galilæo* circa resistentiam solidorum, ut ex assumtis recte quidem colligant, quæ inde sequuntur, hæc tamen ab experimento dissentiant, quod illa naturæ rerum minime conveniant; ideo consultum foret, ut in Physica veriori satis versatus in hypotheses Geometrarum accurate inquireret, ea, quæ certa sunt, ab incertis aut prorsus falsis separaturus, ne, dum praxin theoria perficiendi animus est, ea inculcentur, quæ eidem magis obsunt, quam prosunt, & artificum perspicaciorum judicio, cum theoriam fallere videant, hæc tandem magis in contemtum adducatur, quam ut eidem aliquod pretium statuatur. Etsi enim a particulari ad universale non valeat argumentatio, & præcipitantiæ in judicando tribuendum sit, si quis ea utatur; hæc ipsa tamen præcipitantia tanto excusatior est in arti-

artifice, qui quoad theoriam aliorum dictis habere debet fidem, consequenter judicium suum determinare nequit nisi per notiones communes probabilitatis extrinsecæ.

§. 281. In Dioptrica explicatur visio refracta, ac inprimis ostenditur, quomodo refractio fiat in vitris politis. Quamobrem primo omnium loco inquirendum est in legem refractionis: quæ quomodo per experimenta eruatur, primo loco docendum duximus. Equidem hodie, postquam usus telescopiorum & microscopiorum invaluit, potissimum ratio habetur refractionis in vitro factæ; addidimus tamen etiam, quomodo sese habeat in aqua & aëre, propterea quod in Physica major est utilitas legis refractionis in aqua & aëre, quam in vitro factæ. Quamvis vero etiam ostenderimus, quomodo lex refractionis in genere per calculum analyticum eruatur; experimentis tamen supersedere minime possumus, cum ratio sinus anguli inclinationis ad sinum anguli refracti, quæ per calculum constans eruitur, non eadem deprehendatur in omni diaphano. Qui ergo ad secundum gradum cognitionis adspirant, ea, quæ de refractione in genere capite primo docentur, probe expendere debent, quoniam hinc pendet certitudo ceterorum omnium, quæ in Dioptrica demonstrantur. Quod demonstrationes dioptricas attinet, non uno modo easdem contexere licet. Etenim supposita lege refractionis per calculum trigonometricum erui potest, quomodo fiat refractio in vitro cujuslibet figuræ, veluti in vitris utrinque planis, plano convexis, plano concavis, utrinque convexis, utrinque concavis & concavo-convexis sive meniscis. Idem reperiri potest per calculum algebraicum. Potest denique etiam geometrice demonstrari, quod tanquam jam inventum supponitur, per legem refractionis vi principiorum geometricorum, more veterum. Ut igitur diversos hosce demonstrandi modos lectorem nostrum doceremus, nunc ad calculum trigonometricum, nunc ad algebraicum, nunc vero ad demonstrationes geometricas veteribus usitatas recurrimus. In vitris politis, ex quibus tubi & micro-

croscopia componuntur, & quæ ad alia technasmata adhibentur, duplex occurrit refractio, altera, quæ fit in ingressu luminis ex aëre in vitrum; altera vero, quæ contingit in egressu ejusdem ex vitro in aërem, atque adeo refractio luminis in vitris politis composita est. Ut tamen ea facilius intelligatur, primo loco docemus, quomodo refractio simplex fiat in superficiebus tam planis, quam sphæricis cum cavis, tum convexis. Quodsi enim hæc principia fuerint cognita atque perspecta; haud difficile est per ea demonstrare refractionem duplicem, qualis in vitris politis occurrit. Enimvero quoniam nos principia dioptrica etiam usui esse volumus in explicandis aliis Naturæ phænomenis, theoremata generaliter demonstramus, ut ad quodlibet diaphanum applicari possint, modo ratio sinus anguli incidentiæ ad sinum refracti in eodem diaphano per experientiam fuerit definita. Quia tamen in Dioptrica potissimum usui est refractio in vitro facta, & in Physica frequentiora sunt phænomena refractionis in aqua factæ; in corollariis theoremata de refractione in vitro & aqua facta exhibemus. Non diffiteor, theoriam dioptricam esse satis diffusam, si respicias usum, qnem habent vitra polita in tubis opticis atque microscopiis, & aliis nonnullis technasmatis; sed quibus scientia, quæ sola certitudinem parit, curæ cordique est, illis non videretur nimis ampla, etiamsi praxis inde pendens multis adhuc arctioribus limitibus constringeretur. Quod vero subinde calculo algebraico usi fuerimus in demonstrandis theorematis dioptricis, non alio fine factum est, quam ut demonstrationes redderemus faciliores & theoriam contraheremus. Neque vero opus est ad demonstrationes algebraicas intelligendas, ut quis in studio Algebræ multum diuque fuerit versatus. Sufficit, si prima saltem rudimenta non ignoraverit, ut adeo nemo jure conqueri possit, quasi hoc nomine Dioptrica multis facta sit inaccessa. Vix enim hodie ferendum est, ut, qui Mathesin addiscere voluerit, Algebram prorsus intactam relinquat: quæ potius commendanda venit iis, qui theoriæ non multum temporis impendere possunt,

sunt, eam tamen ignorare nolunt. Non exigua voluptate animum sciendi cupidum demulcent demonstrationes dioptricæ, ut adeo theoria nemini videri possit molesta nisi ab omni sciendi cupidine prorsus immuni. Notandum vero in Dioptrica non modo quæri, quomodo lumen refringatur in transitu per diaphana diversæ densitatis; verum etiam quomodo beneficio radii sic refracti videatur visibile: quod posterius inprimis nosse debemus, ubi phænomena tubi optici ac microscopiorum aliaque visionis refractæ demonstrare voluerimus. Quamobrem in theoria quoque demonstratur, quomodo appareat visibile per radios refractos visum. Unde lentium dioptricarum duplex est usus, alter, dum lumine per ea transmisso utimur, alter vero, dum per eas visibilia respicimus. Qui adeo utrumque usum certo cognoscere studet, is etiam omnem theoriam cognitam atque perspectam habere debet: neque enim theoriam dioptricam extendimus ultra usum, quem in praxi habet.

§. 282. Refractio luminis & visio refracta phænomena naturalia sunt, quorum adeo rationes reddere tenetur Physicus. Ex Dioptrica phænomena particularia multo accuratius addisci possunt, quam per observationes absque theoriæ Dioptricæ subsidio innotescunt. Et si experimenta capere volueris ad phænomena utraque venanda; theoria Dioptricæ eadem dirigit, ut accurate cognoscantur. Quoniam in Physica phænomenorum rationes proximas ex aliis phænomenis reddimus; eo nomine Dioptrica ad scientiam naturalem plurimum affert adjumenti. Multa dantur naturæ phænomena, quæ a refractione luminis pendent. Eminent inter ea Meteora, quæ dicuntur, emphatica, quæ absque principiis Dioptricæ explicari nequeunt. Atque ea ratio est, cur subinde Mathematici de Meteoris emphaticis, veluti de Iride, halonibus, parrheliis & paraselenis, in Dioptrica agant. Immo Dioptricæ theoria, si a telescopiis & aliis technasmatibus dioptricis recesseris, ad cognitionem naturæ mathematicam spectat. Quamobrem quæ paulo ante de eadem quoad Opticam

cam (§. 272) & Catoptricam (§. 276) monuimus; eadem quoque de Dioptrica tenenda sunt. Quamobrem qui ad Naturæ cognitionem mathematicam adspirant, iis quoque commendamus, ut omnem Dioptricæ theoriam attenta mente perlustrent. Quodsi enim in Optica, Catoptrica & Dioptrica didicerint, quomodo Geometria & Algebra ad Naturæ phænomena sint applicanda & quomodo cognitio mathematica differat a philosophica, quidque ad perfectionem philosophicæ conferat mathematica; ad altiora progredientes tanto minus difficultatis experientur. Extra omnem controversiam est, prima cognitionis mathematicæ in Philosophia naturali specimina fuisse Optica, nisi forsan Astronomiam ipsis priorem agnoscere volueris, quamvis nostris demum temporibus, præsertim quod Dioptricam attinet, disciplinæ opticæ magis fuerint excultæ, cum jam sublimiora cognitionis naturæ mathematicæ exempla prostarent. Quodsi ergo a disciplinis opticis exordiaris, ubi cognitionis hujus ideam animo complecti volueris, deinceps magis amplificandam per ea, quæ in disciplinis Mechanicis Tomo secundo Elementorum occurrunt; naturalem omnino dicendus es sequi ordinem, quem tenuerunt primi inventores. Neque adeo dubitandum est, quod hoc pacto a facilioribus ad difficiliora continuo progressus multo intimius hanc cognitionis humanæ gradum inspicias, quam si inverso ordine, insuper habitis primis inventis, statim ad sublimiora te conferas, ad quæ non patuit aditus nisi per faciliora inventoribus.

§. 283. Atque hoc ordine si progrediaris, haud parum quoque lucis affunditur ad tertium cognitionis gradum adspiranti. Cum enim ad artem inveniendi exercendam certa quoque requiratur mentis habitudo, ea omnino omnium commodissime acquiritur eo modo, quo successive in diversis licet subjectis incrementa sua cœpit. Sed de hoc ipso plura mox nobis dicenda erunt, ubi de studio Astronomiæ in usum tertii gradus cognitionis agendum erit. Ceterum qui Dioptricam ea lege perlustrare voluerit, quam pro acquirendo tertio cognitionis

gradu

gradu præscripsimus; is non inanem operam a se sumi ipso facto deprehendet. Probe notandum est artificium, quo lex refractionis analytice investigatur (§. 36 *Diopt.*), tum quod in argumento physico adhibeatur principium a causa finali desumtum, nimirum quod natura agat via brevissima, tum quod methodus de maximis & minimis ad problema physicum applicetur. Præterea considerandum, quod Mathesis requirat experimenta, si per ejus demonstrationes aliquid in Physica accurate determinandum. Etenim per analysin mathematicam ratio sinus anguli incidentiæ ad sinum anguli refracti indeterminata prodit, quæ per experimenta deinde in quolibet diaphano determinanda. Etsi autem *Keplerus* veram refractionis legem non fuerit assecutus, cum rationem constantem quæsiverit in angulis, non in eorum sinibus; non tamen propterea attentione indignum est principium *Keplerianum*, cum inde pateat, quomodo hypotheses vicarias in locum verarum Naturæ subinde surrogare liceat in cognitione mathematica, sive veras detegere non detur, sive eædem disquisitiones reddant molestiores, tum etiam quod inventum *Kepleri* ad veram legem refractionis inveniendam manuducere potuit *Snellium*, quatenus constans quædam ratio inter angulum incidentiæ & angulum refractionis observatur, quamdiu anguli sinibus physice propemodum proportionales sunt: id quod tanto facilius succedere potuit, quia in ipsa Trigonometria in simili casu angulorum ratio substituitur rationi sinuum (§. 23 *Trigon.*). Et non minus demonstrationes, quam analysis dioptrica loquuntur, ubi Geometria ad Physicam applicatur, non semper observandum esse rigorem Geometricum, ita ut lineæ v. gr. convergentes haberi possint pro parallelis & anguli quantitate parva differentes pro æqualibus: id quod convenit approximationibus in Mathesi pura & eandem cum hisce habet rationem. Quodsi singula eodem modo perlustrare velimus, quo in studio Algebræ explicando a nobis factum; multa artificia annotare licebit, quæ ad tertium cognitionis gradum faciunt. Sed nostrum jam non est in tantas ambeges descendere,

dere, qui tantummodo monstramus viam, qua sit eundum. Non tamen nobis temperare possumus, quin unicum adhuc commemoremus. Nemo est qui nesciat, primam telescopii inventionem casui deberi; ejus autem perfectionem maxima ingenii vi & acumine summo a Mathematicis primi ordinis fuisse promotam. Fortuita telescopii inventio attento insinuat modum, quo in inveniendo casui obviam ire licet. Ac evidentissime hinc perspicitur, quod ea, in quæ casu incidimus, manum emendatricem & auxiliatricem expectent a scientia & arte inveniendi. Amplissimus sese hic aperit dicendi campus; sed eum ingredi prohibet instituti præsentis ratio. Quamvis autem in ipsis demonstrationibus diopticis passim adhibuerimus calculum algebraicum distantiam foci a lente determinaturi; idipsum tamen non obstitit, quo minus doceremus, quomodo eadem analytice investigetur, non modo ut usus Algebræ in Mathesi mixta doceatur, verum etiam ut præstantia ejus appareat, cum theoremata in anterioribus operose demonstrata, quamvis ope calculi analytici fuerint contractæ demonstrationes, mira facilitate ex formula generali eliciantur: id quod extra Mathesin usui esse potest in speciebus ex dato genere determinandis. Cur vero solutionem dederimus particularem, quæ Dioptricæ sufficit, non vero universalem, sive figuram medii refringentis, sive ejus densitatem spectes, quod tanto facilius fieri poterat, cum dudum prostent solutiones generales, nec eædem supponant, nisi quæ in Analysi a nobis fuerunt tradita; ex iis liquet, quæ in superioribus jam annotavimus, cur solutiones particulares universalibus prætulerimus in ipsa etiam Algebra, vel subinde universales nonnisi præmissis solutionibus in casu particulari subjunxerimus, ut adeo opus non sit hic repetere, quæ in anterioribus jam inculcata fuerunt. Ceterum hic quoque annotari poterat, quod, cum Dioptrica multis experimentis ansam præbeat, ars quoque experimentandi lucem quandam hinc expectare possit. Enimvero cum suo tempore, quando nos Ordo deducet ad experimentalem Philosophiam tradendam, ea de

re ex instituto sit agendum; eidem in præsenti immorari non debemus.

§. 284. Antequam vero hinc discedamus, non inconsultum ducimus unum adhuc moneri Dioptricæ lectorem ad tertium cognitionis gradum adspirantem. Trigonometriam planam pro parte Artis inveniendi venditare solemus, aut, si mavis, pro methodo particulari investigandi veritatem latentem (§. 142). Unde studium trigonometricum commendamus iis, qui artem inveniendi in genere acquirere volunt, non modo illis, qui ad tertium cognitionis gradum, in Mathesi adspirant (§. *cit.*). Non desunt, qui sibi persuadent, Trigonometriam ad artem inveniendi parum conferre, propterea quod per eam tantummodo computentur exempla, non vero veritates universales eruantur. Hi facillime confutantur per problemata in Dioptrica trigonometrice soluta: apparet enim per Trigonometriam eadem inveniri, quæ per Algebram eruuntur. Quamvis vero opinio ista satis refelli poterat per hoc, quod ipsæ solutiones trigonometricæ problematum sint veritates generales, quæ per applicationem Trigonometriæ inveniuntur, & harum demum applicatione computari exempla; multo tamen clarius idem patet in Dioptrica, ubi etiam per computum trigonometricum eruuntur theoremata universalia Dioptricæ. Accedit, quod usus quoque Trigonometriæ in Philosophia naturali per Dioptricam elucescat. Ita ex ejus applicatione ad experimenta innotescit, quomodo lex refractionis e. gr. in vitro detegatur, ut alia taceam.

CAPUT VIII.

DE

Studio Sphæricorum & Trigometriæ Sphæricæ.

§. 285.

Trigonometria sphærica demonstrari nequit, nisi præmittantur principia sphæricorum, quæ etiam ante applicanda sunt ad Astronomiam sphæricam, quam calculo trigonometrico in eadem uti datur. Atque ea ratio est, cur Elementa sphæricorum cum Trigonometria sphærica conjunxerimus. Quamobrem qui cognitionis gradum secundum intendit, elementa quoque sphæricorum attenta mente perlustrare tenetur, antequam ad problemata Trigonometriæ sphæricæ accedat. Quoniam demonstrationes syntheticæ sunt, quales in Geometria elementari occurrunt; eodem quoque modo expendendæ, quo demonstrationes Geometriæ elementaris resolvere docuimus. Quamobrem iis, qui methodum demonstrandi veterum sibi familiarem reddere volunt, & demonstrationis legitimæ ideam exemplarem, quam imitentur extra Mathesin, majore luce perfundere gestiunt, lectionem quoque Elementorum sphæricorum commendamus, si vel maxime Trigonometriam sphæricam attingere noluerint. Sunt dubio procul Sphæricorum elementa pars Geometriæ, si non elementaris, certe sublimioris, quæ de lineis curvis agit, quarum etiam in numero sunt circuli in superficie sphæræ descripti. Mallem tamen eadem referre ad Geometriam elementarem, quia in hac non minus locum habet circulus, quam sphæra. Sed ea de re cum nemine ferram contentionis reciprocabimus: sufficit demonstrationes non esse difficiliores demonstrationibus Geometriæ elementaris, ex cujus etiam principiis contexuntur, nisi forsan imaginatio hinc inde minus

nus

nus exercitatis negotium aliquod facessat, quod tamen evanescit, ubi figuris in plano delineatis substituas globum, in cujus superficie circuli debito modo sunt descripti. Et ut hoc faciant tyrones, omnino suaserim, præsertim illi, quibus molestum accidit horum Elementorum studium, ne ejus fiant desertores. Philosophis vero hinc discere licet, quænam differentia intercedat, si imaginatio juvet, non turbet operationes intellectus.

§.286 Quodsi igitur quis nonnisi calculum trigonometricum sibi familiarem reddere voluerit; is ex problemate primo §. 114 regulam catholicam de triangulis rectangulis probe perpendat, utque eandem intelligat, definitiones 9, 10 & 11 cum suis corollariis expendat & quomodo ad omnes casus applicetur ex §. 116 *& seqq.* addiscat. Si numeri tantummodo varientur, exempla plura comminisci licet. Hæc calculi exercitia continuanda sunt, donec regulam catholicam in dato quocunque casu dextre applicare possit. Qui experiri voluerit, quantum Trigonometria sphærica per regulam catholicam facilitetur; eadem problemata more communi resolvat, quemadmodum in libellis aliis Trigonometriæ sphæricæ aut in Introductione ad Tabulas sinuum atque Tangentium docetur. Ubi solutio Triangulorum rectangulorum nihil amplius difficultatis facessit; addenda sunt problemata 20 *& seqq.* §. 158 *& seqq.* circa quæ eadem observanda, quæ de resolutione triangulorum rectangulorum monuimus. Nullus dubito fore, ut calculus trigonometricus absque ullo tædio addiscatur, nec majorem in eo difficultatem sentias, quam in Trigonometria plana. Quoniam multos a studio Astronomiæ practicæ abhorrere expertus sum; quod tædia calculi Trigonometriæ sphæricæ devorare cogerentur: omnem quoque operam navavi, ut Trigonometriam sphæricam redderem facilem quoad praxin, etsi theoria sit multo profundior, quam Trigonometriæ planæ.

§.287. Trigonometriæ sphæricæ demonstrationes non modo supponunt theoremata sphærica seu sphæricorum theoriam; sed

propriam quoque theoriam habet, qua nituntur resolutiones problematum. Nimirum quemadmodum Trigonometria plana nititur theoria triangulorum planorum seu rectilineorum in plano descriptorum, quæ traditur in Geometria elementari; ita quoque Trigonometria sphærica pendet a theoria triangulorum sphæricorum seu eorum, quorum latera sunt arcus circulorum maximorum in superficie sphæræ descriptorum. Eam cum alibi supponere non potuerimus, in ipsa Trigonometria sphærica tradere debuimus, quemadmodum theoria triangulorum planorum in Trigonometria plana explicanda esset, nisi jam in Geometria elementari exposita fuisset. Quodsi dicas, theoriam triangulorum sphæricorum esse partem Elementorum Sphæricorum, quemadmodum theoria planorum est pars Geometriæ planæ; mihi perinde erit, sive eam a Trigonometria sphærica separes eandemque tibi familiarem reddas, antequam ad hanc accedis, sive ipsam demum cum problematis, quorum solutiones inde pendent, addiscas, quamvis hoc posterius mihi videatur commodius minusque molestum, cum sic theoriæ statim pateat usus, nec difficilis præmittenda sit praxi faciliori. Theoriam autem Sphæricorum & Trigonometriæ sphæricæ plurimum commendamus iis, qui in Astronomia non modo ad secundum cognitionis gradum, verum etiam ad ipsum tertium adspirant, consequenter omnibus, qui intellectus perficiendi gratia ad Matthesin addiscendam accedunt. Cum demonstrationes singulas eadem forma exhibuerimus, qua conspiciuntur in Geometria elementari, nisi quod nonnullæ in theoria Trigonometriæ sint prolixæ; si nostro more resolvantur, nihil difficultatis facessent, ut eadem deterreatur, qui a Geometria elementari ad sphæricam Trigonometriam statim accedit. Quodsi enim cuidam visum fuerit, neglecta Algebra & ceteris Matheseos mixtæ partibus, pergere in demonstrationibus Matheseos puræ methodo veterum conditis, ut hanc magis subjiciat potestati suæ, nec ante ad analyticam recentiorum accedat, quam ubi syntheticæ veterum fuerit satis compos; is a Geometria Ele-

Elementari & Trigonometria plana ſtatim pedem promovere poteſt ad Elementa Sphæricorum & Trigonometriam ſphæricam, cum nec hic ſupponantur principia, niſi quæ ex Trigometria plana & Geometria elementari hauſiſti, nec alia demonſtrandi methodus, quam qua ibidem uſi ſumus, ita ut ſubjunctis Geometriæ elementari Sphæricorum elementis Trigonometriam Sphæricam cum plana conjungere licuiſſet, quemadmodum vulgo a Trigomometriæ Scriptoribus fieri ſolet.

§. 288. Qui ad tertium cognitionis gradum adſpirant, iis ſtudium Elementorum ſphæricorum & Trigonometriæ Sphæricæ commendandum. Etenim ſi ne principiis Sphæricis & Trigonometria ſphærica nihil reperire licuit in Aſtronomia ſphærica, multa etiam in Geographia ab hiſce principiis pendent. Ipſemet expertus fui, cum ſtudium Aſtronomiæ mihi videretur perplexum, ac tædioſum eſſet reſolutiones problematum primi mobilis ex Autoribus petere, principiis ſphæricis perſpectis nullo negotio per me ipſum eas fuiſſe conſecutum, & beneficio illorum principiorum eas extemplo reperire potuiſſe, quando de iisdem cogitandum erat, etſi eas memoria non comprehendiſſem. Quamobrem ſi in Aſtronomia & Geographia perſpicere volueris, quomodo reſolutiones problematum fuerint detectæ; principia Sphærica probe perſpecta eſſe debent. Vi Trigonometriæ autem ſphæricæ patet illatio, qua opus eſt, ut in caſu particulari dato computatio legitime fiat, ope principiorum ſphæricorum triangulis & in iisdem datis detectis. Circuli, qui concipiuntur terminati in ſuperficie ſphæræ, oriuntur ex ſectionibus ſphæræ, quas omnes eſſe circulos theoremate 1. §. 13 demonſtratur. Differt adeo Sphærica a Geometria plana, in qua circuli ſe mutuo ſecantes in eodem ſunt plano, cum hic in diverſis ſint planis, omnes tamen terminentur in eadem ſuperficie ſphæræ. Unde facile patet, alium hic requiri uſum facultatum cognoſcendi, quam in Geometria plana. Qui vero tertium cognitionis gradum acquirere ſtudet, is utique diſtincte cognoſcere tenetur uſum

sium facultatum cognoscendi in veritate investiganda requisitum, consequenter ubi novus quidam usus emergit, ad eundem animum attendere debet, ne attentioni suæ sese subducat. Talia autem inprimis scrutari debet, qui artem inveniendi distincte cognoscere avet, & Mathesi quoque in usum Philosophiæ operam navat, ejusque studio intellectum perficere studet, consequenter promptum facultatum cognoscendi usum consequi conatur, quem habere possunt. Etsi autem intra cancellos, quos præfixit præsentis instituti ratio, nos continentes ad particularia non descendamus; non possumus tamen non excitare attentionem lectoris sciendi cupidi ad artificium, quo regula catholica Trigonometriæ sphæricæ fuit eruta, præsertim cum singula huc spectantia satis distincte explicaverimus & demonstrata dederimus. Elucet enim ex eo usus prorsus singularis fictionum ad formandos conceptus universales, sub quibus comprehenduntur, quæ propter intrinsecam diversitatem ad commune quoddam genus seu universalem quandam notionem reduci minime posse videbantur. Etsi enim hujus artificii jam mentionem quandam injecerimus in Analysi; singularis tamen prorsus hic occurrit applicatio, ut aliam prorsus formam induat. Regulam catholicam non alio fine investigavimus, quam ut memoriæ succurreretur, regularum multitudine non obruendæ, & ut omnis applicatio Trigonometriæ secum ferat sensum certitudinis manifestiorem. Habemus igitur hic, quod imitemur in aliis disciplinis practicis, ad praxin omnem facilitandam. Quamvis enim dentur artificia adhuc alia, quibus idem præstari potest, nec semper recurrendum sit ad fictiones; sufficit tamen hoc exemplo nos moneri, cogitandum quoque esse in Disciplinis practicis de praxi per regulas catholicas facilitanda, immo & de theoria multiplici ad notiones universales reducenda, ut facilior evadat ejus ad humana negotia applicatio. Maximæ hoc ipsum utilitatis est, cum non omnium sit theoriam, quæ multitudine regularum abundat, ita memoriæ infigere, ut singulæ veluti sua sponte præsentes sistantur intellectui, quoties usus eas re-

requirit, cum tamen ad recte agendum illis carere nequeamus. Mirabuntur forsan nonnulli, qui, cum Mathesin sibi soli discant, ad alia, quæ extra eam sunt, animum non divertunt, nos studium Matheseos explicaturos talia proferre, quæ cum eo nihil commune habere videntur. Enimvero qui animo recoluerit, quæ supra de studio Matheseos intellectus perficiendi gratia instituendo in medium attulimus & cum eodem studium Philosophiæ verioris, quam in operibus nostris tradimus, conjunxerit, non habebit amplius quod miretur, utilitatem eorum, quæ hinc inde commendantur, reipsa experturus.

§. 289. Trigonometriam sphæricam non explicamus nisi in usum Astronomiæ & Geographiæ. Quamobrem non plura tradimus, quam quæ huic fini satisfaciunt. Et quoniam Trigonometria sphærica demonstrari nequit, nisi suppositis principiis sphæricis, nec applicari in Astronomia & Geographia nisi mediantibus his ipsis principiis; nec ex hisce addidimus, nisi quæ huic scopo sufficiunt. Etsi itaque Algebra ad doctrinam quoque sphæricorum & Trigonometriam sphæricam applicari possit; usum tamen Algebræ in hac Matheseos parte prætermisimus, cum unice propositum nobis fuerit praxin Trigonometriæ sphæricæ reddere faciliorem. Ne tamen quis existimet, eum vel esse nullum, vel adeo difficilem, ut hactenus detegi non potuerit; provoco ad exempla, quæ dedit *Jacobus Kresa* e Societate Jesu in Analysi speciosa Trigonometriæ sphæricæ, primo mobili &c. applicata, & ad hisce illustriora, quæ extant in Commentariis Academiæ Imperialis Petropolitanæ. Problemata primi mobilis per Algebram soluta si ad Geometriam puram reducuntur non sunt nisi problemata sphærica. Geometræ sane de Sphærica nunquam cogitassent, nisi problemata primi mobilis in Astronomia de ea cogitandi ansam dedissent. Neque dubium est, initio hanc Geometriæ partem ab Astronomia sphærica non fuisse separatam, quemadmodum & ipsa Trigonometria non tradebatur nisi in Astronomia.

CAPUT IX.

De
Studio Astronomiæ.

§. 290

Studium Astronomiæ multis sese nominibus commendat omnibus, qui ad solidam rerum cognitionem adspirant, sive secundum cognitionis gradum, sive tertium intendant, & inprimis si quis intellectus perficiendi gratia Mathesi operam navet ac ad scientiam naturalem excolendam animum appellere velit, immo si studio Medico sese mancipandi animum habuerit. Diversi admodum sunt fines, cur quis ad studium Astronomiæ accedit. Quare nec omnibus eodem modo in eodem versandum, cum diversos fines non eodem modo consequi detur. Nostrum igitur est docere, quid unicuique faciendum, ut finem a se intentum consequatur.

§. 291. Sunt qui curiositatis tantummodo gratia Astronomiam addiscendam esse sibi persuadent, cui tanto magis satisfaciendum existimant, ne ignorent ea, quæ in Calendariis extant, non decere virum eruditum arbitrati, ut Calendarium quotidie in manu habeat, non tamen intelligat, quæ in eodem traduntur. Sunt alii, qui istis oculatiores longius prospiciunt, & adolescentibus ob curiositatem commendant studium astronomicum, ut eadem excitetur sciendi cupiditas & magis magisque inflammetur. Sane non alio fine in Scholis introductus est *Joannis de Sacro Busco* libellus de sphæra, cui deinceps alii substituere alios libellos usum Globorum & computum ecclesiasticum exponentes. Etsi enim ea fini etiam Theoricas Planetarum consignaverit *Purbachius*; cum tamen Theorica magis conducere visa iis, qui ex instituto Astronomiæ operam navaturi sunt, quam promiscue omnibus, & ipse *Purbachius* potissimum intenderit, ut ad studium astronomicum fere neglectum ac desertum aditum aperiret & animos juve-

juvenum ad idem persequendum accenderet; Theorica ex scholis proscripta in Academias relegata, ubi præter Professorem Mathematum inferiorum, qui Mathesin puram cum Geometria practica & Staticæ elementis interpretari debebat, etiam constitutus Professor Mathematum Superiorum, qui Astronomiam cum Geographia, Chronologia, Gnomonica & Astrologia doceret. Unde hodienum in Academia Wittebergensi & Hafniensi duo sunt Mathematum Professores, alter Mathematum inferiorum, alter superiorum. In Scholis itaque inferioribus, in quibus adolescentes ad lectiones academicas præparandi, sufficere visum, si Astronomiæ sphæricæ & computi ecclesiastici prægustum quendam haberent, & figuras geometricas construere addiscerent. Unde memini in Gymnasiis quoque patriis, Vratislaviensibus scilicet, cum ego adolescens Magdalenæum frequentarem, Professorem Matheseos nonnisi constructiones figurarum cum definitionibus Geometriæ elementaris, usum Globorum & computum ecclesiasticum docuisse. Et quamvis insigni cupiditate methodum mathematicam cognoscendi jam tum flagrarem, nec minor esset Algebræ addiscendæ ardor, quod illa certam acquiri posse cognitionem, cui contradicere nemo ausit, hac vero proprio Marte veritates incognitas investigari audivissem; nemo tamen erat, qui sitim meam restinguere valeret, immo non deerant, qui studium Matheseos dissuaderent, aut saltem affirmarent, me ejus auxilio non consecuturum, quod sperabam. Ego vero nunquam ab ea opinione me dimoveri passus sum, cujus quidem rationes hic exponi nil attinet.

§. 292. Qui adeo solius curiositatis gratia Astronomiam addiscere volunt, iis sufficit historica veritatum præcipuarum cognitio. Nimirum primo ipsis legenda sunt, quæ capite primo Astronomiæ sphæricæ quoad observationes communes & principia inde stabilita traduntur. Neque enim integro hoc capite continetur quidpiam, quod captum Mathematum imperiti excedat, & quocunque quis animo ad Astronomiam accedat, ea

ignorare non debet, quæ in eodem continentur. Deinde ex secundo capite, quod de circulis sphæræ mundanæ agit, definitiones circulorum & aliorum nonnullorum ad eos spectantium sibi familiares reddat, omissis ceteris omnibus: In capite vero quarto legat scholia probl. 16. §. 244. *& seqq.* quæ de catalogo fixarum & asterismis ac magnitudine apparente illarum loquuntur. Addi possunt hinc inde scholia quædam alia, quæ utrum contineant, nec ne, quod videatur notatu dignum, quilibet facile per seipsum judicabit. Hinc statim accedat ad caput sextum, in quo constructio & usus Globi cœlestis in ipsius potissimum usum docetur. Neque male sibi consulet, si in capite septimo perlegat de refractione & parallaxi, quæ in definitionibus & scholiis habentur & sub rubrica observationum reperiuntur: id quod etiam intelligendum de crepusculis, quibus destinatur caput 8. seu ultimum Astronomiæ sphæricæ. Et hæc satis faciunt etiam adolescentibus ad studium Astronomiæ præparandis quoad partem sphæricam. In parte Theorica iis, qui solius curiositatis gratia Astronomiam addiscunt, commendanda sunt capita tria priora de natura Solis ac Lunæ ceterorumque Planetarum & mundi systemate, si pauca quædam problemata excipias, quæ prætermitti possunt. Poterunt etiam prætermitti theoremata, quæ in usum systematis mundani evincendi proponuntur §. 571 & seqq. Sufficit enim ut saltem theorema 27. §. 612 & theorema 28. §. 630 cum subjectis scholiis legat, demonstratione prioris insuper habita. De Theoria Planetarum, quæ capite quarto traditur, non plura cognoscere tenetur quam hypothesin: non tamen prorsus inconsultum est, ut addat definitiones, quarum in Theorica usus, propterea quod hi termini in Calendariis quoque occurrunt, quæ intelligere vult curiositatis gratia Astronomiæ operam aliquam impendens. Quod ad Lunam attinet, præter definitiones & observationes a §. 816 usque 822 non est, quod curiosus tantummodo lector attingere teneatur. Et ex capite sexto tantummodo distantias planetarum. Terra

ex §. 906 earumque magnitudines ex §. 922 haurire debet. De adſpectibus capite ſeptimo ſufficiunt eidem definitiones §. 926 – 935 cum definitionibus eclipſium §. 937 & §. 982. Denique ex capite ultimo de ſtellis fixis & novis atque Cometis ſufficiunt theoremata absque demonſtrationibus & obſervationes, omiſſis vero problematis. Ea abunde ſatisfaciunt, ut de rebus aſtronomicis verba facere poſſit, quando occaſio tulerit in ſermone communi, & intelligere, quæ in Calendariis de iisdem habentur.

§. 293. Quodſi quis cognitionem hiſtoricam Aſtronomiæ accuratiorem deſiderat, is omnia, omiſſis demonſtrationibus, ea induſtria perlegere debet, quam pro primo cognitionis gradu præſcripſimus. Quodſi tamen praxin non curat, nec opus eſſe videtur, ut ſingula problemata perluſtret. Abunde ſufficit, ſi theoriam planetarum primariorum perſpectam habeat & calculi eclipſium ideam aliquam animo concipiat. Permittendum adeo eſt unicuique, quo usque ipſum trahat ſua voluptas. Vix enim alius finis intendi poteſt, quam ut notitia rerum aſtronomicarum animum delectet. Quoniam itaque ſola voluptas menſura eſt eorum, quæ addiſcenda ſunt, uniuſcujusque omnino relinquendum eſt judicio, quantum eidem ſatisfaciat. Quemadmodum illam ſuo quisque modulo metiri debet, nec ex ſe judicare licet alios; ita quoque determinari nequit, quænam unicuique conducant.

§. 294. Cognitio Aſtronomiæ hiſtorica quod partem ſphæricam facilitatur continuo uſu Globi cœleſtis, qui ſemper ad manus eſſe debet. Etenim definitiones multo facilius intelliguntur, ſi ea, quæ declarant, in ſuperficie Globi repræſententur, cum imaginatio nihil amplius faceſſat negotii ob conſenſum ejus cum ſenſu ſeu viſu. Si ſchemata in plano delineantur, quemadmodum fieri ſolet & a nobis quoque factum eſt; ſenſus non revera exhibet, quod repræſentare debebat, ſed ſaltem dirigit imaginationem, ut vi vocabulorum, quæ in definitione continentur, ſibi formet ideam ejus, quod cognoſci debet. Sumamus

mamus exemplum facile, ut quæ dicuntur recte intelligantur. Declinationem stellæ definimus per distantiam ejus ab æquatore. Cumque distantiam a circulo maximo esse ostenderimus arcum circuli maximi inter duo puncta in superficie sphæræ intercepti & ad circulum maximum perpendicularem (§. 76 *Sphæric.*); ideam declinationis formaturi imaginari debemus circulum maximum in superficie sphæræ, qui per centrum stellæ seu punctum in sphæræ superficie datum & per æquatorem transit, & hunc ad angulos rectos secat. Quamobrem cum porro constet (§.28 *Sphær.*), hunc circulum transire debere per polos æquatoris, quos eosdem esse cum polis mundi constat (§.48 *Astron.*); nobis imaginari debemus sphæram cavam, in cujus centro oculus collocatus, & in eadem duos polos, circa quos vertitur, una cum æquatore intervallo quadrantis in superficie sphæræ descripto & circulo transeunte per polos & stellam, seu punctum in superficie datum transeunte, qui secat æquatorem. Ita enim demum idea repræsentabit declinationem. In plano *Tab. I. Fig.* 3. circulus NAZQ repræsentat sphæram mundanam, puncta P & K polos mundi diametraliter oppositos, AQ æquatorem ex altera hemisphærii parte, in qua sumitur stella S sive punctum quodcunque datum. PSK repræsentat circulum, qui per polos mundi P & K atque punctum datum S transit in eadem hemisphærii parte & æquatorem in G secat. Unde arcus circuli maximi GS repræsentat Declinationem stellæ seu puncti S. Hinc liquet, quomodo definitiones primum explicandæ sint per figuras in plano delineatas. Enimvero cum idea hujus schematis non sit ea, quæ rem ipsam, prouti concipitur, repræsentat, sed vicariam saltem operam præstet; imaginationis est eam transformare in ideam veram. Loco igitur circuli APQNA nobis imaginamur sphæram cavam, in cujus centro oculus constitutus, in ejus superficie imaginamur porro duos polos P & K sibi diametraliter oppositos & æquatorem ab utroque polo undiquaque eodem intervallo distantem, tandemque circulum alium per stellam in eadem superficie

ficie ſumtam & duos polos tranſeuntem, qui neceſſario æquatorem ſecat. Atque ita demum imaginatio veluti viſui percipiendam exhibet declinationem SG. Nemo non videt non ſine exercitio vim iſtam acquiri, quæ imaginationi ad iſtam transformationem idearum ſufficit, immo ipſam imaginationis vim jam extendendam eſſe, ut ſatis clare repræſentet quod percipiendum. Enimvero ſi globus fuerit ad manus, cum in ejus ſuperficie deſignati ſint poli & æquator deſcriptus ac præterea Meridianus circulus per polos mundi tranſiens, ſub quo ob ejus volubilitatem circa polos & ſitum Meridiani fixum quodvis ſuperficiei punctum pro arbitrio conſtitui poteſt; non alia re opus eſt, quam ut ſtella conſtituatur ſub Meridiano, ita enim ejus arcus inter eandem & æquatorem interceptus repræſentat declinationem, qualem imaginatio percipiendam exhibere debet. Atque ita ſenſus cum eadem conſentit. Non eſt quod excipias, Globum exhibere in ſuperficie convexa, quod imaginatio transferre debet in concavam, conſequenter nec hic ſenſum cum imaginatione conſentire. Etenim quis non videt, cum non neceſſarium ſit ut oculus collocetur in centro ſphæræ, fingi poſſe quod is extra ſphæram collocetur? quod ubi imaginamur, imaginatio a ſenſu non diſſentit. Quodſi vero imaginationis vi ipſam ſphæram mundanam repræſentare velis, qualis nobis apparet, dum noctu cœlum ſtellis ſuperbiens contuemur; multo jam facilius accidit ea, quæ oculo extra ſphæram mundanam per fictionem conſtituto apparent, eidem in centrum ſphæræ retracto tanquam in concava percipienda exhibere.

§. 295. Non dubito fore haud paucos, qui nodum in ſcirpo quæri exiſtimaturi ſunt, & ſine iſtiusmodi ſcrupuloſitate Aſtronomiæ cognitionem hiſtoricam acquiri poſſe tanto confidentius ſibi aliisque perſuaderi conabuntur, quod experientia teſtetur ex ſchematiſmis in plano delineatis ſatis intelligi abſque ulla opera, quæ per definitiones explicantur & in reſolutionibus problematum præcipiuntur. Enimvero quis vitio vertet Philoſopho, quod diſtincte explicet

usum facultatum, quem alii de eodem parum cogitantes faciunt, præsertim eo fine, ut simul ostendat, quomodo usum istum facilitare liceat? Homines & animalia moventur absque cognitione regularum Saticæ, nec norunt, quem faciant eorundem usum, dum easdem inviolabiliter observant. Ecquis vero reprehendit *Borellum*, quod in egregio opere de motu animalium ex regulis Staticæ eundem demonstrandum sibi sumserit? Si quis fuerit Astronomus, qui in Psychologia simul versatus, ut acumine suo discernere possit, quæ modificationibus animæ insunt; is utique agnoscet vera esse, quæ de idea vi imaginationis formanda ad clare percipienda, quæ in Astronomia sphærica docentur, in medium attulimus (§. 294).

§. 296. Quemadmodum vero illam idearum transformationem juvat præter Globum coelestem sphæra etiam armillaris; ita non inutile foret, si ad similem usum in parte Astronomiæ sphærica obtinendum adhiberentur Instrumenta levi sumtu parabilia, quibus phænomena motus secundi apte repræsentarentur, non quidem ea accuratione, ut calculi vicem subire possent, sed quantum sufficit, ut motus secundus seu proprius distincta notione comprehendatur. Intendebat hoc *Purbachius* cum suis Theoricis Planetarum: sed cum Astronomiæ parte theorica per *Copernicum* inprimis ac *Keplerum* reformata nullus amplius illarum sit usus, alia prorsus forma fieri hodie deberent instrumenta ad motus secundi phænomena eodem modo repræsentanda, quo ope Globi artificialis repræsentantur phænomena motus primi. Equidem non ignoro, non defuisse aliquos, qui de motu secundo Planetarum organice repræsentando cogitarunt; sed desunt instrumenta, quæ ad communem discentium usum adhiberi possent. Neque vero negandum est in Theoricis defectum istiusmodi instrumentorum esse tolerabiliorem quam in sphæricis, quia per schemata in plano descripta non adeo confunditur imaginatio, quam in sphærica, & quod ad Theoricam demum accedas sphærica absoluta, consequenter ubi notionibus astronomicis jam adsuetus animus.

§. 297.

§. 297. Qui propter praxin Astronomiæ operam navant, cum ea varia sit, nec omnes eodem modo in ea versari debent. Constat ad praxin Astronomiæ facilitandam conditas esse Tabulas tam primi mobilis, quam motus Planetarum. Illarum usus est in parte sphærica; harum vero in Theorica. Quibus adeo calculus astronomicus curæ cordique est, illi usum Tabularum multiplici computatione sibi familiarem reddere tenentur. Præfiguntur Tabulis præcepta calculi, quæ non in omnibus sunt prorsus eadem. Quamobrem ut ea intelligantur, cognitio saltem historica ex Elementis Astronomiæ præmittenda: Quo accuratior hæc fuerit, eo melior. Equidem fieri potest, ut calculum astronomicum juxta Tabulas absolvat, qui terminos tantummodo cognitos atque perspectos habet; sed in tenebris quasi versatur, qui nihil prorsus rationis regularum perspicit. Suadendum igitur est, ut theoriæ tam sphæricæ, quam theoricæ cognitione historica animum imbuas, antequam ad calculum accedas. Dedimus ipsimet præcepta calculi astronomici, eademque exemplis illustravimus. Quamobrem qui ad hanc praxin adspirat, ad ea animum advertere tenetur. Exemplorum typum ita repræsentavimus, ut ideam exemplarem calculi animo ingenerare possit, quæ regularum vicem tueri potest, ubi plura exempla computaveris & eadem forma calculum descripseris. Antequam autem satis exercitatus fueris, ut tibi fidere possis, quod nulla ex parte aberraveris; exempla computanda sunt, quæ in Ephemeridibus habentur, ut cum iis conferre queas, quæ calculus tuus prodit.

§. 298. Tabulæ astronomicæ non alio fine conduntur, quam ut calculus reddatur facilior & brevior. Computantur autem ex observationibus calculo geometrico, aut, si mavis trigonometrico. Quamobrem Tabularum conditoribus calculus geometricus perspectus esse debet. Formam quoque hujus calculi cognoscere tenetur, quicunque solidam Astronomiæ scientiam acquirere debet. Nos in Elementis nostris hunc calculum non modo regulis perspicue ac distincte propositis comprehendimus;

verum etiam exemplis illustravimus & typum calculi ita exhibuimus, ut in praxi commode regularum vice fungatur, ipseque calculus prolixus ab omni perplexitate & molestia liberetur. Usi nimirum hic sumus eodem artificio, quo calculum algebraicum facilitare studuimus. Quamobrem si quis praecepta calculi cum typo conferat; non habebit, quod conqueratur de obscuritate, sed plena luce fruetur in iis intelligendis, modo in Trigonometria fuerit versatus, cujus problemata familiaria supponuntur, nec ignoret terminos, quos ex definitionibus perspectos habere debet. Neque enim accedendum est ad calculum geometricum, nisi intellectis terminis astronomicis & Trigonometriae tam sphaericae, quam planae praxi in potestatem suam redacta. Si quis numeros datos variaverit, in aliis exemplis calculi typum imitaturus; is non modo habitum computandi sibi comparabit, verum etiam ideam calculi exemplarem memoriae infiget, ope schematis delineati in memoriam facile revocandam, quoties calculo isto utendum. Atque hoc ipso obtinetur, ut non modo molestia omnis a calculo astronomico arceatur, sed etiam ut animo placido, nec perturbato sanguinis circulo calculos continues per tantum temporis spatium, quantum libuerit, modo tibi non molestum accidat tempus calculis fallere, quod scientiae amplificandae impendere malles. Neque enim taedia ex diverso fonte propullulantia pro diversitate inclinationum naturalium, quibus natura homines a se invicem differre voluit, in unum confundenda errore manifesto iis, qui in Psychologia cum laude sunt versati. Quodsi vero praecepta calculi, quae numeris suis distincta sigillatim exhibuimus, tranquillo animo lente festinans perpendas; formae calculi notionem distinctam consequeris usus regulis, quas in Logica pro acquirenda notione distincta praescripsimus, etiamsi illas nunquam didiceris, nec, dum juxta eas determinas facultatum cognoscendi usum, earum tibi conscius fueris. Quantum hoc conducat ad perficiendum intellectum, ut etiam extra Mathesin distincte concipere adsuescas, quae meditaris, & ordine in meditan-

ditando cogitationes tuas promoveas; nunc demonſtrare nolo, etſi demonſtratio ex Pſychologiæ ac Logicæ principiis dari poterat, utpote aſſenſum non niſi eorum extorſura, qui Metaphyſicæ, prouti a nobis tradita, jam operam debitam navarunt. Sufficit monuiſſe, quod credendum ſit experto, & oculata futura ſit fides ſingulis, quotquot conſilio noſtro aurem benignam præbere non dedignati fuerint. Qui Aſtronomiam non ſibi diſcunt, ſed intellectus perficiendi gratia eidem incumbunt, id quod faciendum plurimis, cum paucis admodum Aſtronomis opus habeat genus humanum; illis formam calculi animo concepiſſe ſufficit, nec opus eſt, ut in eodem ſint exercitati. Quatenus tamen exempla lucem affundunt præceptis, non inconſultum eſt, ut unicum ſaltem, quod exhibuimus, exemplum computent, ſingulis præceptis ad idem applicatis, præſertim cum etiam extra Matheſin, in Philoſophia præſertim practica, magna ſit exemplorum vis, quemadmodum in parte altera Philoſophiæ practicæ univerſalis demonſtravimus, atque adeo utile ſit ad Philoſophiam animum appellenti præcepta ad exempla dextre ac expedite applicare. Ecce igitur tibi uſum univerſalem eumque maximi faciendum, ob quem hæc pars ſtudii aſtronomici promiſcue commendari meretur omnibus, quos ſolida rerum cognitio juvat, etſi ætatem omnem in calculis aſtronomicis conſumere nolint, immo etſi futurum vitæ genus minime ferat, ut notitiam multo labore acquiſitam conſervent. Quoniam enim ea conſervari hoc non obſtante poteſt intellectus habitudo, quam hoc ſtudio acquiſiviſti; non eſt quod conquераris, te in ſpem futuræ oblivionis diſcendo ea, quæ tibi nulli uſui ſunt, tempus inutiliter conſumſiſſe.

§. 299. Peculiaris quoque praxis aſtronomica eſt phænomena ſiderum obſervandi, omnis praxeos reliquæ baſis. Ex obſervationibus enim calculo geometrico eruuntur, quæ in Aſtronomia ſcire intendimus, nec absque iis calculi hujus beneficio conduntur Tabulæ, quarum in praxi tam commodus eſt uſus. Immo abſque obſervationibus non licet perficere Tabulas, ut

major ſit earum cum cœlo conſenſus. Ne igitur hac in parte quoque deeſſemus, modum quoque obſervandi expoſuimus, ut aliquam ejus ideam animo concipere detur. Nemo autem a nobis requiſiverit, ut omnia minutiſſime perſequamur, quæ ad dexteritatem in obſervando faciunt. Quodſi enim quis obſervatorem agere voluerit, is non modo intellectis iis, quæ a nobis traduntur, legat Autores ſupra commemoratos, cum ſcripta Aſtronomorum recenſeremus; verum etiam in obſervatorio aliquo celebri, quale eſt Pariſinum in Gallia & Grenovicenſe in Anglia, per aliquod tempus commoretur, ut, quæ ad obſervandi dexteritatem faciunt, ab Obſervatoribus exercitatis addiſcat. Quamvis enim impoſſibile non ſit, ut eandem multo exercitio per ſe aſſequatur, ſi in obſervando ſedulus ac continuus ſit; facilius tamen longe accidit, ubi alios præeuntes imitamur, quam ſi demum multa circumſpectione ipſimet detegere ea debeamus, quæ ad obſervationem accuratam conducunt. Quodſi quis inſtrumenta modumque obſervandi veterum cum recentioribus & recentiſſimis conferre voluerit; is animadvertet cum theoria Aſtronomiæ creviſſe quoque obſervationum perfectionem. Unde conficitur, eum, qui obſervationibus aſtronomicis vacare voluerit, theoriam quoque Aſtronomiæ ſibi perſpectam reddere debere. Immo ex iis, quæ in noſtris Elementis demonſtrantur, jam patebit, obſervatorem in calculo quoque aſtronomico, ipſo etiam geometrico verſatum eſſe debere. Sane qui obſervatorem agere voluerit, Aſtronomiam omnem tam theoreticam, quam practicam intime perſpectam habere debet. Ad obſervandum requiruntur inſtrumenta &, ſi obſervationes accuratæ eſſe debent, accuratis quoque opus eſt inſtrumentis. Quamobrem qui obſervationibus aſtronomicis ſeſe dare voluerit, inſtrumentorum quoque fabricam, uſum & examen intime perſpicere debet. Notio inſtrumenti adæquata eſſe debet, qualis ſufficit ei, qui artificem ejus fabricam docere vellet, aut, ſi arte polleret, ipſemet idem conſtrueret. Rationes ſingulorum in fabrica obſervandorum ex theoria

theoria Astronomiæ reddendæ, ut scientifica sit instrumenti cognitio. Usum accuratum determinat Astronomiæ theoria ad constructionem instrumenti applicata. Construitur enim instrumentum in certum finem, veluti magnus Gnomon ad observandas altitudines solis meridianas per singulos anni dies, ex theoria autem Astronomiæ constat, quanta exactitudine finem intentum consequi debeamus. Instrumenti igitur is fieri debet usus, quem finis consequendus exigit. Examina non modo pro diversitate instrumentorum, verum etiam pro uno eodemque instrumento varia esse possunt. Eo autem tendunt omnia, ut inde constet, instrumenta esse accurate facta, atque adeo iis in observando fidendum esse, si quidem certus sis te debitam in observando diligentiam adhibuisse. Ad hæc examina referendum, si quis instrumentum suo eadem ἀκριβείᾳ phænomenon observat, qua ab aliis celebribus Observatoribus alias fuit observatum, veluti si quis per telescopium suum Saturni easdem phases videt, quales primus exquisitissimis telescopiis observavit *Hugenius*. De Examinibus istis specialia in medium afferre non licet. Supponunt enim accuratam Instrumentorum descriptionem, qualem hic dare non licet. Sufficit adeo monuisse, quod istiusmodi examinibus opus sit, ne magno conatu ac maxima diligentia nihil agas. Observationes astronomicæ sunt paucissimorum, propterea quod non cuilibet, qui Astronomiæ studio delectatur, gaudet supellectili ad observandum necessario fruiturque otio ac commoditate observandi. Quamobrem in nostris Elementis nonnisi ea tradidimus, quæ sufficiunt, ut itelligatur, qualibus observationibus opus habeat Astronomus.

§. 300. Qui secundum cognitionis gradum intendunt, elementa Astronomiæ integra eodem modo perlustrare tenentur, quem supra pro cognitionis gradu secundo acquirendo præscripsimus. Eum enim in finem elementa Astronomiæ eadem methodo conscripsimus, qua elementa Geometriæ condidimus, etsi communiter Astronomi continuo discursu, quemadmodum vulgo faciunt Autores, sua

proponant, sit ita quod demonstrationes eidem interserant: quem morem etiam hodie Geometræ sequuntur in schediasmatis præsertim, quibus inventa sua orbi literato communicant in Diariis Eruditorum & Commentariis Societatum Regiarum. Constat ipsum *Ptolomæum* eundem morem tenuisse in Almagesto suo. Negari tamen non potest, quod methodus *Euclidea*, quam nos adhibuimus, multo sit clarior, præsertim si omnia rigide demonstranda, nec sumenda, quorum demonstratio lectoris industriæ relinquitur, neque etiam immiscenda, quæ prorsus non demonstrantur. In parte etiam sphærica ex principiis sphæricis rigide demonstravimus, quæ vulgo ab Astronomis fiducia illorum principiorum sumuntur, ne evidentiam desiderent tyrones, inprimis ubi elementa Geometriæ tam scrupulosa industria pertractarunt, quam supra præscripsimus, & qua omnino opus est, siquidem ideam methodi demonstrativæ exemplarem in usum philosophiæ ex Mathesi haurire volueris. Neque porro negari potest, studium Astronomiæ hoc pacto facilitari. Sane non alia de causa *Purbachius* studium Astronomiæ amplificaturus & ad captum tyronum accommodaturus Almagestum *Ptolomæi*, idem methodo *Euclidea* digerere cœpit, telam vix cœptam post obitum ejus jure legati pertexente *Regiomontano*. Non igitur fecimus, nisi quod judicio *Regiomontani*, Astronomi summi, probetur. *Regiomontanus* nullis problemata illustravit exemplis: id quod tamen apprime necessarium esse ex iis, quæ modo in antecedentibus inculcavimus, abunde elucet. Præterea ipsa res loquitur, quod, cum is nonnisi Almagestum *Ptolomæi* in formam Elementorum *Euclidis* redigere voluerit, idem non tradat nisi Astronomiam antiquam, a qua recentior plurimum differt præsertim in Theorica, ut adeo dici nequeat nos actum egisse. Quemadmodum vero Elementa Geometriæ *Euclidea* multo clariora & evidentiora reddidimus, tum quod demonstrationes fecerimus completas & ordinatas, quales esse debent, si quis methodum demonstrativam in usum philosophandi addiscere voluerit, tum quod resolu-

ſolutiones problematum magis diſtincte exhibuerimus; ita idem obſervavimus ut in ceteris Matheſeos partibus, ſic etiam in Elementis Aſtronomiæ. Obſervationes præterea, quales in Matheſi pura nullæ occurrunt, ſigillatim quoque ita recenſuimus, ut præter facta non contineant; ea vero, quæ inde concluduntur, per modum corollariorum deduximus, quemadmodum vult Logica verior & fieri debere in Logica noſtra evicimus: id quod etiam in diſciplinis Opticis jam fecimus. Sicuti enim methodus demonſtrativa in iis, quæ operationibus intellectus perficiuntur, ad amuſſim obſervat regulas in Logica præſcriptas; ita etiam in iis, quæ ſenſuum uſu ſub directione intellectus innoteſcunt, ejusdem regulas ſequi debet. Nihil adeo a nobis prætermiſſum exiſtimamus, quod methodus accurata exigere poterat. Cum in Theoricis nonnulla dentur, quæ rigide demonſtrata eſſe dici nondum poteſt, etſi rationi & experientiæ admodum conſentanea videantur & quæ in uſum Aſtronomiæ practicæ ſumenda eſſe unanimiter hodie conſentiunt Aſtronomi, veluti quod Terra moveatur motu vertiginis & motu translationis circa ſolem (§. 622), & deſcriptio ſyſtematis mundi (§. 630); demonſtrationis quoque titulum omiſimus, ne contra regulas Logicæ de demonſtratione pro tali venditemus, quæ non eſt, ut ut ab incautis vulgo pro tali habeatur. Nulli igitur dubitamus fore, ut certam nobiliſſimæ ſcientiæ cognitionem ex Elementis noſtris hauriat, qui non perfunctoria opera in iisdem verſari voluerit. In Theoricis ſecuti ſumus hypotheſin *Kepleri*, quam cum cœlo magis conſentire ceteris hypotheſibus commentitiis omnibus in confeſſo hodie eſt apud Aſtronomos omnes fiducia obſervationum, quibus in Aſtronomia omnia dirimenda. Quamobrem quoque placuit calculum geometricum explicare, qualem dedit *Keplerus* in Commentariis de ſtella Martis & in Epitome Aſtronomiæ Copernicanæ, ut & conſtructio Tabularum Rudolphinarum, & calculus Rudolphinus intelligatur. Quoniam tamen hodie majore fruimur luce in Geometria, quam *Kepleri* ævo; ea quoque addidimus, quæ lubens ipſe in theo-

theoriam suam recepisset, siquidem ipsi ea videre licuisset.

§. 301. Neminem vero, qui Dioptricam ante didicit, quam ad Astronomiam accederet, quemadmodum omnino fieri debet ob eximium telescopiorum in omni Astronomia usum, offendet, ubi observaverit in Theorica quædam sumi, quæ in rigore geometrico vera non sunt, ad veritatem tamen propius accedunt. Etenim in cognitione Naturæ mathematica, ad quam etiam Astronomia referenda, præsertim si more *Kepleriano* tractetur, non attendendus est rigor geometricus, modo constet quæ eodem invito sumuntur ad veritatem prope accedere, præsertim ubi theoria quæritur propter praxin, ubi approximationes æquipollent veritati. Vidimus quoque in Mechanica istiusmodi hypotheses in locum hypothesium naturæ utiliter substitui, immo si praxin unice respicias, substituendas esse. Quoniam tamen ad Astronomiam accedere licet, Mechanica seposita, statim a Geometria elementari & Trigonometria utraque; non inconsultum duximus denuo inculcare, quod attento lectori ex anterioribus jam patere poterat. Neque hoc abhorret a more priscorum Astronomorum, cum tamen antiquissimis temporibus rigor demonstrandi maxime sese probaret Geometris. Etenim in computo eclipsium pro arcubus circulorum sumserunt, quemadmodum adhuc fieri solet, lineas rectas pro arcubus circulorum & triangula sphærica in plana converterunt ad facilitandum calculum, propterea quod non committitur error sensibilis sed qui observabili minor: error autem observabili minor in Astronomia practica habetur pro nullo. Huc etiam referri debet, quod in doctrina primi mobilis semidiameter Telluris habeatur pro puncto respectu distantiæ fixarum. Quando vero dicimus, in demonstrationibus astronomicis non semper observari rigorem demonstrandi; id non intelligendum de forma, sed de materia demonstrationis. Constat nimirum ex Logica, formam probationis semper eandem esse debere, nec ab ea unquam recedendum, si methodus accurata esse debet: id quod etiam

am uſui eſt in rigore demonſtrandi agnoſcendo, ne quis ſibi perſuadeat ſupponi, quæ vera ſunt, ſibi autem in memoriam venire nequeunt. Nullo igitur modo probamus, ſi rigor demonſtrandi quoad formam negligatur, quicquid etiam videatur aliis. Notandum vero & hoc eſt, in Aſtronomia a rigore demonſtrandi quoad materiam recedi absque ullo ſcientiæ detrimento, quemadmodum etiam in Dioptrica contingit. Quod enim ſumitur contra veritatem, eadem tamen non invita ſumitur, quia quod ſumitur quoad praxin in locum veri ſurrogare licet, nec ſine utilitate. Alia vero longe ratio eſt, ſi dubium ſumitur tanquam verum non ſine formidine oppoſiti Hoc enim in caſu ſubeundum eſt periculum errandi, quale non metuendum in præſenti caſu. Sunt equidem etiam in Aſtronomia, quæ dubia ſunt, & ad certitudinem hactenus deduci minime potuerunt: ſed ea a ceteris ſatis aperte diſtinguimus, ne cum certis confundantur. De hiſce plura mox monebimus in ſequentibus. Non vero vitio vertitur Aſtronomo, ſi in dubiis acquieſcit, ubi certitudo haberi nequit: illud demum vitio vertendum fuerat, ſi dubia pro certis venditaret. A priori nullum damnum metuendum ſcientiæ; a poſteriori autem detrimentum patitur ſcientia. Ingenue confitentur Aſtronomi, ſe a certitudine adhuc abeſſe, ubi eam nondum conſecuti; minime autem certa & explorata videri volunt, quæ non ſunt. Immo ſi contingat a vero aberratum eſſe, obſervationibus contrarium ejus, quod ſtatutum fuerat, loquentibus; diſſenſum ab obſervationibus minime diſſimulant, multo minus erroribus incruſtandis ac pertinaciter defendendis operam impendunt, prouti eruditis ceteris ſolenne. Veritatem nimirum quærunt, quam ubi nondum invenerunt, eandem inveniſſe videri nolunt, ne ſibi non minus quam aliis ad eam inveniendam viam præcludant. In iis quoque, quæ dubia ſunt, unus non ægre fert diſſenſum alterius, quantuſcunque fuerit, nec propter diſſenſum unus alterius laudi detrahit, multo minus eundem inſectatur, quemadmodum denuo ab aliis eruditis fieri aſſolet. Quamobrem

& nos in dubiis adversas sententias recensuimus citra injuriam in ullum dissentientium, & unicuique liberum reliquimus, cuinam illarum accedere velit, aut num inter extremas mediam amplecti malit.

§. 302. Qui ad tertium cognitionis gradum adspirant, sive in Mathesi acquiescere, sive intellectum in usum philosophandi perficere velint, iis multa suppeditabit astronomia. Et enim a parvis initiis continuo crevit, & per multiplices ambages ad ea tandem accessit, quæ a cogitione humana maxime remota videbantur. Ad progressum adeo Astronomiæ animum maxime attendere debet, qui artificia cognoscere studet, quibus abdita naturæ rimari datur. Pars ejus sphærica multo facilior theorica. Quamobrem de illa nobis primum sigillatim dicendum. Capite primo recensuimus observationes communes ac inde prima Astronomiæ sphæricæ principia stabilivimus. Observationes communes sua sese sponte offerunt cœlum contuentibus, nec vulgi captum transcendunt. Atque adeo liquet prima principia esse Astronomo cum vulgo communia. Neque etiam aliter fieri potuit, quam ut, qui primus de Astronomia cogitavit, aliunde notiones aliquas distinctas acquireret ad ulteriora profuturas, quam reflectendo super iis, quæ nemo ignorat nisi rationis usu omni destitutus. Per hasce communes observationes cœlum percipitur instar sphæræ cavæ, in cujus centro Terra est, cui insistimus, & cujus superficiei affixæ sunt stellæ, quæ autem circa Terram continuo revolvitur. Vulgo hæc notio confusa est; sed Astronomus, qui notionem sphæræ distinctam ex Geometria hausit, eam applicans ad ea, quæ percipit, distinctam consequitur notionem. Atque ita Astronomiæ studiosus, immo primus ejus inventor ultra vulgus sapere cœpit, dum notione communi ad distinctam revocata aditum sibi ad ulteriora pandit, cum vulgus in confusa acquiescens ulterius progredi nequeat, sed in iis, quæ percipit, subsistere teneatur. Quæritur vero jam, an quod apparet revera quoque ita se habeat, nimirum an cœlum sit sphæra cava, an Terra sit in centro ejus ibidemque quiescat, an

an cœlum circa eandem continuo rotetur, an ſtellæ omnes ſuperficiei ejus ſint affixæ? Hoc pacto liquet, quomodo ſtatim inventori plura invenienda ſeſe offerant. Quodſi ponas eum eſſe circumſpectum, ne per præcipitantiam ſtatuat; ad quæſtiones haſce animum advertens, eas omnes hinc pendere animadvertit, num ſemper quod apparet ita quoque revera ſeſe habeat. Ponamus Opticam nondum eſſe inventam, quemadmodum probabile eſt Aſtronomiæ eandem ortum ſuum debere: nemo non videt recurrendum fuiſſe ad obſervationes commmunes de iis, quæ nobis apparent. Videtur nobis cœlum ſphæra cava, in cujus centro ſumus, quod ſtellæ omnes eandem diſtantiam a Terra habere videntur, nullumque corpus aliud inter oculum & ſtellas interpoſitum apparet. Quodſi ergo experientiam communem conſulimus, objecta remota, etſi aliquo intervallo a ſe invicem diſtent, eodem tamen a nobis abeſſe videntur, ubi inter ea nullum aliud corpus interpoſitum conſpicimus, veluti dum arborem in agro a ſylva procul adhuc remotam huic conterminam videmus e longinquo. Incertum adeo eſſe cognoſcimus, num cœlum ſit ſphæra cava, num ſuperficiei ejus affixæ ſint ſtellæ, num denique Terra ſit in centro. Cumque ex obſervationibus communibus hæc decidere non detur; quid ſtatuendum ſit, dubitandum, neque hactenus apparet, quomodo a dubitatione liberari queamus. Immo ex progreſſu patebit, non adeo facile fuiſſe, ut ab eadem liberaremur. Non plura ſecula, ſed integri millenarii elapſi ſunt, antequam aliqua ſaltem probabilitatis ſpecie ſtatui potuerit, quid veritati conſentaneum videatur. Liquet adeo, a præcipitantia non abeſſe, qui ſcepticiſmum amplectuntur, quamprimum animadvertunt ſe a dubitatione liberari non poſſe, adeoque veritatem fruſtra quæri ſibi aliisque perſuadent. Quodſi jam porro diſpiciant, num quod quieſcere videtur, revera quieſcat, & quod moveri videtur, revera moveatur; obſervationes denuo communes loquuntur, quieſcentibus in re celerrime mota, quæ quieſcunt in partem contrariam ferri videri, veluti dum curru cele-

celerrime vecto per ſylvam arbores nobis in eodem ſedentibus in plagam contrariam currere videntur, vel dum littora moveri in partem contrariam in navi celerrime mota ſedentibus apparet. Quamobrem denuo in dubitationem adducimur, utrum Terra quieſcat & cœlum circa eandem rotetur, an vero ſtellæ quieſcant & terra motu vertiginis in plagam contrariam convertatur. Liquet autem ut ante ex obſervationibus communibus decidi minime poſſe, a qua parte ſtet veritas. Quodſi ergo qui primi ad Aſtronomiam animum appulerunt, ſcepticiſmo locum dare voluiſſent; omni adhuc Aſtronomia careremus. Enimvero quid faciendum erat in hiſce anguſtiis conſtitutis? Ea tanquam dubia erant notanda, & obſervationes communes ulterius expendendæ, num forſan per eas major lux ſit affulſura, & an nos deducant ad alia intellectui magis obvia. Quodſi hoc facias, in notionem ortus & occaſus incidis, quemadmodum capite primo oſtendimus, quos ubi invicem confers notionem habes moræ ſupra horizontem. Secundam porro obſervationem expendens, continuam ſtellarum ſitus reſpectu verticis tui variationem deprehendis, diſtantia a vertice a primo ejus ortu continuo decreſcente, donec ad minimam pervenerit, & deinde rurſus creſcente, donec ad maximam regreſſa in parte cœli oppoſita occidit. Præterea hinc diſcimus, continuo alias ſtellas oriri, eas autem, quæ per aliquod tempus conſpicuæ fuerant, denuo occidere. Hæc ubi diſtincte conſiderantur, quærendorum ſeſe offert numerus, nimirum quando ſtella aliqua oriatur, quando occidat, quanto temporis intervallo in parte cœli nobis conſpicua commoretur, ſeu quodnam tempus inter ortum atque occaſum intercedat, quænam ſit minima ejus a vertice diſtantia, quandonam ad eandem perveniat, quo tempore ſingulas intermedias in utraque cœli viſibilis parte acquirat. Nemo non videt, phænomena, quæ quærenda animo inſinuant, pendere ab eo quod cœlum, cujus ſuperficiei ſtellæ affixæ ſunt, videatur circa Terram quieſcentem, in qua fixum tuemur locum, moveri, atque ex hoc aſſumto rationem eorundem reddi poſſe.

Unde

Unde manifeſtum eſt, in gratiam horum phænomenorum, ubi quæſtiones, ad quas nos ea deducunt, reſolvendæ, inſtar hypotheſeos ſumi poſſe, quod cœlum ſit ſphæra cava, in cujus ſuperficie hæreant ſtellæ eidem affixæ, & quæ circa Tellurem in centro ejus quieſcentem continuo gyratur. Quoniam ex anterioribus conſtat, phænomena eadem proditura, ſi Terra in plagam contrariam circa axem ſuum convertatur, cœlo cum ſtellis quieſcente; æquipollentia utriusque hypotheſeos probe perpendenda: ita enim conſtabit, ubi non quæritur niſi quæſtionum illarum, quas commemoravimus, ſolutio, ſalva veritate ſumi poſſe utramvis, conſequenter te in Aſtronomiæ parte prima, quæ de motu communi agit, nos feliciter progredi poſſe, etiamſi ignoretur, quænam harum hypotheſium ſit vera. Enimvero utraque hypotheſis non eadem facilitate ſeſe commendat dictas quæſtiones reſoluturis. In inveniendo itaque & demonſtrando præferenda ea, quæ faciliorem operam parit. Ac ea de cauſa in parte ſphærica Aſtronomiæ ſumitur motus cœli & quies Telluris, ac bona methodus jubet ſumi, etiamſi contrarium verum eſſe invictis argumentis demonſtrari poſſet. Etenim in inveniendo & demonſtrando, præſertim ubi praxin intendimus, hypotheſis vicaria in locum hypotheſeos naturæ ſeu veritatis ſurrogatur, quemadmodum jam vidimus in aliis quoque diſciplinis mathematicis fieri. Hinc itaque eluceſcit, progreſſui Aſtronomiæ ſphæricæ non obeſſe ignorantiam veritatis, ſed eadem in dubio relicta non minus praxi ſatisfieri & in ea ad liquidam veritatem pertingi poſſe, ac ſi a primis dubitationibus prorſus eſſemus liberati. Neque dicendus es a vero aberrare ac erroribus locum dare, modo caveas, ne per præcipitantiam quoad ea erres, quæ ſumis. Etſi enim in præſenti negotio error non noceat, nocere tamen poteſt in aliis, iis ſcilicet quæ ab eo pendent quod eſt, non vero ab eo, quod apparet.

§. 303. Probe ea, quæ modo dixi, perpendant velim, qui ad Philoſophiam animum appellunt, etſi Mathematicis, qui anteceſſorum ſuorum inventa addiſcendo ſibi habitum quendam inve-

inveniendi compararunt, talia puerilia videantur & contemnantur, qui tamen contemtui dant pœnas, quoties de rebus philoſophicis judicium ſibi ſumunt, aut ſuperbo ſupercilio Philoſophiam contemnunt omnem, propterea quod quæ in ea vulgo docentur a certitudine, qualis in Matheſi datur, immenſo intervallo diſtant. Quodſi vero acumine, quo pollent, uſi ad animum revocarent ea, quæ modo dixi; haud difficulter animadverterent, Philoſophiam hactenus in infantia fuiſſe, infantiam vero ejus prorſus convenire cum infantia Aſtronomiæ, quæ, ſi ob eundem ſtatum negligenda, non educanda fuiſſet, nunquam ad virilem ætatem adoleviſſet. Sane non rectius videre licet, quomodo ſcientiæ philoſophicæ, quæ ex communi vulgi notitia tanquam ex ſemine naſcuntur, in primo ortu eſſe debeant, quam ſi ad ortum Aſtronomiæ animum attendant. Quodſi porro eandem attentionem ad progreſſum ipſius afferant; quid fieri debeat, ut Philoſophia quoque humano generi adeo utilis adoleſcat haud difficulter perſpicient Aſtronomos imitaturi, quantum fert differentia, quæ inter cognitionem philoſophicam & mathematicam intercedit. Demus exemplum. Communi experientia conſtat, animam in perceptionibus ſuis dependere a corpore, & viciſſim corpus quoad motus organorum externorum & ſui totius ab anima. Hæc dependentia phænomenon eſt, quale eſt figura ſphærica mundi, cujus ſuperficiei ſtellæ affixæ & quæ circa Tellurem in centro ejus quieſcentem continuo gyratur. Philoſophus perinde ac Aſtronomus notionem confuſam revocat ad diſtinctam animamque a corpore dependere agnoſcit quoad ſpecificationem perceptionum & continuitatem temporis, quo cum mutationibus in organis ſenſoriis contingunt, & corporis ab anima quoad ſpecificationem motuum voluntariorum & continuitatem temporis, quo cum volitionibus animæ contingunt (§.962 *Pſych. empir.*), notitionibus adjutus ontologicis quemadmodum Aſtronomus geometricis. Atque hoc pacto primo paſſu diſcedit a cognitione vulgi, ſibi aditum paraturus ad ulteriora. Quoniam vero novit, notionibus confuſis

fusis non esse fidendum, cum per eas appareant haud raro, quæ non sunt; ad hasce quæstiones delabitur, utrum illa dependentia sit realis, an vero saltem appareat, seu num anima & corpus revera in se invicem agant & a se invicem patiantur, an vero tantummodo in se agere, & a se invicem pati videantur, quemadmodum Astronomus quærit, num cœlum cum stellis fixis circa Tellurem in centro ejus collocatam revera moveatur, an saltem moveri circa eandem videatur & utrum Telluris situs revera talis sit, qualis apparet, nec ne. Experientia communi quæstiones suas dirimi non posse, perinde ac Astronomus agnoscit. Quemadmodum enim hic motum cœli circa Tellurem non observat, neque etiam situm ejus in centro sphæræ mundanæ; ita similiter Philosophus nullam observat actionem corporis in animam, nec animæ in corpus (§. 949. 955 *Psych. empir.*). Quodsi dicas, *Newtonum*, virum perspicacissimum, affirmare, actionem illam mutuam animæ ac corporis in se invicem singulis momentis nos experiri; facilis est responsio. Acumine summo polluit in Geometricis, non vero in Methaphysicis: acumen autem Geometræ, quod ab imaginatione pendet, non est idem cum metaphysico, quod imaginationi prorsus subducitur. Quemadmodum itaque per præcipitantiam judicarunt Astronomi, si qui experiri sese sibi visi fuerint figuram mundi sphæricam, situm Telluris in centro ejusdem & motum continuum circa Tellurem in centro quiescentem; ita quoque per præcipitantiam judicavit *Newtonus*, quando sibi visus fuit experiri actionem mutuam corporis ac animæ in se invicem, qua una substantia in modificationibus suis efficiatur dependens ab altera. Ab hac præcipitantia sibi utique cavisset, siquidem ortum Astronomiæ distincte expendere voluisset Astronomiam non sibi soli addiscens, sed in usum quoque philosophandi. Quod hoc facere debuerit, minime contendimus nullius jus violaturi, quod Natura unicuique concessit, utpote qui ab omni injuria procul remotum habemus animum, multo minus ejus laudi detrahere cupimus, quam summam ipsi

ipsi merito suo magno deferimus, ne quicquam contra humanitatis officia, ad quæ aliis prompte præstanda obligamur, admittamus. Veritati non minus debetur honos suus, quam hominibus præclare de eadem detegenda & ejus thesauris amplificandis promeritis. Neque præsumendum est, viros magnos velle, ut, dum laudamus, adulemur, cum adulatio potius ansam det laudibus promeritis detrahendi, quam eas amplificandi, nec ipsi appetere censendi sint nisi veritati consentaneas. Certum adeo manet, philosophum circumspectum, non minus ac Astronomum (§. 302), in dubitationem adduci, quid de dependentia animæ ac corporis a se invicem in modificationibus suis statuendum sit, ubi ejus ratio ex essentia & natura utriusque corporis reddenda, quemadmodum eam non aliunde reddendam esse per prima philosophiæ principia edoctus est. Quemadmodum vero Astronomus in limine Astronomiæ adhuc constitutus non videt, quomodo a dubitatione liberari possit; ita similiter nec Philosophus in limine Philosophiæ adhuc constitutus reperit, quomodo ex dubitatione eluctari queat. Quid igitur faciendum? Num animus omnis prorsus abjiciendus & in scepticismum eundum? Absit ut hoc faciat, qui philosophari decrevit! Imitari convenit Astronomum. Inquirendum itaque, num observentur alia, quæ ab ista mutua modificationum animæ ac corporis dependentia a se invicem porro dependent. Videmus a sensatione pendere alios actus facultatis cognoscitivæ & ab his actus facultatis appetitivæ & aversativæ: videmus etiam actuum non minus internorum animæ, quam motuum organorum corporis seu actionum externarum determinationem pendere a nutu animæ, consequenter eidem competere directionem actionum externarum & internarum quandam. Horum rationem reddi posse apparet ex mutua illa dependentia. In hæc igitur omnia inquirere & praxes hinc a priori deducere licet, nondum licet cognita ratione mutuæ illius dependentiæ modificationum animæ ac corporis a se invicem. Quamobrem sicuti in Astronomia sumimus motum communem

nem tanquam phænomenon, & inde deducimus alia, quæ ab eodem pendent, parum solliciti, num revera detur, an saltem appareat; ita quoque in Philosophia mutua animæ ac corporis quoad modificationes a se invicem dependentia sumenda tanquam phænomenon, ac inde deducenda sunt alia, quæ hinc porro pendent, nec ea Philosophum tangere debet cura, num illa dependentia realis sit, an tantummodo apparens, & quænam sit ejus causa. Immo cum constet, quæcunque tandem causa sit illius dependentiæ, semper tamen supponendum esse animam & corpus ita agere, ac si in seinvicem influerent, quemadmodum in Psychologia rationali evicimus; si vel maxime falsum esset, animam & corpus in se invicem influere, veritate tamen illæsa sumi potest tanquam hypothesis naturæ vicaria quoad regimen corporis, quod animæ tribuitur, immo quoad regimen sui ipsius, quatenus a corpore pendere videtur, animam & corpus in se mutuo influere, quemadmodum in Astronomia quoad motum communem sumimus, cœlum esse sphæram cavam, cujus superficiei affixæ sunt stellæ, & quæ circa Tellurem in centro ejus collocatam ab oriente in occidentem convertitur, etiamsi persuasi simus, hæc a veritate abhorrere ob rationem paulo ante (§. 302) dictam. Memini cum systema harmoniæ præstabilitæ maxima animorum acerbitate impugnaretur, quasi per ipsum omnis moralitas, omne regimen politicum, immo omnis religio funditus evertatur, cumque ad avertendum tantum ab eo periculum ista monerem; Theologo cuidam celebri hoc paradoxum, immo absonum visum fuisse. Sed hoc ipsi condonandum erat, tanquam methodi demonstrativæ ac artis analyticæ prorsus ignaro, cujus nec notionem ullam, nec exemplum habebat. Ecquis enim est qui nesciat, & vel in sola Mathesi attentionem suam desiderari minime passus fuerit, sine methodi demonstrativæ notitia nemini esse posse ideam dependentiæ veritatum a se invicem, nec sine artis analyticæ cognitione constare posse, quænam, etsi nondum definita, sumi queant illæsa veritate ad alia investiganda, quæ usum in praxi habent?

Enimvero si qua sunt, quæ a causa illius mutuæ ac corporis dependentiæ a se invicem dependent, tum ea non amplius sumitur tanquam vera, nisi demonstratum fuerit, utrum ea realis sit, an tantummodo apparens, quemadmodum in parte Theorica Astronomi non amplius sumunt Telluris quietem & motum communem, sed potius motum vertiginis Telluris cœlique ac stellarum quietem. Poteramus alia addere exempla ex Physica generali pariter ac speciali, nisi unicum sufficeret, ut intelligatur, quomodo in re præsenti Astronomum imitari debeat Philosophus.

§. 304. Postquam in Astronomia parte sphærica Astronomi sumserunt, cœlum esse sphæram cavam, cujus superficiei stellæ omnes sunt affixæ, & quæ circa Tellurem in centro ejus quiescentem ab oriente in occidentem continuo circumvolvitur; ad hoc phænomenon Geometriam applicarunt, ut alia hinc pendentia determinarent, cum phænomenorum motus primi sive communis cognitionem mathematicam quærerent. Quamobrem qui tertium cognitionis gradum intendit, in capite secundo, quod de circulis sphæræ mundanæ agit, inquirendum est, quem in finem circulos istos in ejus superficie descriptos imaginentur. Ipsa natura quasi circulum descripsit, qui visum oculi undiquaque terminat & sphæram mundanam in duo hemisphæria dividit, Horizon ideo dictus. Circulus hic immotus est, dum sphæra mundana continuo volvitur, adeoque ultra sphæram mundanam imaginari tenemur aliam immobilem, in cujus superficie peripheria hujus circuli descripta. Ipsa adeo natura Astronomos deduxit ad distinguendos circulos mobiles ab immotis, antequam perpenderent, quales circuli superficiei sphæræ mundanæ sint inscribendi. Videmus hinc cognitionem Naturæ mathematicam imaginaria admittere tanquam principia, ex quibus deducitur, & fictionibus locum dare: id quod præpostere imitari minime debet Philosophus, etsi in nonnullis utiliter imitetur, quemadmodum modo vidimus (§. 303). Hinc vero accidit, quod Mathematici ad

ad res philosophicas celeri nimis gradu properantes imaginaria a realibus non distinguant, & notiones in Mathesi toleranter veras tanquam reales importuno ausu in Philosophiam inferant, quemadmodum nec alia fuit ratio, quod olim Physici mundum ex sphæris crystallinis cavis compositum finxerint, donec tandem hypothesis insulsa a *Tychone de Brahe* explosa nullam amplius hodie inveniat fidem. Utinam huc animum serio adverterent, qui ex Principiis Philosophiæ naturalis mathematicis & Optica Mathematici summi *Isaaci Newtoni* nescio quam Philosophiam *Newtonianam* exsculpere volunt, quasi notiones imaginariæ, quæ ad cognitionem Naturæ mathematicam sufficiunt, & in ea fœcundæ deprehenduntur, in Philosophiam primam & naturalem utiliter inveherentur, immo quasi ex istis notionibus imaginariis inferri possent, quæ ad Theologiam naturalem & Cosmologiam generalem spectant. Idem enim revera agunt, quod fecere antiqui, qui notionem imaginariam mundi, quæ Astronomo in explicando motu communi adeo proficua fuit, tanquam realem in Physicam inferre ausi sunt. In usum cognitionis mathematicæ multa fingere licet; sed fictiones istæ mathematicæ non sunt veræ causæ, quibus effectus Naturæ intelligibili modo explicantur. Absit autem, ut quis hinc inferat, quasi laudibus Mathematicorum detrahere & supra Mathematicos Philosophos extollere velimus! Neque enim nobis jam propositum est Philosophos cum Mathematicis committere, nec de Jure Præcedentiæ controversiam movere. Diversitatem saltem notionum imaginariarum & realium inculcamus, ne in detrimentum scientiæ confundantur, quæ diversa sunt, sed legitimus utrarumque conservetur usus. Nihil decedit laudi Mathematici, etsi non habeatur Philosophus; quemadmodum nec Philosophos laude sua, quam meretur, frustratur quod non simul habeatur Mathematicus. Mathematici & Philosophi in numerum eorum entium referendi, quorum non est ad se invicem ratio, utut maxime consultum sit Philosophum simul esse Mathematicum, præsertim ubi in Philosophia ad ter-

tium cognitionis gradum adspirat, cum Mathematicus in arte sua summus esse possit, utut nullam inter Philosophos laudem mereatur.

§. 305. De sphæricorum theoria non ante cogitarunt Geometræ, quam cum Astronomia ad eandem eos invitaret. Qui ergo ad tertium cognitionis gradum adspirat, ei suademus, ut primo in usum secundi totum caput secundum perlustret, & quomodo principia illius theoriæ ad sphæram mundanam applicentur expendat, donec singula, quæ hic explicantur & demonstrantur, habuerit perspecta, parum solicitus, quomodo primi inventores in ea incidere potuerint. Enimvero ubi singula ipsi probe cognita atq; perspecta fuerint, jam secundis curis idem caput perlustret atq; jam supponat, quasi nulla adhuc prostaret sphæricorum theoria, & inquirat, quomodo supposito phænomeno, quod veluti basis est totius Astronomiæ sphæricæ, tanquam fonte rationum de ceteris, quæ quæruntur, reddendarum, dum in phænomenorum motus communis rationes inquirimus, in circulos, quæ in sphæræ superficie concipi debent, aut si mavis tanquam sphæram secantia plana considerantur, incidamus. Immo non inconsultum erit, si ante quinque priora capita in usum secundi gradus cognitionis pertractet, quam quæ in usum tertii perpendenda sunt, exquirat, quoniam hoc pacto evidentius ipsi constabit, quænam sint phænomena motus communis in hac Astronomiæ parte determinanda, sicque facilius apparebit, quonam circulorum apparatu ea fini sit opus. Dum vero curis secundis caput secundum percurrit, attentione inprimis opus est, ut observetur, quomodo theoria imperfecta nos deducat ad observationes, quibus perficiatur, simulque ad observationes, quibus ad praxin aptatur. E. gr. Vi phænomeni fundamentalis sphæra mundana circa Tellurem continuo circumvolvitur. Enimvero quæritur an puncta illa fixa, circa quæ rotatur & qui poli dicuntur, semper sint iidem, an vero mutentur. Quid sumi debeat, per observationes definiendum. Similiter cum motus vel æquabilis, vel inæquabilis, esse possit, & celeritas in diversis

sis revolutionibus vel eadem, vel diversa; denuo quid sumendum sit per observationes definiendum. Equidem per modum hypotheseos sumi potest, polos semper manere eosdem, motum non modo esse æquabilem, sed eandem quoque esse in qualibet rotatione celeritatem. Enimvero ubi examinanda hypothesis, ad observationes tandem confugiendum. Atque adeo videmus, quomodo theoria imperfecta beneficio observationum reddatur perfectior. Similiter ubi per theoriam agnoscis Meridianum secare hæmisphærium in duas partes æquales & in eodem altitudines stellarum esse maximas seu distantias a vertice minimas, quas habere possunt; in usum praxis situs Meridiani determinandus est respectu tui loci. Nec absimili modo patet situm quoque poli respectu loci tui determinandum esse. Deducit adeo nos theoria ad observationes, quibus eadem ad praxin aptatur. Unde liquet, quomodo ea, quæ per meditationes deteguntur, ulterius quærenda insinuent, de quibus ante cogitare non poteras. Probe autem notandum est, quomodo observationes sine circulo vitioso, quem Logici vocant, instituantur, quando utraque alteram supponere videtur, quales subinde in Astronomia occurrunt. Habemus exemplum, in invenienda linea meridiana ad determinandum planum meridiani in dato loco §. 120. Etenim ea supponit stellæ declinationem vel etiam solis intra tempus observationis non mutari. Supponit observatio immutabilitatis declinationis immutabilitatem poli, quæ ex immutabilitate altitudinis maximæ, adeoque in plano meridiani, demonstratur §. 114. Quod si tamen perpendas, quæ §. 110. & seqq. docentur; videbis, quomodo absque periculo circuli vitiosi committendi hæc dirimantur. Equidem non negaverim, initio Astronomos plurima sumsisse per modum hypotheseos, quemadmodum idem quoque haud raro fieri debuisse ex Theoricis constabit, & cum ex istis hypothesibus deducta cum cœlo deinceps per alias observationes consentire deprehenderent, assumtis demum plenum assensum præbuisse: hoc tamen minime obstat, quo minus Astronomiam me-

methodo ſynthetica tradituri oſtendamus, quomodo ſcrupuloſiores in infantia ſtatim Aſtronomiæ certitudini proſpicere potuerint, cum nobis propoſitum ſit eam ita tradere, ut methodum imitari liceat non modo in Philoſophia naturali, verum etiam in aliis ejus partibus, ubi a poſteriori quædam ſtabilienda, ut alia inde deduci queant.

§. 305. Qui tertium cognitionis gradum intendit, problemata per Trigometriam ſphæricam ſoluta analytico more expendere debet. Artificium heuriſticum, quo hic utendum, in eo conſiſtit, ut interſectione circulorum ſphæram ſecantium detegatur triangulum, cujus id, quod quæritur, pars aliqua eſt, ſive latus, ſive angulus, ac præterea attendatur, num per obſervationem, principia ſphærica aut calculos præcedentes dentur tres ejusdem trianguli partes aliæ. Conſtat enim ex tribus datis per Trigonometriam ſphæricam ſemper inveniri poſſe quartum, quod quæritur. Facillimum exemplum præbet problema quartum §. 198, quo inveniri jubetur puncti cujuſcunque dati Eclipticæ declinatio. Quoniam declinationem metitur arcus circuli maximi inter æquatorem & punctum datum interceptus atque ad æquatorem perpendicularis (§. 76 *Aſtron.*); qui circulis declinationis dicitur (§. 78 *Aſtron.*), hinc colligitur, animum advertendum eſſe ad æquatorem, eclipticam & circulum declinationis. Quamobrem in charta deſcribitur circulus, qui ſphæram mundanam repræſentare fingitur, cumque ſitus æquatoris dependeat a polis mundi (§. 48 *Aſtron.*); in eo ſumitur pro arbitrio punctum P, quod polum repræſentet. Jam Æquator ſphæram mundanam in duo hemiſphæria dividit (§. 50 *Aſtron.*) & ſingula ejus puncta a polo mundi quadrantis intervallo diſtant (§. 49 *Aſtron.*). Ex polo igitur P intervallo quadrantis AP deſcribitur circino arcus AQ, qui Æquatorem repræſentat. Cum polus Eclipticæ certo intervallo a polo mundi P diſtet (§. 179 *Aſtron.*) & illa æquatorem ſecet (§. 172 *Aſtron.*); pro arbitrio ſumitur punctum M tanquam polus Eclipticæ & ex eo quadrantis intervallo ME deſcribitur arcus EL, qui Eclipticam repræſentat & æquatorem AQ in G ſecat. Cum

Tab. IV. Fig. 40.

Cum circulus declinationis transeat per polos mundi P & p (§. 78 *Astron.*) & ex principiis sphæricis pateat, quod poli ejus sint in Æquatore, punctum vero S in Ecliptica pro lubitu sumi possit; describatur denique arcus PSD, qui quadrantem circuli declinationis repræsentat (§. 79 *Astron.*). Patet hoc modo intersectione æquatoris, eclipticæ & circuli declinationis obtineri triangulum DGS in superficie sphæræ mundanæ, cujus crus DS repræsentat declinationem puncti Eclipticæ S, quæ quæritur. Inquirendum igitur porro est, num in eodem triangulo tria tanquam aliunde cognita deprehendantur. Quoniam itaque punctum Eclipticæ S, cujus declinatio quæritur, pro lubitu sumitur a Tabularum conditore, aut in alio casu datur; in priori casu punctum G, in quo Ecliptica æquatorem secat, sumi potest vel pro principio arietis, vel pro principio Libræ (§. 158. 160 *Astron.*), in posteriori ex dato puncto Eclipticæ patet, num punctum G repræsentet principium Arietis, an vero principium Libræ. Ponamus in præsenti punctum G esse principium arietis. Quia punctum Eclipticæ S datur, ejus distantia a principio Arietis seu arcus Eclipticæ SG datur. Datur præterea angulus obliquitatis eclipticæ per observationem (§. 163. 178 *Astron.*). Et ex sphæricis constat angulum ad D esse rectum (§. 76 *Astron.*). Habemus itaque in triangulo DGS tria data, nimirum angulum rectum D in intersectione æquatoris AQ & circuli declinationis PD, angulum obliquitatis Eclipticæ G, distantiam SG puncti Eclipticæ S a puncto æquinoctiali G. Inveniri autem debet latus DS angulo obliquo G oppositum: id quod fieri posse, per Trigonometriam sphæricam patet. Videmus adeo, qua analysi resolutio problematis de invenienda declinatione puncti cujuscunque Eclipticæ fuerit investigata, & ex hac analysi facile condi poterat demonstratio problematis ad morem veterum Geometrarum, siquidem tanto rigore demonstrandi foret opus. Nimirum qui ad Astronomiam accedit, cum in Elementis Arithmeticæ, Geometriæ, Trigonometriæ utriusque & sphæricorum, Opticæ item, Ca-

Catoptricæ atque Dioptricæ jam ita versatus supponatur, ut, quæ in istis Matheseos partibus traduntur, familiaria experiatur, in Methodo demonstrandi jam satis exercitatus est, ut non minutissima quæque ipsi enucleari sit opus. Non tamen inconsultum est, ut, qui intellectus perficiendi gratia Mathesi operam navat eodem rite extra eandem usurus analysi, quam hic commendamus, sedulo incumbat ac syntheticas demonstrationes hinc eruat.

§. 306. Qui in seipsis experiuntur, se absque ista analysi, quam hic urgemus, sine mora schemata delineare & triangulorum resolutiones invenire posse, ac absque demonstratione hinc derivata veritatem solutionis problematum propositæ perspicere, tantum apparatum condemnabunt ac tempus inanibus speculationibus falli existimabunt, quod longe utilius in aliis addiscendis collocari queat. Immo non deerunt, qui, cum inter Astronomos merito suo emineant, analysin istam ac derivatas inde syntheticas demonstrationes inter superflua referent, forsan tanquam puerilia prorsus ridebunt. Quamobrem apprime necessarium videtur, ut quædam ad avertendum præjudicium philosophaturo admodum nocuum annotemus. Nemo in dubium vocare potest, omnibus istis notionibus, quæ analysin nostram ingrediuntur, animum ejus imbutum esse debere, qui proprio Marte solutionem problematis de investiganda declinatione singulorum graduum aut puncti cujuslibet eclipticæ invenire aut veritatis ejusdem, ubi ab alio inventa supponitur, plene convinci debet. Pone enim quamcunque illarum esse tibi incognitam, extemplo constabit, tibi de veritate solutionis dubium aliquod adhuc superesse, consequenter abesse convictionem, quæ omnem dubitationem excludit. Notiones igitur istæ omnes influunt in determinationem assensus, quem præbes solutioni tanquam veræ. Quamobrem si distincte exponendum, quomodo generetur assensus, & qui fieri potuerit, ut a priori in solutionem problematis inciderit primus inventor; nulla illarum notionum prætermittenda, sit ita quod inventor vel qui solutionem jam inven-

inventam addiscit, in confusis notionibus acquiescat, nec quæ ideæ, a qua pendet convictio, insunt, singula a se invicem actu mentis discernat. Sane cum Philosophi sit rationem reddere istius assensus ac modi, quo ad solutionem problematis inventor pervenire potuerit; nemo nisi cognitionis philosophicæ contemtor reprehendet, quod quæ actibus animæ insunt distincte explicet, utut utilitatem non pervideat. Hanc vero esse maximam, si quis animum ad philosophandum appellit, haud difficulter ostenditur. In Astronomia schemata notiones, quas antea tibi comparavisti, imaginationi præsentes sistunt, ut confusa quædam idea animum attendenti sufficiat ad veritatem protinus perspiciendam. Enimvero in Philosophia, præsertim in Metaphysicis ac Moralibus, istiusmodi subsidio destituimur, quo imaginatio apta efficitur ad vicarias intellectus operas præstandas, nec confusis ejus ideis tuto fidere licet, siquidem errandi periculum subire nolueris. Ipse igitur intellectus agere debet, quod suum est, adeoque non admittendæ sunt nisi notiones distinctæ, nec in exacta earundem evolutione unquam nimii simus, siquidem eam desideraverimus evidentiam, quæ in Mathesi datur. Quamobrem ut evolutioni huic adsuescamus, consultum omnino est analysin problematum primi mobilis instituere, quemadmodum præcepimus: id quod in Astronomia multo facilius succedit, quam in Philosophia, quia intellectus dirigitur ab ipsa imaginatione, modo ad imaginem, quæ ob oculos versatur, animum attendas, cum in Philosophia imaginatio ac sensus suppetias ferre nequeant, sed intellectui magis obstaculo sint, ne suo munere dextre fungatur. Non suadeo nisi experta & quorum veritatem in seipso experiri poterit, qui voluerit. Quicquid igitur videatur aliis, qui Astronomiæ totos sese dederunt, nec Philosophiæ excolendæ operam impendendi otio fruuntur; ego istam Analysin admodum proficuam judico omnibus, quotquot ad hanc excolendam animum appellere decreverunt. Neque enim existimandum est levi opera consequi te posse, ut methodo demonstrativa in philosophando rite utaris.

Plurima enim sunt, ad quæ per exempla felicius, quam per præcepta patet aditus, exempla vero tutissima offert Mathesis, si accurata demonstrationum analysis curæ cordique fuerit. Nos, quibus methodi intimius cognoscendæ cupido studium Matheseos commendavit a prima ætate, Mathesin quoque hoc nomine maximi facimus. Non jam commemorare lubet, quod distincta usus facultatum animæ explicatio augeat scientiam philosophicam & quod eum cognoscere teneatur philosophus, si in Philosophia morali tradere velit, quæ satis faciunt: hic enim, ubi intellectus perficiendi nonnisi ratio habetur, ad methodum tantummodo digitum intendimus.

§. 307. Non lubet ad particularia descendere, quæ utiliter moneri poterant: neque enim consultum est, ut prima statim vice minutissime persequatur singula, qui intellectus perficiendi gratia ad studium astronomicum accedit. Quodsi enim hisce tantummodo observatis, quæ docuimus, ad studium psychologicum & ontologicum accesserit; in Onthologia & Psychologia probe versatus proprio, quod acquisivit, acumine detegét, quæ adhuc annotari poterant. Merentur autem attentionem, quæ de refractione, parallaxi & crepusculis dicuntur eo etiam fine, ut intelligatur, quam necessarium sit experientiæ & rationis connubium, ne per theoriam fieri posse videantur, quæ tamen in praxi minime succedunt. Nimirum qui experientiam negligit, subinde fieri posse sumit, quæ ob circumstantias a priori non definienda haud quaquam fieri possunt. Unde contingit nos incidere in resolutiones problematum, quibus satisfieri nequit. Observanda hæc sunt Philosopho non minus in Philosophia morali, quam civili, ne sibi jam consecutus videatur, quæ adhuc in quærendorum numero sunt, & a veritate inquirenda desistat, quam detegere in potestate ipsius erat modo præjudicio isto non habuisset mentem præpeditam.

§. 308. Pars theorica Astronomiæ ad perficiendum intellectum, ut eodem extra Mathesin utaris, plurimum confert, modo omnem afferas attentionem ad methodum

dum tantopere a nobis commendatam & tam sollicite inculcatam. Capite primo & secundo, in quibus de natura solis ac lunæ, ceterorumque planetarum tam superiorum, quam inferiorum eorumque satellitum agitur, docentur, quæ ad Physicam magis, quam Astronomiam spectant, etsi Astronomus jure suo sibi ea arroget, quæ observationibus suis debentur. Quamobrem hinc discere licet, quomodo utiliter in Philosophia naturali seu Physica sit versandum, nimirum quomodo quærendæ sint observationes communes, quæ sua veluti sponte sese offerunt, quam studio quæsitæ, ac inde a posteriori colligantur propositiones, quas a priori detegere non dabatur principiis ad ratiocinandum necessariis deficientibus. Nos in Physica dogmatica, quam idiomate patrio evulgavimus, eandem viam ingressi sumus. Etsi autem facilis videatur hæc methodus, non tamen adeo facilem deprehendet, quantum putat, qui eadem rite uti voluerit. Nimirum acumine nonnisi multa exercitatione acquisito opus est, ne observationibus inferantur, nisi quæ sensui patent, ut eædem ab omni prorsus vitio subreptionis, quod in Logica vocamus, sint liberæ: qua in re multum peccatur a Medicis, utut virorum experientissimorum titulum quasi sibi proprium dudum consecutis. Neque facilius est facta, quæ observantur, notione distincta comprehendere & verbis aptis singula in eadem contenta enunciare, ut certi quid inde concludi possit. Artis præterea est nec plus, nec minus inde colligere, quam certo ratiocinio inferri potest. Qui his accurate satisfacere voluerit, etsi in demonstrando nihil difficultatis deprehendat, nondum tamen ex voto omnia sibi succedere experietur. Qamobrem ad observationes, quas commemoramus, animum probe attendat, ut idea exemplaris eas rite describendi animo insinuetur; nec minorem attentionem afferat ad corollaria, in quibus propositiones ex iisdem eliciuntur, ut modum stabiliendi per observationes principia, seu ex iis eruendi propositiones comprehendat. Utilitatem non modo in Physica, verum etiam in ipsa Philosophia morali & civili experietur. Inprimis etiam eandem

dem animadvertet, qui Medicinam ad majorem certitudinem perducere voluerit. Sed memini me de hiſce jam plura dixiſſe in Horis ſubſecivis, cum de Medico Aſtronomum imitante verba facerem. Non inanem operam ſumet, qui ea, quæ in Logica de experientia præcipiuntur, cum obſervationibus ac inde deductis propoſitionibus confert: ita enim facilius intelliget regulas methodi, quas proprio Marte abſtrahere non poterat. Immo praxin Logicæ quoad hanc partem hoc pacto ſibi comparabit. Qui novit, quantam utilitatem nobis afferat cognitio a poſteriori acquiſita; eum nunquam pœnitebit ſtudii, quod in methodo hac intimius perſpicienda collocaverit.

§. 309. Theoricam tradidimus juxta hypotheſin *Copernici* atque *Kepleri*, nimirum ſuppoſito Terræ motu & orbitis planetarum ellipticis, in quibus Planetæ ea lege incedunt, quemadmodum ſagacitate ſua primus detexit *Keplerus*, propterea quod ſic prodit theoria cum cœlo omnium maxime conſentiens. Etſi autem methodum *Keplerianam* expoſuerimus computandi loca planetarum, non tamen negleximus, quæ recentiorum induſtria, poſtquam Geometria & Aſtronomia magis exculta fuit, ad ejus perfectionem ulteriorem acceſſerunt. Quodſi tamen quis tertium cognitionis gradum intendit, ei ſuademus, ut, probe intellectis iis, quæ de motu Planetarum elliptico traduntur, Aſtronomiam quoque veterem perluſtret, qualem tradidit *Ptolemæus*, juxta Epitomen a *Regiomontano* factam, & in ſubſidium vocato *Riccioli* Almageſto, in quo exponuntur, quæ ad eam magis excolendam poſt eum acceſſerunt. Hinc enim omnium optime addiſcet, quomodo Philoſophia naturalis per hypotheſes ſit excolenda, ubi ad veritatem liquidam pertingere non licet, & eundem morem imitabitur in Medicina ad certitudinem ſucceſſive evehendam, immo in reliqua etiam Philoſophia, præſertim practica, ac ipſa praxi vitæ humanæ. Equidem non ignoro eſſe hodie nonnullos, qui omnem hypotheſium uſum in Philoſophia naturali & Medicina damnant; ſed hi propter abuſum ipſum etiam uſum rejiciunt:

ciunt: id quod sine scientiæ incremento haud quaquam facere licet. Diximus nonnulla huc spectantia in Discursu præliminari de Philosophia, quem Logicæ præmisimus, methodum philosophicam explicantes. Laudant quidam *Newtonum*, quod ex Philosophia naturali eliminaverit hypotheses, qui tamen hypothesibus indulget in iis ipsis, in quibus eum ab iisdem abstinuisse existimant. Quid enim attractio seu gravitas universalis, quæ per modum attractionis repræsentatur, aliud est quam hypothesis, quæ in gratiam quorundam phænomenorum sumitur, & ad omnem deinde materiam extenditur? Immo nonne explicatio systematis mundani, quæ præcipua pars est Principiorum Philosophiæ naturalis mathematicorum, per motum projectionis & gravitationem in solem aut centrum Planetæ primarii hypothesis philosophica est, quam *Hevelius* in Cometographia ad imitationem motus projectorum a *Galilæo* detecti imaginatus est & quæ in Mathesi utiliter surrogatur in locum hypotheseos naturæ, phænomenorum autem causas physicas non attingit, quas scrutari debet Physicus? Facile quidem largior hoc non videre eum, qui soli Mathesi assiduam operam navavit ac ideo notionibus imaginariis animum imbutum possidet: extemplo tamen videt, qui cum Matheseos studio Philosophiæ, præsertim Metaphysicæ, studium conjunxit. Sed mittamus hæc & per nos suo quisque abundet sensu. Videamus potius, quomodo in cognoscenda methodo per hypotheses cognitionem humanam promovendi sit progrediendum. Quemadmodum in anterioribus observavimus, omnem cognitionem humanam initium capere ab observationibus communibus; ita similiter de parte Astronomiæ theorica idem dicendum. Ex observationibus communibus innotuit motus proprius solis (§. 27 *Astron.*), quo scilicet indies ab occasu versus ortum certo intervallo promovetur (§. 30 *Astron.*), non tamen tanquam verus, cum applicata Mathesi ad observationem constet (§. 571 *Astron.*), motum solis eodem modo e Tellure spectari, sive ipse circa terram intra orbitam quiescentem revera moveatur, sive Terra circa solem qui-

quieſcentem feratur. Quando itaque Aſtronomus ſumebat, Terram quieſcere & Solem motu annuo circa eandem ab occaſu in ortum moveri; quod ſumebat, hypotheſis erat, quæ admiſſo motu vertiginis Telluris hypotheſi naturæ æquipollet, ſi quod ſumitur a veritate alienum, admiſſo autem motu communi tanquam vero hypotheſis nonſi imaginaria eſt, cui adeo in Matheſi quidem locus conceditur, minime autem in Phyſica. Finge jam Aſtronomum noluiſſe uti hypotheſi: nemo Aſtronomiæ gnarus diffitebitur, eum ſtatim in limine nobiliſſimam hanc ſcientiam deſerere debuiſſe, nulla ſpe ad veritatem liquidam perveniendi relicta absque conjecturis hypotheſi innixis. Immo ſi quis, poſito motu communi tanquam vero, hypotheſin imaginariam de motu ſolis communi in Philoſophiam naturalem tanquam veritatem inferre voluiſſet, ecquis ſanus Philoſophus hoc approbare potuiſſet, propterea quod ea ſatisfacit Aſtronomo ad cognitionem mathematicam motus proprii ſolis acquirendam? Ex obſervationibus itidem communibus, ſed majore attentione factis, conſtabat, ſolem ab eodem puncto digreſſum ad idem redire. Hinc pronum erat inferre, quod ſol motu proprio feratur per lineam in ſe redeuntem, intra cujus ambitum collocata Terra. Enimvero cum infinitæ ſint lineæ in ſe redeuntes, quemadmodum ex Geometria conſtat; quæſtio incidebat, quænam linearum in ſe redeuntium ſit orbita ſolis. Ex Geometria elementari notum erat, in harum numero eſſe circulum, cujus proprietates & ſymptomata ſunt magis obvia quam ceterarum. Sumebant igitur Aſtronomi per modum hypotheſeos, orbitam ſolis eſſe circularem. Quodſi hypotheſi uti noluiſſent, non ſumendum eſſe contendentes niſi quod ſit demonſtratum; impoſibile fuiſſet, ut theoriam motus ſolis cœlo conſentientem detegerent, & Aſtronomia adhuc deſerta & inculta jaceret. Enimvero quemadmodum in veritate inveſtiganda accidit, ut, ſi uni quæſtioni ſatisfacias, quantum datur, nimirum vel veritatem detegendo, vel conjecturæ locum faciendo, enaſcantur aliæ; ita etiam in caſu præſenti jam quærebatur, in

in quonam puncto intra ambitum circuli sito posita sit Terra Tab. IV. Fig. 41. Ex Geometria elementari tyronibus notum est, circulum AHPI habere centrum C, a quo singula puncta peripheriæ AHPI æqualiter distant. Quæstio igitur huc redibat, num Terra sit in centro orbitæ C, an vero extra centrum veluti in T. Eam dirimere non licebat, nisi denuo interea alterutro assumto tanquam vero, consequenter confugiendo ad hypothesin. Nullum adeo est dubium, quin primus inventor sumserit veritatis investigandæ gratia, Terram esse in centro C. Inquirendum ergo erat, quomodo loca solis definiantur ad datum tempus in hac hypothesi, ut locus solis computatus cum eo, qui per observationem eruitur (§.203 *Astron.*), conferri sicque hypothesis ad examen referri posset. Hoc ubi investigare volebat Astronomus, Tab. IV. Fig. 42. cum per principia Geometriæ elementaris ipsi perspectum esset, si arcus AD & DE sint æquales, angulos ACD & DCE esse æquales (§.141 *Geom.*), nova incidebat quæstio, utrum sol motu æquabili incedat in orbita sua, ut arcus AD & DE æquali tempore percurantur, an vero inæquabili, ut iisdem arcus absolvantur tempore inæquali. Nemo non videt, hic denuo confugiendum fuisse ad hypothesin, alterutrum horum assumendo tanquam verum, donec examen hypotheseos per observationes decretorias proderet quod certum est. Cum motus æquabilis sit uniformis & intellectu facilior inæquabili; legibus artis conjectandi, quibus in assumendis hypothesibus locus est, conveniens erat supponere, quod sit æquabilis. Unde enascebatur hypothesis solis concentrica, qua sol supponitur motu æquabili incedere in orbita sua secundum signorum successionem, Terra in centro ejus collocata. Atque hoc pacto hypothesis sufficienter determinata erat ad calculum geometricum instituendum, ut adeo non alia re opus esset, quam ratiocinando hinc colligere, quæ ad eum spectant. Si sol motu æquabili percurrit orbitam, arcus, Tab. IV. Fig. 43. quos percurrit AF & FG, consequenter etiam anguli ACF & FCG, sunt tempori proportionales. Quamobrem ut dato tempori respondens angulus ACF

seu

seu arcus AF computari possit, notum esse debet, quo tempore sol integram orbitam percurrat: quod cum sit facti, aliter innotescere non poterat nisi per observationem. Observari nimirum debebat tempore quodam locus solis in dato aliquo puncto A, ac porro observandum, quo tempore ad idem redeat punctum. Etsi autem initio indifferens videretur, quodcunque punctum eligatur; ubi tamen ad observationem accedebat Astronomus, non commode observari posse tempus advertit, quo sol ad idem punctum promiscue assumtum redit. Quoniam itaque planum æquatoris determinari potest independenter a theoria solis (§. 149 *Astron.*); commodissima videbatur huic instituto observatio appulsus solis ad æquatorem, modo constaret, æquatorem constanter secare orbitam solis in eodem puncto, seu astronomice loquendo puncta æquinoctialia esse fixa. Sumebatur hoc primum denuo per modum hypotheseos & inquirebatur in modum observandi tempus, quo centrum solis ad æquatorem appellit. Et sic incidebatur in armillas æquatoreales, quibus veteres observasse æquinoctia novimus. Quoniam sic, etsi adhuc ruditer constare poterat, quantitas anni solaris, si momentum æquinoctii vernalis sumebatur pro epocha, per regulam trium computari poterat locus solis ad datum quemvis diem in hypothesi concentrica, quemadmodum docuimus (§. 672. 673 *Astron.*). Quodsi jam loca computata conferebantur cum observatis (§. 203 *Astron.*); illa cum his minime consentire deprehendebantur, adeoque hypothesin concentricam a veritate alienam esse palam erat. Quoniam igitur Terra intra ambitum orbitæ solis constituitur, centrum illius extra centrum hujus situm esse debet in hypothesi circulari. Atque adeo in locum concentrici circuli sumebatur per modum hypotheseos circulus eccentricus, retento motu æquabili. Ponamus jam in C esse centrum orbitæ, in T centrum Telluris, in H punctum æquinoctiale unum, in I alterum. Repræsentabit schema hypothesin solis circularem eccentricam. Inquirendum adeo erat, quænam ex ea consequantur, ut denuo quæ inde colliguntur cum obser- Tab. V. Fig. 44.

obſervationibus, quibus inde deducta occaſionem præbent, conferri poſſint. Quia nos ſolem ex puncto T intuemur, ſtatim apparebat, diſtantiam ejus continuo variari, cum TS ſit major ipſa TL, eamque in A eſſe maximam, in P minimam (§. 303 *Geom.*). Atque ſic naſcebatur notio Apogæi A (§. 636 *Aſtron.*) & Perigæi P (§. 635 *Aſtron.*), atque eccentricitatis ſolis TC (§. 639 *Aſtron.*). Enimvero jam incidebat quæſtio, utrum æquinoctium vernale ſeu principium arietis ſupponendum ſit in H, an vero in I, item in quo orbitæ ſolaris puncto, ſi ad eclipticam refer atur, hæreat Apogæum A, quonam Perigæum P, & quanta ſit eccentricitas TC. Nemo non videt confugiendum hic eſſe ad obſervationes, quales autem eædem eſſe debeant, ut ſint deciſivæ, ex hypotheſi deducendum. Quodſi ſol ſit in S; patet diſtantiam ab Apogæo in centro orbitæ C videri ſub angulo ACS; ex Tellure autem in T ſub angulo ATS: quod cum ita ſeſe habeat per integrum ſemicirculum HAI, diſtantia ſolis ab Apogæo ſemper minor videtur, quam revera eſt in eo ſemicirculo, in quo hæret Apogæum ſolis A. Ex adverſo ſi ſol ſit in L, ex centro orbitæ diſtantia a perigæo PL videtur ſub angulo PCL, ex Tellure in T autem ſub angulo PTL, adeoque in ſemicirculo IPH continuo apparet major, quam revera eſt, (§. 239 *Geom.* & §. 209 *Optic.*). Conſideremus porro ſolem in punctis æquinoctionalibus H & I. Quodſi ſpectetur ex centro orbitæ C, diſtantiæ ab Apogæo A nempe AI & AH videntur ſub angulis rectis ACI & ACH, ut adeo ſol videatur abſolviſſe ſemicirculum ab uno æquinoctio usque ad alterum, dum revera ſemicirculum HAI percurrit, in quo Apogæum A hæret: enimvero ex Terra ſpectantur diſtantiæ AI & AH ab Apogæo A ſub angulis ATI & ATH, qui ſunt rectis minores (§. 239 *Geom.*), conſequenter HAI minor ſemicirculo apparet (§. 209 *Optic.*), adeoque ſol minus temporis ſpatium conſumere videtur in ſemicirculo HAI, in quo eſt Apogæum A, quam in altero IPH, in quo hæret Perigæum P. Jam cum porro in ſemicirculo HAI diſtantiæ ſolis a centro Terræ T ſint majores diſtantiis a centro

Tab. IV. Fig. 45.

Tab. IV. Fig. 44.

centro orbitæ, veluti TS major CS, & in Apogæo A distantia TA sit maxima (§. 303 *Geom.*), in semicirculo autem IPH distantiæ solis a Terra sint minores distantiis a centro orbitæ, veluti TL minor CL, & in Perigæo P distantia TP sit omnium minima (§. §. *cit. Geom.*); sol ipse major videri debet in semicirculo IPH, in quo est Perigæum, quam in semicirculo HAI, in quo est Apogæum A. Quodsi jam meditationem cœptam eodem, quo hactenus, modo continuare velimus, observationes determinare licebit, quales esse debeant, quæ desiderantur. Sed ne justo prolixiores simus, filum abrumpendum est, contentis monstrasse viam, qua sit eundum, quantum ad præsens institutum sufficit. Annotabimus potius alia nonnulla, quæ usui esse possunt illis, qui Matheseos studio intellectum perficere gestiunt, ut eodem rite extra eandem utantur.

§. 310. Ex iis, quæ diximus, clarissime perspicitur, quomodo in investigandis veritatibus a posteriori sit procedendum, & quam indispensabilis usus sit hypothesium, ut, si iisdem uti nolueris, nulla supersit spes veritatis unquam detegendæ. Non est quod excipias hypothesibus equidem locum esse concedendum in inveniendo, ab iis tamen esse abstinendum in libris, qui publici juris fiunt. Etenim ubi veritates ab iis, quæ nobis perspecta sunt, principiis procul remotæ sunt, ut a priori denegetur ad eas accessus; non semper unius hominis est ea absolvere, quæ a posteriori accessibilem faciunt: quin potius haud raro sociæ requiruntur operæ, cum hic valeat illud pervulgatum, oculos plures plus videre quam oculum unum, & subinde qui accessum parare studet, laborem cœptum aliis continuandum relinquere tenetur. Qui animum ad ea attendit, quæ de theoria Solis investigata modo annotavimus, dictis facilem præbebit aurem, etsi rationes non perspiciat, quas dare poteramus, si prolixioribus esse liceret. Quamvis igitur examine instituto hypotheses deprehendantur a veritate alienæ, non tamen ideo censendæ sunt inutiles, propterea quod aberrando a veritate deducimur ad veritatem, ubi metho-

methodo conjecturali opus est. Unde memini me sæpius auditoribus meis inculcasse, deberi etiam a veritate aberrantibus suas laudes, ubi nobis errandum fuisset, nisi ipsi priores errassent. In aliorum enim meritis censendis æqui esse debemus, ne quid admittamus, quod contra officium boni viri est. Nemo Astronomus vitio vertet ei, qui primus de theoria Solis cogitavit, si hypothesin motus æquabilis in orbita concentrica excoluerit, utut successores eam a veritate alienam examine per observationes instituto deprehenderint. Videt enim eum fecisse, quod initio faciendum erat, & aliis perficiendum reliquisse, quod ipsi perficere vel non licebat, vel quod perficere nolebat. Quodsi Physici Astronomos imitati fuissent, ex observationibus communibus eliciendo hypotheses & has per observationes studio quæsitas & experimenta examinatas corrigendo ac perficiendo; nullus profecto dubito, quin Philosophia naturalis dudum magis promota fuisset. Idem dicendum de Medicina, de qua jam disertius dixi in Horis subsecivis, cum Medicum Astronomos imitantem in scenam producerem.

§. 311. Discimus etiam, quales esse debeant hypotheses, quibus in Philosophia concedendus est locus, nimirum quas methodus conjecturalis suggerit, qua in veritate investiganda utendum. Sumitur nimirum in gratiam nonnullorum phænomenorum, unde ratio eorum reddi potest, ac deinde inquiritur, num ceterorum quoque per id, quod sumitur, ratio reddi possit, quatenus ea, quæ ex hypothesi a priori colliguntur, conferuntur cum iis, quæ observantur. Perinde enim est, sive antea observaris phænomena & postea demum inquiras, num eadem a priori ex hypothesi deducantur, sive primum a priori deducas ex hypothesi, quæ inde necessario consequuntur, & postea demum observes, num eadem quoque in rerum natura ita sese habeant. Patet autem certum esse debere, quod id, quod sumitur, in se spectatum possibile sit. Ita sumebatur in Astronomia, orbitam Solis esse circulum. Certum nimirum erat, eam esse lineam in se redeuntem.

Quamobrem cum circulus sit linea in se rediens, in se spectatum non impossibile est, ut orbita solis sit circulus. Non igitur probamus commentitias hypotheses, quas hodie bene multi in Philosophiam naturalem invehunt, quidvis pro lubitu fingentes, utut demonstrare minime possint talia, quæ sibi imaginantur, in rerum natura existere posse. Immo facile largimur, istiusmodi commenta non esse qualitatibus occultis scholasticorum meliora. Quamobrem in Physica, quam patrio sermone edidimus, maluimus phænomena ex phænomenis explicare, nec in hypothesibus admittere nisi quæ ex observationibus colliguntur, ne incerta cum certis confundantur & in inventorum numerum referantur, quæ sunt in quæstionum numero. Omnium minime autem probamus, si ex commentitiis hypothesibus rationes reddantur in Medicina, quippe quæ non modo usum nullum in praxi habent, verum etiam nocent, si in praxi earum rationem habere volueris. Et huc dubio procul animum adverterunt, qui Philosophiam naturalem & Medicinam ab hypothesibus liberam esse voluerunt, atque inter theoriam physicam & medicam in arte salutari distinxerunt. Propter abusum tamen hypothesium non tollendus erat usus; sed hypotheses ad inveniendum veritatem aptæ discernendæ a figmentis, quæ in eorum locum surrogantur.

§. 312. Liquet porro ex iis, quæ de theoria Solis analytice pervestiganda diximus, in veritate a posteriori investiganda perpetuum esse debere experientiæ ac rationis connubium. Neque enim ex observationibus communibus, quæ primo loco assumuntur, quicquam concluditur nisi in subsidium vocatis principiis geometricis. Immo ipsæ hypotheses inde non derivantur ratiocinando nisi vi illorum principiorum. Et ubi ex hypothesi a priori deducenda, quæ ex ea necessario consequuntur, & sine quibus eædem examini subjici nequeunt, principiis mathematicis denuo opus habemus, neque absque horum ope observationes in hunc usum capiendæ determinari possunt. Quamobrem si Astronomos in Philosophia naturali & eidem agnata

agnata Medicina imitari velimus; cogitandum erat de theoria demonſtrativa. Ontologia, qualem dedimus, ſuppeditat notiones directrices, de quibus plura diximus in Horis ſubſecivis. Et hiſce inprimis locus eſt, ubi analyticam viam ingreſſuri colligere debemus, quid ſit faciendum, quamvis etiam principia ontologica conducant ad concluſiones ex obſervationibus & experimentis eliciendas. Subinde etiam uſui ſunt principia mathematica, de quorum ad experimenta applicatione nonnulla diximus in ſuperioribus capitibus quinto, ſexto & ſeptimo, cum de ſtudio Mechanicæ, Hydroſtaticæ, Aërometriæ, Hydraulicæ & Opticæ ageremus. Ex obſervationibus quoque atque experimentis eliciendæ ſunt propoſitiones determinatæ eo modo, quem in Logica capite 2. ſect. 2. part. 2. expoſuimus, cum methodum formandi judicia intuitiva & notiones a poſteriori traderemus, atque ex hiſce principiis demonſtranda ſunt alia, quæ a priori inde deducuntur. Hoc enim pacto condenda forent elementa Philoſophiæ naturalis, eundem uſum promittentia, quem habent elementa *Euclidis* in Matheſi. Quamdiu enim deſiderantur principia certa, quibus in ratiocinando utaris, luxurianti imaginationi omnia tribuuntur atque adeo non mirum, ſi abortus imaginationis pro veritate in Philoſophia & theoria Medica obtruduntur. Neque mirum videri debet, quod de eodem ſubjecto meditati incidant in cogitationes toto cœlo diverſas, ita ut unus per principia chymica explicare velit, quod alter explicat per mechanica, alius per figmenta ad imitationem cauſarum ſibi notarum, quæ effectum ei ſimilem producunt, cujus cauſa vel ratio quæritur. Abſtinemus ab exemplis, ne ſint odioſa. Cenſere alios videri nolumus, dum docere nobis propoſitum eſt. Quodſi Deus nobis vitam animi ac corporis vires conſervaverit, ut ad Phyſicam, Philoſophia practica abſoluta, progredi licuerit; operam dabimus, ut iſtiusmodi principia ſtabiliamus, ne facultatibus inferioribus tribuatur, quod ab intellectu expectandum. Eorum autem neceſſitatem in dubium revocare nequit, qui facultates cognoſcendi earumque uſum per-

perspexit. Immo si distinctam ratiocinii notionem ex Logica hausit, eam agnoscere tenetur. Observatio enim & experimentum non suppeditat nisi propositionem unam, quæ in syllogismo minoris vicem tuetur. Quodsi ergo hinc inferenda conclusio, principio opus est, quod majoris locum occupat. Cumque non semper unico syllogismo inferatur conclusio, pluribus quoque principiis opus. Quæ enim ratio est, cur multi multa cumulaverint experimenta, multas collegerint observationes rariores, nihil tamen inde intulerint, quod ad alia ratiocinando detegenda prodesset, ut phænomena nondum observata prævidere ac prædicere liceret? Sane non alia, quam quod deficiant principia, quorum ad experimenta & observationes applicatione inferantur conclusiones. Observationes communes, quæ basis sunt omnis cognitionis astronomicæ, in vulgus notæ. Cur vero Astronomus hinc colligat, quæ alii inde colligere nequeunt, non alia ratio est, quam quod ille principia Geometriæ, quæ ipsi perspecta sunt, ad illas applicet, his vero nulla sint principia, quæ ad easdem applicare possint. *Robertus Boyle* multa dedit de qualitatibus sensibilibus experimenta: quid vero hinc colligit? Nil nisi generalem hanc propositionem, quæ in Cosmologia ex principiis metaphysicis demonstratur, omnia in natura fieri mechanice. Provocare poteram ad Chymiam, cujus theoria fœcunda ad inveniendum apta adhuc desideratur, & usus in scientia naturali prædicatur, sed non ostenditur: sed in re per anteriora satis manifesta prolixiores esse nolumus.

§. 313. Astronomia quoque nos docet, conjunctis viribus scientiam esse excolendam & inventa antecessorum esse emendanda, perficienda, confirmanda, prout occasio tulerit, consequenter quæ ab aliis tradita sunt ante addiscenda, quam ad scientiam amplificandam animum appellas. Quantum hic peccetur ab aliis, qui Astronomorum non sequuntur morem, in vulgus proh dolor! notum est. In inventorum numero esse volunt, qui discentium subsellia occupare debebant. Quæ ab aliis tradita sunt contemnunt, antequam ea

ea didicerunt. Sibi soli sapere videntur, qui ex aliena doctrina sapere debebant. Sibi soli sufficere videntur, qui alieno auxilio maxime indigent. Quo quis indoctior, eo in censendis aliis audacior. Vana virium fiducia summa audent, quæ nullo negotio a se confici posse putant, cum vulgaribus capiendis eædem vix ac ne vix quidem sufficiant. Non amore veritatis ducuntur, sed vanæ ambitioni litantes vulgo imperito ut placeant unice student. Argumentis extrinsecis pugnant, qui rationes intrinsecas ut perspicerent, operam dare debebant. Quodsi Astronomi iisdem moribus fuissent præditi, nihil adhuc præclari de motu siderum sciretur, nec phænomena cœlestia tanta certitudine prædicere daretur, quemadmodum hodie ab Astronomis fieri solet. Quantum, quæso, promota fuit scientia astronomica altercationibus istis de motu Telluris? Quantum vero incrementi debet hypothesi terræ motæ legitime excultæ? Utinam igitur omnes Astronomiæ operam navarent eamque analytice expenderent, quemadmodum paulo ante inculcavimus, quotquot ad scientias excolendas animum appellere decreverunt. Ego hunc fructum longe maximum judico, qui ex studio astronomico sperari potest, nec me pœniteret temporis quod in eo consumsi, etiamsi alium nullum inde reportassem. Discant hinc, quantum sibi desint, qui studium Astronomiæ negligunt hac sola de causa, quod nullam ejus utilitatem esse sibi persuadeant in eo vitæ genere, quod olim sequi statuerunt. Quasi vero ea mentis metamorphosis, quæ a studio astronomico expectanda, nullius momenti sit in quolibet vitæ genere, quod eruditi sequi tenentur. Vulgo quidem ingeminatur:

Didicisse fideliter artes
Emollit mores, nec sinit esse feros:

quod etsi multo laxiore sensu verum sit, quam vulgo accipitur, in praxi tamen parum attenditur. Nemo enim quærit, quantum studium aliquod faciat ad mores emolliendos, aut, ut clarius dicam, ad omnem facultatum nostrarum promptum & genuinum usum.

§. 314. Occurrendum vero est

est objectioni, quam forsan nonnulli movere poterant Astronomiæ non modo periti, verum etiam in eadem perficienda utiliter versati. Existimabunt enim, eo quem diximus (§. 309), modo veritatem astronomicam non fuisse detectam. Incessisse inventores per multas ambages, antequam ad viam, qua sit eundum, ipsis pervenire datum fuerit, ac multis frustra tentatis tandem reperisse, quod ad progressum ulteriorem faceret. Immo plures in deviis substitisse, antequam uni licuerit esse adeo felici, ut in viam rectam incideret. Multum haud raro temporis præterlapsum fuisse, antequam surgeret Astronomus, qui quid daret, cui in Analysi nostra locus esse poterat. Non igitur tam ardua, qualia sunt Astronomorum inventa, tanta facilitate inveniri potuisse, quantam præ se fert analysis nostra. Ubi veritates detectæ sint, earum investigationem videri obviam, quæ prorsus inaccessæ videntur, ubi adhuc ignorantur. Non nego, si facta sola respicias, vera omnino esse, quæ dicuntur: neque enim nobis difficile foret exemplis ea confirmare. Verum enimvero nobis non jam quæstio est de eo, quod factum est; sed de methodo, qua veritas latens tandem in apricum producta. Quodsi regulæ methodi, quibus legitimus facultatum nostrarum usus præcipitur, primis inventoribus distincte fuissent perspectæ, nec defecisset theoria principia ad ratiocinandum necessaria suppeditans aut hæc satis familiaria illis fuissent, in ambages inutiles non incidissent, sed rectam, qua eundem est, viam statim animadvertissent, nec in devia delapsi fuissent, multo minus in iisdem diu substitissent. Breviori adeo tempore ea dedissent, quæ in Analysi nostra locum merentur, nisi quantum observandi opportunitas moram injecisset. Quando in apricum productum, quod quærebatur, quonam usu facultatum nostrarum id fuerit factum, reperire licet ac tanto quidem evidentius id patet, si quis in principiis Psychologicis fuerit versatus. Non igitur inutile, immo potius necessarium est, nisi incrementum artis inveniendi negligere voluerimus, ut in eundum omni animi contentione inquiramus, atque eum ad distinctas notiones

revo-

revocemus, ut constet, quomodo certa methodo reperiri potuisset ab uno, quod nonnisi post multa tentamina, in quibus casui multum tribuitur, detectum. Qui ea perpendit, quæ de Logica artificiali in Prolegomenis Logicæ inculcavimus, dictis facile assentietur. Homines multi considerantur instar unius, in quo nonnisi locum habet rectus facultatum, quem fecerunt, usus rejectis aberrationibus, quæ vel usus hujus defectui, vel abusui tribuendæ. Quodsi enim extitisset homo, qui rectum facultatum suarum usum absque ulla aberratione facere potuisset, is nonnisi ea fecisset, quæ ad detegendam veritatem latentem spectassent. Quemadmodum in moralibus observandum illud *Catonis*, ut ex alieno casu discas, quæ vites, & nonnisi ea imiteris, quæ ad rectum facultatum usum faciunt; ita similiter hoc tenendum in Arte inveniendi & omni veritatis cognitione. Fictio illa, quæ hic admittitur, nihil absurdi habet, atque longe utilissima est. Meretur itaque attentionem quoad omnia, quæ a facultatum humanarum usu proficisci possunt. Qui studio Matheseos intellectum peficere vult, non aliud intendi, quam ut rectum consequatur facultatum usum, aberrationes omnes, quantum datur, posthac evitaturus. Animum igitur attendere debet ad ea, quæ usum istum loquuntur, parum sollicitus, utrum in eodem, an in diversis subjectis ea sint observanda, modo constet, nonnisi his factis ad scopum contendisse inventores, cetera vero ipsis nihil profuisse, sed inutiles tantummodo moras pepe risse ab illis minime intentas, sed moleste latas. Nisi hoc observaveris, aliorum exempla & casus tibi parum proderunt ad perfectionem propriam promovendam, quam tamen metam esse in Philosophia practica universali demonstravimus, ad quam continuo contendere tenemur, nisi obligationi nostræ naturali deesse ac felicitati propriæ obicem ponere velimus.

§. 315. Nemo non videt amplissimum hic esse dicendorum campum, siquidem omnia, quæ ad præsentem scopum spectant, minutissime persequi velimus: sed tantæ prolixitati sese immergere non patitur præsens institu-

 tum.

tum. Neque etiam diffitemur, quod, si quis ulterius progredi voluerit, ei alios quoque autores consulendos esse tum veteres, quorum placita collegit *Ricciolus* in Almagesto, tum recentiores, quos superius laudavimus, cum scriptores rerum astronomicarum recenseremus. Quodsi enim ante sibi cognita atque perspecta reddiderit, quæ nos nostro more explicavimus, ut sine hæsitatione in legendis aliorum scriptis progredi possit, quam ad hæc legenda accedat, & ordinem temporis observet, quo prodita fuerunt, ut pateat, quodnam cogitata anteriora adjumentum attulerint ad posteriora; quæ exempli loco modo in medium protulimus haud difficulter imitabitur, præsertim si in disciplinis anterioribus more nostro fuerit versatus, nec ullibi suam passus desiderari operam. Hoc consilium qui sequi voluerit sua sponte animadvertet, quomodo cum Geometria creverit quoque Astronomia. Sane quæ *Keplerus* dare non poterat utut sagacissimi ingenii vir, non invita Minerva tentarunt alii, postquam nostro ævo Geometria magis exculta & ad multo majus fastigium evecta, quam *Kepleri* tempore attigerat. Est etiam Algebræ suus usus in parte Astronomiæ theorica, cujus latissimus usus per universam Mathesin. *Kepleri* ævo adeo ignorabatur, ita ut ne somniando quidem eum prævidere daretur, nec mirari debeamus, quod abjecta subinde vir summus de Algebra senserit. In gratiam igitur eorum, qui Algebræ studio delectantur, unum alterumque specimen dedimus, quo præclarum ejus in Astronomia usum insinuaremus. Plura suppeditabit *Gregorius* in Elementis Astronomiæ, & illustria admodum exempla petere licet ex Commentariis Petropolitanis.

§. 316. Erunt forsitan nonnulli, qui sibi persuadebunt, inanem operam sumi in tractatione analytica studii astronomici, propterea quod absque ea Astronomi sua invenerunt ac hodienum inventa antecessorum perficiant novisque accessionibus nobilissimam scientiam locupletent. Enimvero facilis est responsio. Qui quæ ab aliis inventa sunt attenta mente considerant, eorum animis idea

quæ-

dam exemplaris usus facultatum sese insinuat ad particulare hoc objectum restricta, quam etsi confusam imitantur quoad idem objectum nescii omnino, quemnam facultatum usum faciant, quemadmodum accidit iis, qui in tractandis negotiis imitantur alios in casu simili theoria omni destituti. Neque diffitendum hac imitatione niti omnem praxin artis inveniendi in Astronomia, quidni etiam in Mathesi reliqua, si a regulis Algebræ seu Analyseos Mathematicæ recesseris, quamvis etiam in Algebræ praxi huic imitationi multus sit locus. Quam multum vero in hac imitatione tribuatur casui, & quam multis ideo tentaminibus locus sit, meum non est in præsenti exponere. Enimvero tota nostra tractatio analytica non alio tendit, quam ut idea ista confusa revocetur ad distinctam, quo facto imitatio, quæ fuerat empirica, rationalis evadit, & multo latius extenditur, immo etiam casui subducitur. Nos jam potissimum intendimus, ut Phisophus imitetur Astronomum in qualibet Philosophiæ parte, immo eruditus quicunque in suo scibili, cum de intellectu studio Matheseos perficiendo agamus, ut eodem extra Mathesin rite utamur. Hæc vero imitatio expectari nequit ab idea confusa, quæ Astronomo prodest in Astronomia excolenda. Immo si qui eam audent, quam sint infelices satis patet. Non deessent exempla illustria, quibus hoc doceri poterat, nisi consultius existimaremus ab iis producendis abstinere.

CAPUT X.
De
Studio Geographiæ, Gnomonicæ & Chronologiæ.

§. 317.

Geographia mathematica, cum qua hic nobis negotium est, multum affinitatis habet cum Astronomia, præsertim sphærica, a cujus principiis tota pendet. Unde etiam veteres eandem ab Astronomia

nomia non ſepararunt, ſed quæ in eadem traduntur, ad Aſtronomiam retulerunt. Quamobrem quæ de ſtudio Aſtronomiæ ſphæricæ dicta ſunt, de Geographiæ quoque ſtudio tenenda ſunt. Et quoniam Geographia, quemadmodum modo diximus, principiis Aſtronomiæ ſphæricæ præſertim nititur; ad eam accedere minime debet niſi eorundem gnarus. Quemadmodum itaque in Elementis noſtris Aſtronomiam Geographiæ præmiſimus, ita etiam in Aſtronomia ante verſari debet, quam ad Geographiam pedem promoveat, qui inoffenſo pede in hac progredi voluerit. Quodſi quis extra ſyſtema Geographiam mathematicam tradere voluerit, ei multa explicanda ſunt, quæ in Aſtronomia docentur, quemadmodum etiam a nonnullis factum vidimus.

§. 318. Qui nonniſi hiſtoricam Geographiæ cognitionem ſibi acquirere ſtudent, iis ſufficiunt, quæ ad Globum terreſtrem atque mappas geographicas & tam illius, quam harum uſum cognoſcendum faciunt. Ex capite itaque primo ea addiſcere tenentur, quæ de figura Telluris & circulis in ejus ſuperficie concipiendis habentur, prætermiſſis problematis ad inveſtigandam ſemidiametrum Telluris ſpectantibus. Sufficit iisdem notaſſe, quæ de quantitate ſemidiametri Telluris & unius milliaris Germanici in pedibus Pariſinis leguntur (§. 43 *Geogr.*). Curioſior ſi quis fuerit, addere poteſt magnitudinem ſuperficiei ac ſoliditatis Terræ (§. 44 *Geogr.*). Nec uſu caret, ſi Tabulam, quæ in ſcholio problematis 7 (§. 46 *Geogr.*) exhibetur, de convertendis gradibus ſingulorum parallelorum in milliaria Germanica inſpiciat. Ex capite ſecundo definitiones diſtantiæ locorum, longitudinis item ac latitudinis ſibi perſpectas reddere tenentur & quod latitudo loci æqualis ſit elevationi poli notent, ut intelligant, quid ſibi velit Tabula Latitudinis & Longitudinis locorum (§. 60 *Geogr.*), prætermiſſis problematis de diſtantia locorum per Trigonometriam ſphæricam ſolvendis. In capite tertio ultra definitiones zonarum & tempeſtatum ſtatarum non progrediendum, additis theorematis 8 & ſequentibus, ſed absque demonſtrationibus.

nibus. Eadem fere tenenda ſunt in perluſtrando capite quarto, nimirum ut præter definitiones nonniſi theoremata pleraque absque demonſtratione notentur & uſus Tabulæ climatum (§. 138 *Geogr.*) inſpiciatur. Niſi quis curioſior fuerit, caput quintum ſicco pede tranſire poteſt, ex ſexto autem ſufficient definitiones. Ex ſeptimo diviſionem plagarum ad dignoſcendos ventos cognoſci perutile eſt, una cum theorematis de ventorum proprietatibus, quorum uſus eſt in dijudicandis tempeſtatibus vagis. Inprimis autem horum ſtudio inſervit caput 8 de Globi terreſtris conſtructione & uſu. Immo ſuademus ut Globus ſemper ad manus ſit in prima ſtatim tractatione Geographiæ, quo facilius intelligantur, quæ in anterioribus docentur. Tandem ex capite nono, quod de mappis Geographicis agit, nonniſi ea haurienda ſunt, quæ rudem quandam earundem ideam animo ingenerant & uſum ipſarum explicant. Nimirum ad manus eſſe debent mappæ tum univerſales, tum particulares, & addiſcendum, quid denotent lineæ in iisdem deſcriptæ, quidque indigitent numeri in margine adſcripti. Ita enim constructio intelligitur, quantum ſufficit ad earum uſum: neque eo fine requiritur, ut quis modum conſtruendi mappas geographicas capiat. Paucis adeo horis ſtudium Geographiæ abſolvere poteſt, qui in hiſtorica ejus cognitione acquieſcit, ultra quam nemini progrediendum, qui aliud non intendit, quam ut mapparum geographicarum ideam quandam diſtinctam animo concipiat, quarum hodie promiſcuus omnium uſus eſt.

§. 319. Qui ad ad ſecundum cognitionis gradum adſpirant, elementa Geographiæ integra eo, qui a nobis conſcripta ſunt, ordine perluſtrare debent, obſervatis iis, quæ ad nauſeam usque inculcavimus, cum de ſtudio Aſtronomiæ ſphæricæ ageremus: neque enim inter theoremata ac problemata Aſtronomiæ ſphæricæ & Geographiæ ulla differentia eſt, cum utrobique ad primum mobile referantur, ſeu a motu communi ſolis & ſtellarum pendeant, ut adeo etiam olim præſertim problemata geographica ad problemata primi mobilis fuerint relata. Lo-

quuntur demonstrationes, principia ubivis peti ex Astronomia. Unde me tacente intelligitur, scientificam Geographiæ mathematicæ cognitionem acquiri minime posse nisi ab eo, qui in Astronomia fuerit versatus. Equidem non desunt, qui, quæ de asciis, amphisciis, heteroscіis & perisciis, nec non de antœcis, periœcis & antipodibus docentur, pro futilibus habent, quæ utiliter ignorentur; judicium tamen præcipitant, vel terminorum insuetorum sono delusi, vel ex eorum definitionibus non prospicientes doctrinæ usum. Quibus terminorum insuetorum sonus imponit, illi cum Scholasticorum terminis metaphysicis nondum intellectos comparant & quod de his inculcari audiverunt judicium, ad hos applicant cœca imitatione iis solenni, qui de rerum valore ex ipsarum notionibus per se statuere nesciunt. Oppido autem falluntur: termini enim geographici accuratis definitionibus explicantur, quæ optime intelliguntur, modo terminos eas ingredientes ex anterioribus habueris perspectos, non vero definitionibus magis obscurantur, quemadmodum a scholasticis fieri suevit. Præterea ex his ipsis definitionibus demonstrantur accurata methodo; quemadmodum in ceteris Matheseos partibus, quæ ad cognitionem Telluris mathematicam spectant, adeoque in Geographia prætermittenda non sunt (§. 1. *Geogr.*). Non minor est præcipitantia eorum, qui negant, quæ prospicere nequeunt. In Geographia mathematica doceri debet omnis differentia phænomenorum, quæ per universam Terræ superficiem a primo mobili pendent. Inter hæc vero etiam sunt umbrarum differentiæ, quæ corpora a sole illuminata projiciunt, & differentiæ longitudinum dierum atque noctium atque tempestatum statarum, nec non ortus & occasus stellarum. Has itaque cognoscere tenetur, qui omnem in diversis Telluris locis differentiam perspicere voluerit, etiamsi locum, quo ipse commoratur, nunquam fuerit egressus. Quæ ad umbras spectant, in doctrina de asciis, amphisciis, heteroscіis & perisciis explicantur; quæ vero ad dierum & tempestatum statarum aliorumque phænomenorum agnatorum differentias per-

pertinent, doctrina de antoecis, perioecis & antipodibus continet. Non igitur nugæ inanes sunt, quæ hic demonstrantur, sed veritates necessariæ, non modo animum sciendi cupidum oblectantes, verum etiam aliis in posterum inveniendis inservientes. Non jam inquirimus in casus, quibus interest cognosci statum Telluris in dato loco quoad hæc phænomena. Qui enim nulla sciendi cupiditate flagrat, eum quoque parum movebit utilitas, quam nondum existimat suam, sed alienam judicat. Unicum moneri consultum duco de constructione mapparum geographicarum præsertim universalium. Mappæ universales non sunt nisi projectiones sphæræ in plano: unde sub hoc etiam nomine earum constructionem docuimus (§. 272 *& seq. Geogr.*). Non igitur diffitemur, si doctrinam de projectione sphæræ præmittere libuisset, quemadmodum sphæricorum elementa præmisimus Astronomiæ, multo concinnius constructionem istam demonstrari potuisse. Quoniam tamen brevitati consulere decrevimus, quæ de projectione sphæræ præsupponi debebant, ipsis demonstrationibus geographicis inseruimus. Non tamen ideo Elementa projectionis sphæræ tanquam inutilia rejicimus: probe enim novimus, quantus eorum sit usus tum in constructione Astrolabiorum demonstranda, tum etiam in projiciendis eclipsibus solaribus, quas projectiones hodie non inutiliter adhibent Astronomi. Quoniam vero nos ea non attingimus, in quibus potissimum usus illorum sese exerit; nec præter necessitatem theoriam nostrorum Elementorum multiplicare voluimus, abunde persuasi, quod nostrorum gnarus absque ulla difficultate ea aliunde haurire possit, siquidem iisdem habuerit opus.

§. 320. Abunde constat ex antecedentibus, qui ad tertium cognitionis gradum adspirant, eos via analytica progredi debere, ut inquirant in artificia, quibus veritas, quæ demonstratur, in apricum fuerit perducta. Utimur in eruendis plerisque, quæ traduntur, Trigonometria, tam plana, quam potissimum sphærica. Quamobrem quæ in Astronomia eo fine dicta sunt, hic repetenda veniunt. Cetera ex prin-

principiis astronomicis, & geometricis, pauca quædam de umbris ex Opticis, communi methodo Logica deducuntur, adeoque patent per ea, quæ de usu Logicæ in veritate a priori investiganda docuimus in opere logico, & uberius explicata fuerunt in superioribus, cum de studio Arithmeticæ & Geometriæ elementaris ageremus. Non itaque opus est, ut diutius hisce immoremur, cum ad Geographiam accedere minime debeat, nisi Arithmeticæ, Geometriæ & Astronomiæ, immo etiam Opticæ gnarus. Equidem dubitandum non est, esse etiam Algebræ in solvendis problematis geographicis usum, etsi hactenus ad Geographiam parum appilicata fuerit. Neque etiam dubitamus fore ut, quemadmodum Algebra applicari cœpit ad partem Astronomiæ sphæricam seu problemata primi mobilis, in posterum non defuturi sint, qui solutiones problematum in Geographia adhuc desideratorum dabunt. Sed cum ea, quæ nostro scopo sufficere visa sunt, absque Algebræ auxilio tradi possint; hac vice consultius visum fuit a calculis algebraicis abstinere. Neque enim Elementis Matheseos omnia inserenda sunt, quæ hactenus fuerunt detecta; aut per ea ulterius detegi poterant, ne studium Matheseos per se satis amplum reddatur nimis diffusum & ejus faciamus desertores, quos ad idem allicere & ad ulteriora præparare intendimus. Quid quod nec nobis conveniat tempus in Mathesi consumere, quod Philosophiæ reformandæ impendere debemus, cum hodie non desint multi, qui Mathesi excolendæ utilem operam navant, nemo autem propemodum sit, qui similem Philosophiæ præstare velit. Unum tamen adhuc restat, quod silentio prætereundum non est. Constat hodie figuram Telluris non esse sphæricam, quemadmodum crediderе veteres, sed potius sphæroidicam, prouti annotavimus (§. 4 *Geogr.*). Neque ignotum est, ope Algebræ in figuram Telluris inquisivisse non infelici successu Geometras præclaros. Problema adeo tam illustre non videbatur omittendum, quod præsertim præstantiam Analyseos recentioris tam aperte loquitur. Enimvero monuimus jam loco citato,

citato, ſub judice adhuc eſſe litem de vera Telluris figura. Quamobrem cum controverſia ratiociniis ſolis definiri minime poſſit, & figura ſphærica ſatisfaciat in Geographia, qualem tradere debuimus; a figura vera ejusdem determinanda abſtinendum erat; præſertim quod ea, quæ a nobis tradita ſunt de Analyſi moderna & ejus ad problemata phyſico-mechanica applicatione in Mechanica, abunde ſufficiant ad intelligendas analytiticas ſolutiones problematis de figura Telluris, quas dederunt Geometræ recentiores. Elementa noſtra Matheſeos non eo fine conſcripſimus, ut Matheſeos cultores a lectione aliorum librorum avocemus, ſed ut eos ad eandem præparemus & aptos efficiamus non ſine multo temporis ac laboris compendio, & ut iis pervia ſit Matheſis, qui intellectus perficiendi gratia in eadem verſari debent, quo eodem feliciusextra eandem utantur: id quod ex tota hac tractatione de ſtudio Matheſeos recte inſtituendo abunde eluceſcit.

§. 321. In gratiam eorum, qui intellectus perficiendi gratia in Geographia verſantur, ut eodem prompte extra eandem utantur, non eſt quod addam. Geometriam omnem methodo ſynthetica concinnavimus, qua uſi ſumus in Geometria elementari & aliis Matheſeos partibus, inprimis etiam in parte Aſtronomiæ ſphærica, ad quam proxime accedit. Quamobrem quæ eo fine ibidem inculcavimus, ea hic quoque obſervanda ſunt. Neque vero exiſtimandum eſt, propterea ſtudium geographicum tuto negligi poſſe, cum ab eo ſperandum non ſit, quod non jam dederint diſciplinæ aliæ, quibus ante operam navare tenemur, quam ad Geographiam pedem promoveamus. Etenim cum habitus omnis crebro exercitio acquiratur & continuo exercitio conſervetur ac perficiatur; non ſuperflua videri debet opera, quæ Geographiæ analytice expendendæ impenditur. Neque eſt quod dicas, idem obtineri poſſe ſola repetitione diſciplinarum ceterarum. Præſtat enim varietate obtinere, quod eorundem repetitio promittere videbatur. Quemadmodum nimirum varietas delectat, eorundem vero repetitio moleſta accidit;

dit; ita quoque illa attentionem apprime hic necessariam excitat & conservat, quam hæc labefactat, ut difficilius conservetur. Exercitia itaque ad eundem habitum tendentia, quæ quoad hunc scopum eadem sunt, diversa tamen apparere debent, ita ut quasi continuo aliud agendo in eundem scopum collinees & per diversa media finem tibi consequi videaris. Neque hoc singulare quidpiam ac insolitum existimandum. Sane in ipsa Arithmetica practica varietate exemplorum consequi studemus, quod repetitione ejusdem exempli obtineri poterat, si habitum acquirendum in se spectes.

§. 322. Hydrographia, quæ de navigatione per mare agit, apud nos nonnisi curiositatis gratia addiscitur. Quamobrem qui eam negligere voluerit, per nos negligat. Mathematicum tamen decet, ne eandem ignoret. Quodsi vero eandem perlustrare volueris, eodem prorsus modo in eo versaberis, quemadmodum in Geographia. Eadem enim methodo conscripta est, qua Geographiam tradidimus, & perinde ac hæc principiis astronomicis tota nititur, ut adeo hæc Matheseos pars longe utilissima fructus Astronomiæ sit &, si Astronomia non alium usum haberet, propter hunc solum summo cum studio excoli mereretur. Qui animum sciendi cupidum possident, eos studium Hydrographiæ mirifice delectat, quatenus vident, quomodo ex principiis mathematicis, præsertim Astronomicis deducta fuerint, quæ intellectui humano prorsus inaccessa videri poterant, & fœcunditatem principiorum mathematicorum, quæ in se sterilia apparebant, ipso facto experiuntur. Plura non addimus: quæ enim dici poterant, ex anterioribus abunde intelliguntur.

§. 323. Quod studium Chronologiæ attinet, de eo non multa nobis dicenda sunt. Pleraque enim, quæ in Chronologia traduntur, non majorem requirunt attentionem, quam quæ acquirendæ cognitioni historicæ sufficit. Qui nonisi vulgarem Chronologiæ notitiam sibi comparare student, iis satisfaciunt definitiones diei & noctis, epochæ diei civilis, horæ, horæ astronomicæ, Europææ & Judaicæ, minuti primi denique atque

atque secundi ex capite primo. Ex secundo perspectas sibi reddere debent definitiones omnes una cum quantitate mensis lunaris communis & embolimæi, seu corollario primo definitionis 28. Ex capite tertio sufficit annotasse, quæ de anno Juliano & Gregoriano dicuntur. Si paulo curiosior fuerit, addet ea, quæ dicuntur de recente Judæorum & Turcarum anno. Ex capite quarto ad intelligendum calendarium addiscant, quid sit cyclus Solis, cyclus Lunæ & Cyclus indictionum atque periodus Juliana & ex capite quinto petant, quid sit Epocha Russorum, epocha mundi conditi Judaica & Epocha Muhamedica, qui vero in legendis Autoribus classicis versatur, addat definitiones epochæ olympiadum & epochæ urbis conditæ. Denique ad vulgarem Chronologiæ notitiam sufficit aliqua Calendarii Juliani & Gregoriani cognitio ex capite sexto haurienda &, ubi quis curiosior fuerit similem Calendarii Judaici & Muhamedani ex definitionibus potissimum capitis ultimi sibi comparet. Calculos enim, qui in problematis docentur, una cum corollariis, quibus eorum rationes continentur, tuto negligere poterit. Brevi adeo labore totum studium chronologicum absolvi poterit, in quo memoriæ omnes fere sunt partes. Me autem tacente patet, terminos non nullos ex Astronomia perspectos esse debere, ut definitiones chronologicæ intelligantur.

§. 324. Qui accuratiorem Chronologiæ cognitionem appetunt, eam totam perlustrare tenentur: id quod nullo fere negotio fiet, ubi in Astronomia fuerint versati, cum eorum, quæ in Chronologia intricata sunt & hoc studium perplexum atque molestum reddunt, nonnisi cognitionem historicam suggeramus. Hisce principiis imbutus & in Astronomia cum laude versatus adeat Autores, quos supra suo loco commendavimus, ubi spinosis difficultatibus sese immergere voluerit, ut judicium ferre queat, quid veri subsit iis, quæ aliorum fide assummuntur. Neque enim existimandum est singula, quæ dicuntur ad chronologiam historicam spectantia, ex monumentis Veterum, quæ nobis supersunt, esse adeo aperta & explorata, ut de eorum veritate

ritate ambigi minime possit. Hoc omnino monendum esse duximus, ne, qui elementa nostra Chronologiæ perlegit, miretur, cur vulgo conqueratur studium Chronologiæ esse abstrusum, perplexum atque difficile, cum tamen nullum videatur, quod in eo collocandum, si comparetur cum eo, quod in tractandis ceteris Matheseos partibus hactenus præcepimus.

§. 325. Qui ad tertium cognitionis gradum adspirant, in Chronologia quoque quædam invenient, quæ ad ipsorum sunt palatum. Juvabit perpendere, quomodo mensuræ temporis ex motu siderum fuerint deductæ & ad usum civilem aptatæ, ut tempus civile cum astronomico in concordiam reducatur: quod posterius cum non uno modo factum sit, quatenus arbitrium humanum in determinationem influit, observare hic licet, quæ in veritatibus necessariis locum minime habent. Singularem quoque hic attentionem merentur, quæ de characteribus temporis præsertim artificialibus & variis cyclis, atque periodo Juliana docentur. Denique probe perpendenda sunt, quæ de Calendario Christiano & Judaico traduntur. Etsi enim calendarium Judaicum principiis nonnullis nitatur superstitiosis, calculus tamen, quo in computatione utendum, admodum ingeniosus est, ut ab artis inveniendi cupido probe perpendi mereatur. Præbet Chronologia exemplum, quomodo veritates, quas cognovimus, ad usum vitæ civilis aptentur, ubi summus rigor attendi nequit, id tamen agendum, ne ab eo longius recedas in præjudicium finis intenti. Simile quid occurrit, ubi Jus naturæ ad definienda negotia humana tam privata, quam publica adhibetur, cujus rigor summus observari nequit, ut adeo ex eodem condendum sit jus civile ac jus gentium arbitrarium, quod ab eo quam minimum recedat & quo cavetur, ne fine civitatum particularium & civitatis maximæ, quam Gentes constituunt, excidamus. Suppeditat itaque Chronologia, modo in abstrahendo satis fueris acutus, nec destituaris illo acumine, quo abstracta in concretis pervidemus, principia generalia, quæ notionum directricium loco esse possunt in istiusmodi casibus.

Qui

Qui in Philoſophia noſtra fuerint verſati, iis ſatis clara & perſpicua erunt, quæ dicuntur. Nimis autem prolixi eſſe deberemus, ſi uberius explicanda eſſent, ne ceteris quoque obſcura viderentur. Videmus adeo (id quod etiam haud pauca ante dicta ulterius confirmant), quam utile ſit ſtudium Philoſophiæ verioris, qualem nos profitemur, cum ſtudio mathematico conjungi, ſiquidem uſus omnis, quem hoc præſtat, in intellectu perficiendo, compos fieri volueris. Ita demum obtinebitur, ut Matheſis proſit ad recte philoſophandum : id quod ſola applicatione ad cognitionem Naturæ mathematicam promovendam obtineri nequit, ut ut ea præclara ſit & maxime commendendum ingeniis excelſis, ut hoc cognitionis genus excolatur.

§. 326. Gnomonica diſciplina tota practica eſt, in qua ſola praxis intenditur. Quamobrem a perplexis quoque demonſtrationibus abſtinuimus, quas legere nolunt, qui intelligere poterant, ceteri autem non capiunt. Quodſi quis theoriam omnem aſpernatur, nec niſi conſtructionem horologiorum ſolarium curæ cordique habet; ei ſatisfacient definitiones & problematum reſolutiones. Si quæ problemata ipſi magis curioſa, quam utilia videntur; ſuo ſtabit judicio in omittendis iis, quorum notitia ſe carere poſſe exiſtimat. Deſcriptionem horologiorum ſolarium adeo perſpicue expoſuimus, ut eadem facilitate abſolvi poſſit, qua figuræ in Geometria elementari delineantur & alia ejus problemata conſtruuntur. Ne tamen hæreat circa terminos, nec ſatis intelligat quid fieri debeat; omnino conſultum eſt, ut levem quandam Aſtronomiæ ſphæricæ, Geographiæ & Chronologiæ notitiam ſibi comparet, qualem commendavimus iis, qui nonniſi hiſtoricam cognitionem ſibi comparare ſtudent. Inprimis autem hic uſui eſt, ſi ideas, quæ lumen praxi Gnomonicæ affundere debent, ne in ea prorſus cœcutias, imaginationi inſinuari cures. Exempli loco eſſe poteſt, ſi ipſam deſcriptionem horologiorum ſolarium applicatione actuali horologii æquinoctialis ad planum, in quo deſcribendum, oſtendas. Uſum hic habent machinæ gnomoni-

monicæ, quas in usum descriptionis horologiorum solarium commendat & brevi quodam Tractatu descripsit *Pardies*, quamvis instituto præsenti sufficiat horologium æquinoctionale simplici tantummodo modo descriptum, quemadmodum ex problemate quarto (§.36 *Gnom.*) facile intelligitur.

§. 327. Etsi autem a perplexis & intricatis demonstrationibus, quales dedit *Clavius* & quas parum amant studio Gnomonico sese mancipantes, consulto abstinuerimus, ne nobis scriberemus, dum alios erudire volumus; id tamen egimus, ut, quanta fieri potuit, brevitate ac facilitate satisfaceremus iis, qui scientificam horologiorum solarium cognitionem appetunt, ne ignorent genuinas constructionum rationes. Ad hanc igitur qui adspirant, eo modo in Gnomica versentur, quo in Geometria elementari versandum esse docuimus, ubi secundus cognitionis gradus intenditur. Haurit Gnomonica principia sua ex Arithmetica, Geometria elementari, Trigonometria utraque, Astronomiæ sphærica præsertim parte, Geographia & Chronologia. Antequam igitur ad illam tractandam accedat, scientificæ cognitionis cupidus, harum tractationem præmittere debet. Hoc pacto in omni Gnomonica nihil deprehendet, quod non satis intelligat & de cujus veritate dubium quoddam supersit. Quoniam vero, quemadmodum modo diximus (§. 326), Gnomanica tota practica est; qui eidem operam navat, singula quoque horologia in charta delineare tenetur. Quodsi dicas, tibi nunquam propositum esse, ut aliquando horologium quoddam solare actu construas; sed sufficere, ut intelligas, quomodo construantur, & cur hoc pacto construi possint, consequenter te scopo tuo potiri posse, si tantummodo resolutiones problematum cum schemate conferas; me per omnia consentientem minime habes. Etenim si horologia in charta ipsemet delinees, non modo facilius & clarius eorum constructionem intelligis, verum etiam ipsorum ideam memoriæ firmius imprimis. Quotiescunque veritates practicas cognoscere studemus, suadendum omnino est, ut eas in nobis-

nobismetipsis experiamur. Hinc etiam non dissentiente *Confucio*, summo Sinarum Philosopho, in Moralibus inculcare soleo, ut eorum, quæ docentur, veritatem in nobismetipsis experiri studeamus: quod quantam afferat utilitatem, in parte altera Philosophiæ practicæ universalis a priori abunde demonstravimus. Qui adeo cognitioni scientificæ operam navat, in omni Mathesi solutiones problematum ipsemet tentare tenetur, sive constructiones geometricas, sive calculos arithmeticos præcipiant.

§. 328. Qui ad tertium cognitionis gradum adspirant, resolutionem problematis tanquam incognitam supponere debent & vi definitionis horologii, quod describi jubetur, inquirendum, quomodo describi debeat. Etenim ex datis ratiocinando colligendum, quod quæritur. Non datur nisi definitio horologii describendi, quippe quæ ex anterioribus tanquam data supponi potest ac debet: quæritur modus idem describendi, quem resolutio explicat. Modus adeo describendi horologium ratiocinando eruendus ex ejus definitione. Definitio horologii specialis supponit definitionem horologii solaris generalem. Quamobrem facile patet, eam quoque tanquam datam supponi debere, nisi eam inter principia referre velis, quæ vi eorum, quæ definitioni speciali insunt, in memoriam revocantur. Ex definitione adeo petendæ sunt primæ propositiones, quarum ope in memoriam revocantur principia ex Astronomia vel aliunde cognita, ut ex illa ratiocinando colligi queat conclusio. Satis hæc intelliguntur ex superioribus, quæ de tertio cognitionis gradu acquirendo inculcavimus (§. 66 *& seqq.*). Non diffiteor, faciliorem fore operam, si demonstrationes problematum eo ordine concinnatæ essent, qui in methodo analytica observandus, non sumendo resolutionem tanquam hypothesin theorematis, quemadmodum in demonstrationibus syntheticis fieri solet (§. 51 *& seqq.*). Enimvero si quis in Geometria elementari problemata analytice tractaverit & methodum, qua ibidem usus, in aliis imitatus fuerit; ejus vires nec superabit analytica problematum gnomonicorum

rum tractatio. Et quamvis tyronibus hoc difficile videatur, non tamen difficile erit eorum magistris, nisi quis intempestive docentium numero sese ingerat, qui discentium subsellia potiore jure occupare debebat. Elementa Arithmeticæ Germanica methodo analytica conscripsimus eandemque in iis explicandis magis adhuc illustramus. Quodsi ergo quis ideam quandam exemplarem inde hauserit; ea ipsi facem præferet non modo in Gnomonica, sed & in aliis Matheseos partibus, immo extra eandem in disciplinis aliis. Et si quis elementa ista vel non legit, vel legere nequit linguæ Germanicæ ignarus, aut etiam Batavæ, in quam conversa sunt; ideam tamen quandam animo concipiet vi analyseos demonstrationum, quam supra (§. 38 *& seqq.*) amplissime exposuimus. Non igitur opus esse judicamus, ut ad particularia descendamus.

§. 329. Ceterum Gnomonica in numero artium est, quemadmodum Mechanica practica, quæ machinarum compositarum structuram explicat Quoniam in Gnomonica constructiones horologiorum solarium demonstrantur; ex ea discimus, quomodo artes scientifica methodo tractandæ sint. Deducitur ea prorsus a priori, atque adeo methodi artes scientifice tractandi ideam omnium optime exhibet. Artes ceteræ si non omnes, saltem plurimæ, inventæ sunt a posteriori, etsi subinde in nonnullis a priori perfectæ. Ars poliendi vitra omnino a posteriori detecta, perinde ac constructio telescopii, etsi hæc deinde a priori per principia dioptrica magis fuerit perfecta. Phænomena telescopiorum dudum ante a posteriori innotuerunt, quam earum accuratas & rigorosas demonstrationes dederint Mathematici. Idem dicendum est de speculis, quorum phænomena in Catoptrica demonstrantur. Ad Gnomonicam tamen quam proxime accedit Ars navigandi & construendi globos artificiales atque mappas geographicas & hydrographicas. Quibus adeo animus fuerit scientiam artium excolendi, illi hanc differentiam probe perpendere debent. Ex Gnomonica inprimis videre licet progressum artis

artis a priori continuandum, quomodo ſcilicet inventa anteriora non modo anſam ſuppeditent de aliis cogitandi, quorum cogitatio alias animum minime ſubiiſſet, verum etiam ad ulteriora invenienda adjumento ſint, ut adeo idem ſit in arte, qui in ſcientia progreſſus, cum utrobique eædem deprehendantur rationes. Huc inprimis animum advertere debent, qui artem inveniendi ad formam artis reducere geſtiunt, quemadmodum Logicam ad eandem redactam videmus. Nos, qui nullum Matheſeos uſum aſpernamur, ad ea quoque animum advertimus, quæ vulgo non attenduntur, & uſum, quem Matheſis habere poteſt in excolendo intellectu, ut eodem in omni ſcientiarum genere, in quavis arte & in ipſis negotiis tam privatis, quam publicis prompte ac rite utamur, majoris facimus, quam quem per ſe habere poteſt, utut ſingula æquo pretio æſtimantes nec meritam detrahamus iis laudem, qui in aliqua Matheſeos parte excolenda omnem ætatem conſumunt. Neque enim ea eſt hominis ætas, immo nec eæ ſunt ejus vires, ut unus omnia poſſit, &, niſi eſſent, qui particulari ſtudio ſcientiam egregie promoverent, nec is a Matheſi expectari poterat fructus in omni ſua extenſione, quem tantopere commendamus & cui tantum ſtatuimus pretium. Quamvis adeo in Gnomonica multa occurrunt, quæ magis curioſa, quam utilia videntur iis, qui utilitatem ex neceſſitate ad vitam commode degendam metiuntur, immo quæ a ſeveris inventorum cenſoribus ad luſus Mathematicorum referuntur, ipſis ſubinde Geometris excelſi ingenii profundique acuminis non diſſentientibus, propterea quod unusquisque ſuam amat & laudat Minervam; nobis tamen ea non contemnenda, ſed magni facienda videntur, quatenus analytica eorundem conſideratio prodeſt ad augendam artem inveniendi, immo etiam ſola eorundem ſcientifica cognitio intellectum perficit, etiamſi de eo perficiendo non cogites.

CAPUT XI.

De

Studio Pyrotechniæ, Architecturæ Militaris & Architecturæ civilis.

§. 330.

Pyrotechnia paucas continet demonstrationes, quæ ex Geometria elementari principia sua mutuantur: quas negligere facile potest, qui soli praxi studet. Ceterum quæ ad praxin faciunt, non modo perspicue, sed & distincte proposuimus, ut ideam distinctam eorum, quæ fieri debent, animo nullo negotio concipere detur. Nulli adeo dubitamus, quin studium pyrotechnicum perfacile reddiderimus. Si quis praxi operam dare voluerit, is omnino ipso opere exequi tenetur, quæ præscribuntur: quo facto ipsemet in se experietur, resolutiones problematum eodem modo esse datas, quo resolutiones Geometriæ practicæ, veluti triangulorum constructionem, linearum perpendicularium descriptionem, in Geometria elementari exhibuimus. Quodsi quis ante singulorum, quæ fieri jubentur, ideam distinctam sibi comparavit, quam ad ea facienda se conferat; is non solum ad id, quod faciendum, majorem attentionem conferet, sed & majore cum voluptate artem manuariam addiscet. Qui in nuda cognitione historica acquiescere volunt, iis quidem sufficere possunt, quæ tradimus; ubi tamen occasio offertur ipsis oculis usurpandi singula, quomodo parentur, eam negligere minime debent, cum hoc pacto ideæ efficiantur clariores, quatenus distincte explicatis insunt confuse percipienda.

§. 331. Quibus secundus cognitionis gradus curæ cordique est, non modo addere debent perpaucas demonstrationes, quæ hinc

hinc inde adjiciuntur; verum etiam eorum, quæ ex principiis geometricis demonstrari nequeunt, rationes passim indicatas emperpendere tenentur, & ad ea applicare studeant, quæ sine illarum allegatione proponuntur. Dantur equidem nonnulla in Pyrotechnia, quæ Geometriæ sublimioris & analyseos recentioris gnarus legibus mathematicis adstringere poterat, cum nunc solo arbitrio regantur; sed nobis minime vacat in talia inquirere. Hanc igitur telam aliis pertexendam lubentissime relinquimus, nobisque sufficit ea tradidisse, quæ ante perspecta habere debent, quam ingenii sui vires periclitentur.

§. 332. Pleraque, quæ in Pyrotechnia traduntur, sunt inventa, quæ artificum tentaminibus debentur, ubi casus multas sibi partes vindicat. Qui ad tertium cognitionis gradum adspirant & intellectum præsertim perficere intendunt, ut eodem extra Mathesin prompte ac rite utantur, hoc etiam inventorum genus probe expendere tenentur: neque enim rerum ceterarum, quemadmodum mathematicarum, tam exasciata prostat theoria, ut suppetant principia, quorum vi a priori detegere licet omnia, quæ quæruntur. Empirica inveniendi methodus, qua utuntur artifices experientiæ, qua pollent, omnem facientes usum, qui a notionibus confusis expectari potest, in rebus utilissimis detegendis omne fert punctum, modo eadem rite uti noris: id quod tibi promittere poteris, si eundo per exempla, qualia suppeditat Pyrotechnia, eam revoces ad notiones distinctas. Qui vel ea legit, quæ in Prolegomenis de differentia Logicæ naturalis & artificialis docuimus, non modo dicta plene intelliget, verum etiam iisdem facilem habebit fidem. Quodsi attentius resolutiones problematum pyrotechnicorum expendas, easque tanquam inveniendas tibi proponas; methodo empiricæ inveniendi misceri rationalem, aut saltem misceri posse deprehendes, quemadmodum nemo hominum in actionibus suis totus empiricus est, ut non etiam rationi aliquæ deferantur partes. Et si forsan fuerit quispiam, te in modum inquirentem, quo eædem fuerint repertæ, haud

raro, immo plerumque incidere in alium ab eo, quo usi sunt inventores, prorsus diversum; non tamen inde conficitur, te nihil agere: sufficit enim si ostendere possis quod eo, quem concipis, modo reperiri potuerit quod quærebatur. Cum enim non alio fine in modum inveniendi inquiras, quam ut eundem in casu simili imiteris; eundem ex asse consecutus, si vel maxime de eo non cogitavit, qui quid invenit: id quod de omni analysi notandum, quam quasi divinando eruere studemus. Ceterum si quæ compositiones occurrunt; quarum nullam reddidimus rationem; in eam eo modo inquirendum, quo rationem compositionis pulveris pyrii casu detectæ eruimus (§. 17. *& seqq. Pyroteb.*).

§. 333. Qui Architecturæ militaris nonnisi cognitionem historicam desiderant, ex definitionibus terminos sibi perspectos reddere tenentur, nec inconsultum est, si ad manus fuerit idea quædam materialis munimenti sive ex ligno, sive ex charta, sive etiam ex argilla parata. Cum enim terminos non alio fine addiscant, quam ut munimenta videntes singula suis nominibus indicare valeant, & ut nominibus auditis respondentes iisdem ideæ imaginationi præsentes sistantur; ideæ hæ facilius memoriæ imprimuntur per conspectum ideæ materialis, quam notionibus distinctis, quibus definitiones constant. Quodsi tamen hæ accedant, imprimentur tanto firmius & jucundius, ut facilius eadem retineantur, nec sine voluptate labore hoc defungaris. Deinde sufficit munimenti unius vel alterius Protographiam saltem conficere, quæ nonnisi ambitum totius munimenti & operum externorum exhibet, ut hoc pacto idea munimenti integri acquiratur, nec ejus deinde conspectus adspicientem confundat. Idem tenendum est de operibus hostium campestribus, quorum in praxi offensiva & defensiva opus est. Neque inconsultum est, ut, terminis intellectis, ichnographias munimentorum ad manus sumat, & per eos easdem explicare discat. Rudis hæc Architecturæ militaris notitia usui est iter facientibus & loca munita invisentibus, tum etiam prodest ad intelligendas novellas publi-

publicas, quando de obsidionibus urbium munitarum loquuntur.

§. 334. Qui cognitionem Architecturæ militaris scientificam sibi acquirere student, elementa integra eo, quo conscripta sunt, ordine perlustrare debent. Ex capite igitur primo principia sibi perspecta reddere tenentur, ex quibus omne de diversis muniendi formis judicium pendet. Secundum hæc principia examinare debet diversas muniendi formas, quæ in capite secundo proponuntur. Neque parum sibi consulet, ubi deinceps ex *Sturmii* Architectura militari hypothetica simili examini alias adhuc muniendi formas subjiciat, vel ex aliis libris, quos de Architectura militari recensuimus, alias petat. Ita nimirum non modo principia ipsa sibi reddet multo clariora eaque magis familiaria; verum etiam eorundem applicationem in suam magis rediget potestatem. Neque etiam contemnendus est calculus trigonometricus: quod qui faciunt, ejus utilitatem minime prospiciunt. Nemo non novit in qualibet muniendi forma non omnia sumi posse principiis in capite primo expositis convenienter; sed per quædam assumta determinari cetera. Horum adeo quantitas ex iis, quæ sumuntur, per calculum geometricum eruenda, siquidem accurate de eadem constare debet. Nullum equidem dubium est, ex iisdem constructione geometrica easdem lineas eosdemque angulos determinari & illarum magnitudinem ope scalæ geometricæ, horum vero quantitatem ope instrumenti transportatorii investigari posse; nemo tamen est qui nesciat, methodum hanc non modo supponere constructionem accuratissimam, verum etiam ne hac quidem supposita adeo accurate investigantur, quemadmodum per calculum geometricum eruuntur, quantitates linearum & angulorum. Quodsi excipias, in praxi acribiam trigonometricam observandam non esse, immo nec semper observari posse, si vel maxime velis; utrumque largior: non tamen hinc recte infertur, quod inutile sit nosse angulorum ac linearum magnitudinem quam accuratissime. Etenim hinc non modo certus es, te in ea definienda

 nienda

nienda nullum admisisse errorem, qui facile irrepere poterat eam mechanice investigando; sed & hinc attentior efficitur animus, ne in praxi a rigore magis recedas, quam par erat. Taceo, quod ad scientificam Architecturæ militaris cognitionem etiam requiratur, ut constet quomodo ex iis, quæ principiis in parte prima expositis convenienter sumuntur, investigentur cetera, quæ per ea determinantur. Ut vero tanto minus in dubium revocari possit utilitas calculi trigonometrici in Architectura militari; hoc unum adhuc probe perpendi velim. Subinde per ea, quæ in methodo muniendi sumuntur vi principiorum generalium, molesta est constructio geometrica, si quidem accurata desideretur. Quodsi vero lineæ aliæ supputentur, ex iis tanquam cognitis jam multo simplicior evadit & accuratior. Exemplum habemus in methodo muniendi *Blondelliana* (§. 151 *Arch. mil.*), cujus constructio per calculum trigonometricum ad *Paganianam* revocatur. Immo ope hujus calculi constructio ex latere interno assumto potest revocari ad alteram, quæ ex externo procedit & contra: id quod subinde usui esse potest, præsertim in munitionibus irregularibus. Munimenta irregularia expendimus capite tertio, & quænam hic sint observanda, exponimus. Enimvero in methodo muniendi irregulari inprimis opus est, ut principia generalia constanter ob oculos versentur, ne quid contra ea admittatur: id quod facile accidit, nisi per ea examinentur, quæ in delineandis munimentis irregularibus facis. Hic sane haud raro cœcutiunt, qui ea non satis perspecta habent, vel in eorum applicatione hæsitant. Unde apparet, quam necessaria sit scientifica Architecturæ militaris cognitio, cum irregularia munimenta sint frequentiora regularibus, ut adeo is demum artis muniendi peritus sit dicendus, qui in delineandis munimentis irregularibus non hæret, nec cespitat. Denique qui rationes quoque operum campestrium, quæ capite ultimo describimus, perspicere voluerit, is duo scholia, quæ in fine adjicimus, attente perlegat, ut processus obsidionis ideam animo concipiat & quæ-

nam

nam obsessi defensionis gratia faciunt, intelligat. Hinc enim multo clarius intelliguntur, quæ de illis præcipiuntur.

§. 335. Quodsi quis praxi Architecturæ militaris operam dare decreverit, ei scientificam ejus cognitionem quam maxime commendamus, experientia domestica deinde magis illustrandam ac confirmandam. Ab eo autem cum expectetur, ut accuratas & nitidas munimentorum delineationes dare possit; in iis quoque delineandis multum operæ consumere tenetur, donec tandem multiplici exercitio eum consequatur habitum, quo se commendare possit. Vulgo peritiam Architecturæ militaris ex munimentorum delineationibus æstimare solent, fallaci admodum judicio. Etsi autem in arte muniendi excellere possit, qui in iis delineandis parum excellet; cum tamen qui eidem totum sese dat nec ea negligere debeat, quæ artem ornant, nitidas quoque delineationes ab eo jure exigimus, tanto quidem magis, quo certius est, haud raro, immo plerumque contemni artem ornatu isto destitutam. Qui vero praxi operam dare ipsamque artem exercere non decrevit, etsi castra sequatur; ei vix suademus, ut in habitu isto comparando tempus fallat, quod longe utilius in aliis addiscendis consumere poterit.

§. 336. Quibus tertius cognitionis gradus curæ cordique est, in Architectura quoque reperient militari, quæ attentionem ipsius merentur, sive in sola Mathesi versari voluerint, sive intellectum perficere studuerint, ut eodem prompte ac rite etiam extra eandem utantur. Cum Architectura militaris in numero disciplinarum practicarum sit, ratio ultima eorum, quæ in eadem traduntur, finis est, qui per eam intenditur. Quamobrem hic probe perpendendum venit, quomodo ex fine, qui in definitione indicatur, deducantur principia, quæ in capite primo proposuimus, applicata vero deinde ad eadem Geometria cetera hinc deriventur, sine quibus forma muniendi concipi nequit, multo minus munimenta actu excitare licet. Hinc enim non solum addiscere datur, quæ ad cognitionem artis mathematicam venandam usui sunt; verum

rum etiam quomodo in disciplinis practicis versandum, ut satis ad æquatas nanciscaris ideas, quæ praxi sufficiunt. Satis autem adæquata est, si in ea singula, quæ fieri debent, determinentur, quemadmodum ex tractatione Architecturæ militaris abunde elucescit, modo attentionem tuam in ea desiderari minime patiaris. Diversæ dantur muniendi formæ; sed, ubi eas juxta principia in capite primo proposita examines, non omnes cum iis æque consentiunt. Unde aliæ aliis tanquam meliores præferuntur. Docet autem progressus Architecturæ militaris, quod primo inventæ muniendi formæ defectibus fuerint obnoxiæ, quos experientia detexit, primum ab inventoribus non animadversas, iis autem mederi studuerint, qui recentiores excogitarunt. Etsi in usum artis inveniendi non inutile foret, eo fine expendere omnes muniendi formas, quæ hactenus publici juris factæ, & quidem eo ordine, quo luci publicæ expositæ fuerunt; nostri tamen instituti ratio minime ferebat, ut in tantas ambages descenderemus. Ne tamen hac in re prorsus deessemus lectori ad tertium cognitionis gradum adspiranti, ea tradidimus, quæ ad ideam quandam hujus facti animo concipiendam sufficiunt, profuturam iis, qui in aliis disciplinis practicis Architectos militares non infeliciter imitari voluerint. Non alia sane de causa exposuimus methodum muniendi Belgicam, utut propter defectus, quibus laborat, hodie antiquatam, ut nullius usus esse videatur, nisi quatenus adhuc extent munimenta bene multa hac methodo constructa, & iisdem subjunximus methodos muniendi Gallorum. Constat enim formam muniendi Belgicam tanquam omnium optimam celebratam fuisse, ejus autem nævis animadversis, Gallos primum publicasse formas alias, quibus hisce mederi tentarunt. Ceterum applicatio Trigonometriæ ad Architecturam militarem in usum tertii cognitionis gradus etiam aliquam attentionem meretur, non modo quod hoc ipso confirmetur, quod in arte inveniendi locum mereatur; verum etiam ut ejus amplissimus usus in majore luce constituatur.

§. 337.

§. 337. Architecturæ civilis cognitionem historicam acquisiturus legat definitiones & problemata, exceptis iis, quæ ad delineationes Ordinum architectonicorum & eorum usum in ornandis januis atque fenestris spectant, & quæ de ichnographia & orthographia ædium agunt. Quodsi desit occasio ædificia juxta regulas architectonicas constructa contemplandi; ichnographias & orthographias externas ædificiorum æri incisas perlustret, ut ideam ædificii integri juxta regulas architectonicas constructi animo imprimat. Inprimis autem terminos & constructionem Ordinum architectonicorum sibi familiares reddat, ne in ornatu, qui inde petitur, cœcutiat. Hoc pacto obtinebit, ut non solum libros de Architectura civili conscriptos sine hæsitatione legere, sed quæ usui suo esse possunt, etiam addiscere ac data occasione ad eundem transferre queat. Historica igitur cognitio non ob solam curiositatem, sed & ob utilitatem, quam unicuique præstat, acquiritur. Sane qui peregrinantur, quemadmodum Germani facere solent, studiis academicis absolutis, cognitione ista animum imbutum habere debent, ne in ædificiis aliisque operibus architectonicis spectandis ignorent, quid videant, laudaturi aliis, quod cur laudent, nullam afferre valent rationem. Male adeo sibi consulunt, qui studium architectonicum, quod ea fini intra paucas hebdomades absolvi poterat, in Academiis prorsus negligunt non alia de causa, quam quod architecti fieri nolint. Perfacile autem hoc studium est, præsertim si ultra cognitionem historicam progredi nolueris. Quodsi otium suppetat, ruditer saltem delineare ordinem aliquem architectonicum, veluti Toscanum, qui delineatu omnium facillimus, juvat; non modo ut idea Ordinis, sed etiam membrorum memoriæ firmius infigatur: id quod tanto magis suadendum, cum norim plerosque fieri desertores studii architectonici, quod tædiosum videatur terminorum notitiam sibi comparare.

§. 338. Scientificam Architecturæ cognitionem desiderans elementa integra eo, quo conscripta sunt, ordine perlegat & eam

eam attentionrm afferat, quæ ad singula rite percipienda sufficit. Qui vel in Elementis Geometriæ versatus fuerit, ei attentio huc afferenda nulla fere videbitur: Mathematum vero prorsus ignarus non majorem hic requiri experietur, quam qua in legendo libro alio quocunque utendum; immo minorem, cum omnia distincte explicentur, atquod vulgo fieri non solet, nec occurrant verba, quorum dubius est sensus, præter doctrinam vero de Ordinibus architectonicis nihil occurrat, cujus non habeat lector ideam vulgari experientia acquisitam. Nemo autem hic expectet demonstrationes, quales in Geometria dedimus: sufficit enim addisci eorum, quæ præcipiuntur, rationes, ut intelligatur, cur hoc potius modo fieri debeant, quam aliter. Inprimis etiam probe perpendat in Ordinibus architectonicis multa esse arbitraria, quorum etsi dentur atque a nobis datæ sint rationes, absit tamen, ut quis rationes istiusmodi desideret, quales sunt ceterorum, quæ necessarias habent. Sane in Arithmetica, quæ rigidas demonstrationes admittit cum veritates numerorum non minus necessariæ sint, quam linearum & figurarum in Geometria, eorum, quæ arbitraria sunt, veluti legis numerandi & notarum numericarum, non dari possunt rationes, quæ veritatibus necessariis conveniunt. Qui praxi architectonicæ sese dedunt, iis inprimis opus est scientifica Architecturæ cognitione: architectus enim in promptu habere debet rationes, quas reddat quærentibus, cur hoc vel illud ita fecerit (§. 3. *Arth. civ.*). Obtinebit præterea; ne cœca sit aliorum imitatio, quam haud raro esse fallacem, ne opus probetur intelligentium judicio, experientia loquitur. Non desunt exempla, quibus quod dictum est, confirmari poterat; sed nostrum jam non est perstringere ea, quæ ab aliis minus recte facta sunt, cum jam docere id unice intendamus, quomodo tractandum sit studium architectonicum, ut recte fiant omnia. Industriam præterea suam exercere debent in delineationibus architectonicis, quicunque artem exercere decreverunt, & quæ paulo ante de delineationibus munimentorum annotavimus (§. 335).

335), ea quoque hic notanda veniunt. Ex elegantia delineationum vulgo judicium fertur de peritia Architecti, etsi male ac subinde non sine damno fundatoris. Quamobrem cum dandum non modo sit aliquid opinioni, sed & qui in arte quadam excellit, ea negligere non debeat, quæ ad ornatum faciunt; nemo erit, qui ab Architecto elegantiam in delineandis ædificiis aliisque operibus architectonicis jure non desideret, quamvis non probemus contemni propterea artem in eo, qui eadem excellit, quia elegantiam in delineando non possidet. Qui enim hoc faciunt, suo & aliorum, quibus a consilio esse debebant, hoc faciunt damno. Immo si quis desideret delineationes elegantes, aliorum opera eædem perfici poterunt, modo, qui in arte excellit, ea suppeditet, quæ ad eas perficiendas necessaria sunt.

§. 339. Qui denique ad tertium cognitionis gradum adspirant, eos quoque juvabit Architectura civilis. In Architectura civili, regulæ omnes deducuntur ex fine, quem loquitur definitio ejusdem. Finis hic in eo consistit, quod ideam ædificii animo concipere & juxta eam ipsum extruere debeamus, ita ut scopo fundatoris ex asse satisfaciat. Quamobrem huc potissimum animum advertere tenetur, qui tertium cognitionis gradum intendit, quomodo ex hoc fine deriventur regulæ omnes, ita ut rationes earundem tandem in hanc rationem ultimam resolvantur. Monuit jam *Vitruvius* & nos in Elementis nostris a priori ex ipso fine Architecturæ ostendimus, regulas Architecturæ omnes redire ad firmitatem, utilitatem seu commoditatem & venustatem atque ornatum ædificii, vel alterius operis architectonici cujuscunque. Quamobrem regulæ omnes rationem sufficientem vel in firmitate, vel in utilitate, vel in venustate atque ornatu, vel hisce binis, aut omnibus simul sumtis agnoscunt. Sufficit itaque inquirere, quomodo ex hisce fontibus vel immediate vel mediate fuerint deductæ. Cum paucissimæ sint, quæ Geometriæ auxilium postulant; hæc disquisitio plurimum proderit ei, qui disciplinas practicas a Ma-

thesi sejunctas accurata methodo pertractare voluerit. Notandum præterea, si quis ideam ædificii animo concipit, dato fundatoris scopo, eum inventorem agere ac regulis Architecturæ civilis uti tanquam principiis in ratiocinando. Quamobrem qui ad modum, quo hoc facit, animum attendit; is hinc addiscere valet, quomodo theoriæ ad tractanda negotia, quæ levi brachio tractari minime possunt, dextre ac rite applicentur. Suademus ergo ut ædificiorum supposito fundatoris scopo inveniatur constructio etiam ab iis, qui artem exercere non intendunt: quod ut facilius succedat, ante in examinandis ædificiis juxta regulas architectonicas non inutiliter versabitur, quam ad telam istam pertexendam se accingit. Non adeo levem, nec contemnendæ utilitatis deprehendet demonstrationem, qui ædificium dato fundatoris scopo construendum sibi tanquam problema proponit, veluti *construere in data area datoque loco ædificium, quod huic fundatoris scopo ex asse satisfacit*, deinde quomodo extruendum sit eodem modo exponat, quo resolutiones problematum per universam Mathesin exhibuimus, & tandem demonstret pro datis circumstantiis scopo fundatoris ex asse satisfieri, siquidem hoc modo exstruatur. Etenim qui in expediendis negotiis tam privatis, quam publicis eam certitudinem consequi voluerit, quam consequi datur, plurimum hinc lucis fœnerabitur, quam aliunde vix ac ne vix quidem adeo commode expectet Non igitur erubescimus studium Architecturæ civilis hoc modo instituendum commendare iis, qui ad negotia publica gerenda sese præparant, ut eorum rite tractandorum ideam quandam exemplarem animo insinuent. Plura addere possem, quomodo prudentia Architecti prodesse possit in gerendis negotiis, nisi principiis, quæ in Philosophia practica tradimus, imbutus per se hoc videre possit, ubi ea, quæ hic commendamus, exercitia non neglexerit.

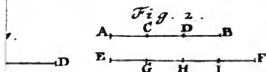
§. 340. Atque ita tandem nos satis docuisse confidimus, quomodo studium mathematicum tractandum sit, ut omnem consequamur usum, qui ab eo expectari potest. Non loquor nisi experta

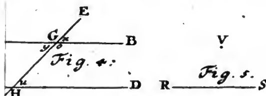
experta ac ingenue profiteor, me nunquam ea, quæ hactenus in Philoſophia conſcripſi & in poſterum, ſi Deo ita viſum fuerit, additurus ſum, daturum fuiſſe, niſi adminiculis iſtis adjutus fuiſſem. Eadem experientia fretus docere quoque poteram, quomodo Matheſi uti poſſimus ad diſtinctas & fœcundas in Philoſophia prima notiones venandas & quomodo ſtudio mathematico perfici poſſit etiam appetitus; ſed cum hoc a præſenti inſtituto alienum ſit, quæ hic dici poterant, alii occaſioni reſervamus. Ne tamen dixiſſe videamur, quæ abſona ſunt, unum ſaltem alterumque exemplum in medium afferre lubet. Poteramus hic tantummodo provocare ad ea, quæ alibi jam tradidimus, veluti quod notio generum, & ſpecierum (*not.* §. 72. 73 *Log.*) atque individui ex formulis algebraicis derivari poſſit (*not.* §. 74 *Log.*), & ipſe modus, quo Deus univerſalia eorundemque nexum in ſingularibus intuetur, ex iisdem formulis ediciatur (*not.* §. 275 *part.* 1. *Theol. nat.*); ſed ne lectorem ablegemus ad alibi quærenda, nec hic repetamus alibi dicta, conſultius viſum fuit exempli loco alia quædam proferre.. Inter notiones difficiles referri ſolet notio determinati & indeterminati. Enimvero nos eandem derivavimus ex exemplis mathematicis: qua etiam de cauſa ſingula, quæ in Ontologia de determinato & indeterminato docuimus, exemplis mathematicis illuſtramus. Neque enim dantur alia hiſce clariora & notionem in Philoſophia longe utiliſſimam felicius illuſtrantia. In formula algebraica quacunque, veluti ſi $\frac{a+b}{2}$ dicatur numerus major, ſumma exiſtente a & differentia b, numeri a & b dicuntur indeterminati, quia tam a, quam b explicari poteſt per numeros infinitos, conſequenter de a affirmari poteſt, tum quod ſit 6, tum quod ſit 12, tum quod ſit 19 & ita porro in infinitum, & de b affirmari poteſt, tum quod ſit 2, tum quod ſit 4, tum quod ſit 5 & ita porro in infinitum. Indeterminata igitur dicitur ſumma, quatenus conſideratur ut id, de quo affirmari poteſt numerus 6, 12, 19 &c. nullus tamen adhuc de eadem affirmatur: quæ eſt ipſa notio indeterminati

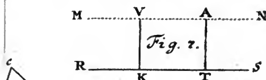
(§. 105 *Ontol.*). Ast si summa dicatur 6, determinata dicitur, quia jam constat, quinam numerus de ea sit affirmandus: quæ est ipsa notio dererminati (§. 112 *Ontol.*). Idem patet de differentia *b*. Ordinis quoque notio distincta inter eas refertur, quæ difficiles sunt: sed ex seriebus infinitis, quarum termini ordine dicuntur progredi, haud difficulter eruitur. E. gr. in serie $\frac{1}{1.2}v^2 - \frac{1}{3.4}Av^2 + \frac{1}{5.6}Bv^2 - \frac{1}{7.8}Cv^2$ &c. in infinitum, ubi *A* terminum primum, *B* secundum, *C* tertium denotat; terminus sequens determinatur ex præcedente eodem modo, ac ideo ordo in progressu terminorum adesse dicitur. Ex identitate determinationis nascitur similitudo (§. 217 *Ontol.*) Ordo igitur hic est similitudo obvia in modo, quo termini se invicem consequuntur, quemadmodum vult definitio nostra ordinis (§. 472 *Ontol.*). Sed pauca hæc sufficiant.

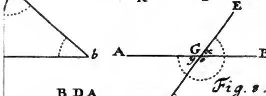
FINIS COMMENTATIONIS
DE
STUDIO MATHESEOS RECTE INSTITUENDO.

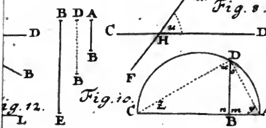


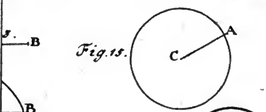

Fig. 2.
A
C
D
B
D
E
G
H
I
F


E
G
B
Fig. 4.
H
D
V
R
Fig. 5.
S

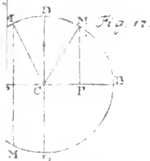

M
V
A
N
Fig. 7.
R
K
T
S


c
b
E
A
G
B
Fig. 8.


D
B
D
A
B
B
C
H
D
B
D
F
Fig. 10.
ig. 12.
L
E
C
z
B
A


B
Fig. 15.
C
A
B





D
M
M
Fig. 17.
C
P
B
M

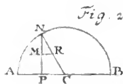
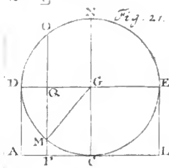
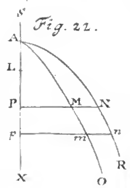


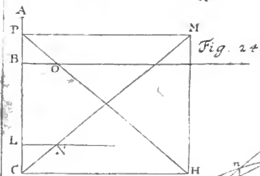
Fig. 26.
N
M
R
A
P
C
B



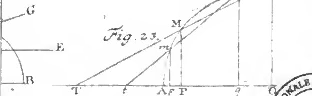
N
Fig. 21.
O
D
Q
G
E
M
A
P
C
L



S
Fig. 22.
A
L
P
M
N
p
m
n
R
X
O

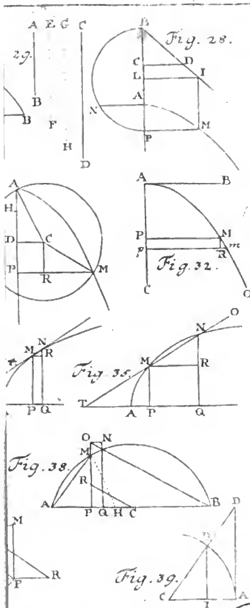


A
P
M
Fig. 24
B
O
L
N
C
H



r
R
n
N
M
Fig. 23.
m
G
E
B
T
t
A
p
P
q
Q
V.





29.
A E G C
B
F
H
D
Fig. 28.
B C D L I A N M P
A H D C P R M
A B P M p m R
Fig. 32.
C O
M N R P Q
Fig. 35.
M N O R T A P Q
Fig. 38.
O N M R A P Q H C B
M R P
Fig. 39.
D B C I A
Tab. III Tom. V.



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III"
NAPOLI



g. 43.
F
G



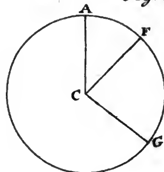
. 44.
S
H
L

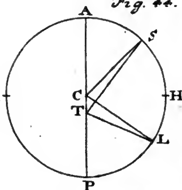


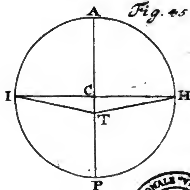
ig. 45.
H



NAPOLI


Fig. 43.
A
F
C
G


Fig. 44.
A
S
I
C
H
T
L
P


Fig. 45.
A
I
C
H
T
P



INDICES

IN

TOMOS QUINQUE

ELEMENTORUM

MATHESEOS UNIVERSÆ.

I.

CONSPECTUS ELEMENTORUM MATHESEOS UNIVERSÆ.

TOMUS I.

TOMUS II.

TOMUS III.

TOMUS IV.

24. Com-

FINIS

TOTIUS CONSPECTUS.

II.

INDEX

Ostendens paragraphos, in quibus definitiones & propositiones Elementorum Euclidis continentur.

Notes velim, Ar. designare Arithmeticam, G. Geometriam, An. Analysin finitorum.

Prop. 5.

INDEX.

Elem.

Pr. 22.

FINIS INDICIS SECUNDI.

III. IN-

III.

INDEX AUTORUM,

Qui in Commentatione de præcipuis ſcriptis mathematicis recenſentur.

Notes velim Numerum Romanum Caput, ceteros vero §. §. ejusdem deſignare.

Bernoulli,

Fabry

I.

K.

L.

Lands-

à *Schoo-*

de *Ville*,

FINIS
INDICIS TERTII.

IV.

INDEX
RERUM ET VERBORUM
TOMO I.
CONTENTORUM.

Notes velim, literam *c.* Commentationem de methodo mathematica, *a.* Arithmeticam, *g.* Geometriam, *t.* Trigonometriam planam *f.* Analysin finitorum, *i.* Analysin infinitorum & numeros §. §. designare: ubi vero nulla numeris adscribitur litera, eos referri ad proxime præcedentem.

A.

Conver-

Distantia

Fractiones

Linearum

Conver-

Distantia.

Fractiones

Linearum

M.

N.

Notio

Pars

Quadra-

Ratio

Sphæ-

Termi-

U.

Uncia

FINIS INDICIS QUARTI.

V.

INDEX
RERUM ET VERBORUM
TOMO II.
CONTENTORUM.

Notes velim, literam *m.* Mechanicam, *f.* Hydrostaticam, *a.* Aërometriam, *h.* Hydraulicam & numeros §. § disignare: ubi vero nulla numeris adscribitur litera, eos referri ad proxime antecedentem.

A.

Centrum

curvis

Pressiones

Velo-

FINIS INDICIS QUINTI.

VI. IN-

VI.

INDEX
RERUM ET VERBORUM.
TOMO III.
CONTENTORUM.

Notes velim, literam *o.* Opticam, *c.* Catoptricam, *d.* Dioptricam, *p.* Perspectivam, *s.* Sphærica & Trigonometricam sphæricam, *a.* Astronomiam, numeros vero §. §. designare: ubi autem nulli numeri adscribuntur, eosdem referri ad literam præcedentem.

A.

Angulus

Basis

Corpus

Eccen-

E.

Fixarum

Inter-

Meniscus.

N.

Partes

Punctum

Radii

Remo-

Umbra

FINIS INDICIS SEXTI.

VII.

INDEX
RERUM ET VERBORUM
TOMO IV.
CONTENTORUM.

Notes velim, literam *g.* Geographiam & Hydrographiam, *c.* Chronologiam, *ſ.* Gnomonicam, sive Sciatericam, *p.* Pyrotechniam, *m.* Architecturam militarem, *a.* Architecturam civilem & numeros §. §. designare; ubi vero nulla numeris adscribitur litera, eos referri ad proxime antecedentem.

Acces-

Annus

Etesiæ,

Horolo-

Obsi-

O.

P.

Terræ

FINIS INDICIS TOMI IV.



VIII.

INDEX

Rerum in Commentatione de Studio Mathematico recte instituendo contentarum, quæ legitur Tomo V. Elementorum Matheseos.

Æquatio

Artis

M.

Ratio-

FINIS

TOMI V. ELEMENTORUM MATHESEOS.







